



movimento di corpi qualsivoglionti considerati secondo la naturale loro forma e costituiva// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1848. V. 24(1). P. 1–186.

26. *Eshelby J.D.* The Force on an Elastic Singularity// Phil. Trans. Roy. Soc. L., 1951. V. A244. P. 87–112.

27. *Шварц Л.* Анализ: В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. II. 528 с.

28. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.

29. *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

УДК 539.374

СВЯЗАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев*, Д.А. Семенов*

Московский городской университет управления
Правительства Москвы,

кафедра прикладной математики;

*Самарский государственный университет,

кафедра механики сплошных сред

E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru,

semenow@ssu.samara.ru

В представляемой работе в рамках линейной теории недиссипативной термоупругости Грина – Нахди (GNII, гиперболическая термоупругость), рассматривающей термоупругую деформацию среды как волновой недиссипативный процесс, с помощью связанных гиперболических уравнений движения и теплопроводности дается анализ гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного цилиндрического волновода. Проведен анализ частотного уравнения и форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом термоупругом волноводе. Численно определена зависимость волнового числа от частоты. Особое внимание уделяется волнам второго азимутального порядка. Исследованию предшествует изучение (с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса) слабых разрывов решений связанных уравнений гиперболической термоупругости, а также полный анализ вопросов распространения плоских гармонических связанных незатухающих термоупругих волн.

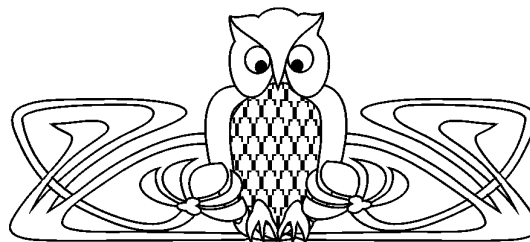
Ключевые слова: гиперболическая термоупругость, термоупругая деформация, недиссипативный процесс, гармоническая волна, волновое число, цилиндрический волновод.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория термоупругости (см., например, [1, 2]) основывается на законе теплопроводности Фурье, который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла \mathbf{h} и отрицательного градиента температуры θ :

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \nabla \theta,$$

где Λ_* — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity). Соответствующее уравнение теплопроводности, как известно, принадлежит к параболическому типу. Поэтому температурное возмущение, локализованное в определенном месте термоупругого тела, должно немедленно ощущаться и в любом другом месте, а это, вообще говоря, противоречит принципу причинности. Классическая теория термоупругости предсказывает, таким образом, бесконечно большую скорость распространения любого термического сигнала.



Coupled Dynamic Problems of Hyperbolic Thermoelasticity

V.A. Kovalev, Yu.N. Radayev*, D.A. Semenov*

Moscow City Government University of Management,

Chair of Applied Mathematics

*Samara State University,

Chair of Continuum Mechanics

E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru,

semenow@ssu.samara.ru

In the present paper in the framework of the linear non-dissipative coupled thermoelasticity (GNII, hyperbolic thermoelasticity), treating the heat transport as propagation with finite speed of undamped waves of second sound, harmonic coupled thermoelastic waves propagating in an infinite free from tractions thermoisolated cylinder are studied. Dispersion relation is derived for this type of thermoelastic waves for an arbitrary azimuthal order. Numerical results for wave numbers depending on frequency are obtained. Special attention is paid to the waves of the second azimuthal order. The study follows investigation of weak discontinuities propagation in GNII media by the Thomas – Hadamard technique and analysis of plane harmonic thermoelastic coupled waves.

Key words: hyperbolic thermoelasticity, thermoelastic strain, non-dissipative process, harmonic wave, wave number, cylindrical waveguide.



Явление теплопроводности посредством распространения (с конечной скоростью) незатухающих термических волн получило название «второго звука». Имеется ряд экспериментальных доказательств существования «второго звука», хотя его экспериментальное обнаружение всегда сопряжено с большими трудностями, поскольку в твердых телах он возможен лишь в области весьма низких температур. Последнее обстоятельство позволяет вести речь об использовании термоупругих моделей, допускающих явление «второго звука», при описании природных процессов (таких как криовулканическая активность при температурах порядка 60–70 °К), протекающих, как показали наблюдения, на удаленных от Солнца спутниках Юпитера, Сатурна и Нептуна. Основные теории теплопроводности посредством распространяющихся с конечной скоростью волн второго звука, включая и исторический аспект их развития, изложены в обстоятельной обзорной статье [3], которая содержит практически полную библиографию работ по тематике тепловых волн, опубликованных до 1989 г.

В начале 1990-х гг. Грином и Нахди [4,5] была предложена весьма общая, отличная от классической теория теплопроводности, известная в настоящее время как GN-теория. Она была развита в общей нелинейной форме в трех вариантах I, II, III: в линейном приближении первый вариант приводит к закону теплопроводности Фурье и параболическому уравнению теплопроводности, второй вариант предлагает считать распространение тепла как волновой недиссипативный процесс и приводит к *гиперболическому* уравнению теплопроводности, третий вариант, смешанный, включает первые два в качестве предельных случаев. Именно поэтому GN-теория в состоянии моделировать значительно более широкий круг явлений, по сравнению с теорией Фурье.

Теория Грина – Нахди второго типа часто называется гиперболической термоупругостью. Закон теплопроводности в теории GNII имеет вид

$$\dot{\mathbf{h}} = -\Lambda \nabla \theta,$$

где Λ — постоянная скорости теплопроводности (thermal conductivity rate). В рамках гиперболической термоупругости преодолевается присущий теории теплопроводности Фурье парадокс о бесконечной скорости распространения тепла.

К настоящему времени неклассическая термоупругость уже сформировалась как важное самостоятельное направление современной механики сплошных сред. Имеется достаточно много работ, посвященных анализу различных теоретических аспектов волновой недиссипативной термоупругости¹. Отсутствие диссипации энергии в термоупругом GNII теле позволяет дать вариационную формулировку теории с целью дальнейшего поиска вариационных симметрий связанной системы дифференциальных уравнений в частных производных термоупругости. В работе [7] найдены лагранжева и гамильтонова формы теории типа GNII.

В статье [8] были исследованы плоские связанные термоупругие волны в неограниченной среде GNIII. Было установлено, что среда GNIII прозрачна для термоупругих волн весьма низкой частоты так, как это имеет место для волн любой частоты в среде GNII.

В настоящей работе в рамках линейной теории недиссипативной термоупругости Грина – Нахди (GNII, гиперболическая термоупругость), трактующей термоупругую деформацию среды как волновой недиссипативный процесс, с помощью связанных гиперболических уравнений движения и теплопроводности проводится анализ гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного (в том смысле, что боковая поверхность волновода непроницаема для тепла) цилиндрического волновода. Окружной профиль волны предполагается произвольным, хотя изучаться будут по отдельности волны с фиксированными (правда, сколь угодно высокими) азимутальными порядками.

С помощью метода разделения переменных построено решение связанных уравнений гиперболической термоупругости, содержащее достаточное число произвольных постоянных, с тем, чтобы

¹Мы не ставим своей целью указать на все важнейшие работы по неклассической термоупругости и экспериментальным доказательствам «второго звука». Наиболее существенные литературные источники имеются в работе [6].



оказалось возможным удовлетворить всем граничным условиям на боковой поверхности цилиндра². Проведен анализ частотного уравнения и форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом термоупругом волноводе в условиях как осесимметричного окружного волнового профиля, так и в случае окружных гармоник произвольного, сколь угодно высокого порядка симметрии. С помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0 численно определена зависимость волнового числа от частоты. Особое внимание уделяется волнам второго порядка окружной симметрии. Показано, что каждой заданной частоте отвечает счетное число волновых чисел. Заканчивается работа объяснением перехода от соотношений гиперболической термоупругости, описывающих распространение термоупругих гармонических волн в цилиндрическом волноводе, к чисто упругому случаю. Для простоты мы ограничимся осесимметричным случаем, т.е. волнами с нулевым порядком окружной гармоники.

Основному исследованию предшествует изучение (с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса) слабых разрывов решений связанных уравнений гиперболической термоупругости, а также анализ вопросов распространения плоских гармонических связанных незатухающих термоупругих волн второго звука.

Главная проблема при изучении распространения гармонических по времени линейно упругих волн в волноводах проистекает от наличия ограничивающих стенок, что вызывает дисперсию волн (т.е. зависимость фазовой скорости от частоты), а многократные отражения упругих волн от боковых стенок приводят к весьма сложному волновому полю, не поддающемуся элементарному анализу, который возможен, например, в случае плоских гармонических волн. В бесконечных волноводах, в силу трансляционной инвариантности волнового поля, каждая естественная форма волны характеризуется единственным волновым числом k и гармонической зависимостью e^{ikz} от осевой координаты, что позволяет отделить эту координату в самом начале исследования. Зависимость волнового поля от двух оставшихся координат (радиальной и угловой) по-прежнему остается довольно сложной.

Распространение чисто упругих волн в бесконечных цилиндрических волноводах изучалось впервые Похгаммером (L. Pochhammer) [9] и Кри (C. Chree) [10], а также несколько позже Релеем (Reyleigh). В книгах [11, с. 193–199; 12, с. 58–73; 13, р. 287–292] могут быть найдены основные результаты и указания на литературные источники по этому предмету. Похгаммером в 1876 г. были построены точные решения уравнений динамической теории упругости в форме продольных осесимметричных (по их окружному профилю) гармонических (по времени) волн, распространяющихся вдоль оси свободного цилиндрического волновода. Им было выведено частотное уравнение для этого типа волн, из которого в принципе можно было бы получить фазовую скорость гармонических волн любой частоты. Однако частотное уравнение Похгаммера долгое время не поддавалось анализу. Лишь через пять десятилетий удалось получить ряд численных результатов (см., например, [14]) и численно определить полный комплексный спектр волновых чисел продольных осесимметричных волн (т.е. волн нулевого азимутального порядка). Частотное уравнение для волн с первой окружной гармоникой (изгибные волны) было получено в трудно обозримой форме и было признано непригодным для практического использования, пока в работе [15] не был выполнен его численный анализ. В настоящее время подобного рода задачи и построение графических зависимостей волнового числа от частоты чаще всего решаются конечно-элементными методами.

Известно, что характер волнового поля в цилиндрическом волноводе очень сильно зависит от порядка окружной симметрии волны (азимутального порядка). Волны в упругом цилиндрическом волноводе с окружными симметриями второго и более высоких порядков, по-видимому, вообще не исследовались. Неизвестно ни одного результата, касающегося частотных уравнений для таких волн, поэтому теория Похгаммера – Кри до сих пор привлекает внимание исследователей.

²Найденные в работе частные решения связанных уравнений обладают физической и математической полнотой: любое волновое поле внутри свободного теплоизолированного термоупругого цилиндра (независимо от источников его возникновения) всегда будет представляться в форме суперпозиции с соответствующими вкладами определенных частных волновых полей.



1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТИПА GNII (гиперболическая термоупругость)

Рассмотрим связанную систему уравнений движения и теплопроводности для линейного изотропного термоупругого (типа GNII, гиперболическая термоупругость) тела при отсутствии массовых сил, источников (стоков) тепла³:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\theta} - \frac{\alpha \theta_0}{\Lambda} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где μ, λ — упругие постоянные Ламе; $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ — оператор Лапласа; ∇ — трехмерный оператор Гамильтона (набла Гамильтона); \mathbf{u} — вектор перемещения среды из отсчетного состояния; ρ — плотность среды; θ — приращение температуры над отсчетной температурой; θ_0 — отсчетная температура; Λ — характерная скорость теплопроводности; κ — теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации; термомеханическая постоянная $\alpha = (1/3)(3\lambda + 2\mu)\beta^*$, где β^* — коэффициент объемного теплового расширения; точка над символом обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных координатах.

С целью упрощения записи уравнений термоупругости введем обозначения $\Lambda' = \frac{\Lambda}{\theta_0}$, $\kappa' = \frac{\kappa}{\theta_0}$. Тогда система уравнений (1.1) примет следующий несколько более простой вид:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \theta - \frac{\kappa'}{\Lambda'} \ddot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda'} \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

У вновь введенных величин Λ', κ' будем всюду в дальнейшем изложении опускать штрихи, чтобы облегчить восприятие уравнений.

Сначала мы изучим, как в термоупругом теле могут распространяться слабые разрывы. Прежде всего заметим, что система дифференциальных уравнений в частных производных (1.2) содержит частные производные третьего порядка от перемещений. Мы получим более симметричную форму уравнений, если введем в них вместо θ температурное смещение $\vartheta = \theta$. Здесь точка снизу обозначает первообразную по времени от θ . После простых преобразований находим

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \alpha \nabla \dot{\vartheta} - \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \vartheta - \frac{\kappa}{\Lambda} \ddot{\vartheta} - \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В этом представлении уравнения связанной гиперболической термоупругости содержат лишь частные производные второго порядка.

Пусть в пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) слабых разрывов перемещений \mathbf{u} и температурных смещений ϑ . Обозначая через \mathbf{n} единичный вектор нормали к волновой поверхности, имеем геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара – Томаса⁴:

$$\begin{aligned} [\nabla \otimes \nabla \otimes \mathbf{u}] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [\nabla \otimes \nabla \vartheta] &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{nB}, & [\ddot{\mathbf{u}}] &= G^2 \mathbf{A}, & [\ddot{\vartheta}] &= BG^2, \\ [\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}] &= -G\mathbf{n} \otimes \mathbf{A}, & [\nabla \dot{\vartheta}] &= -BG\mathbf{n}, \end{aligned}$$

³Приводимые далее уравнения хорошо известны. Их вывод заинтересованный читатель может найти в ряде современных работ, посвященных гиперболической термоупругости.

⁴См., например: Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с. В этой монографии содержится полное изложение геометрических и кинематических условий совместности первого и второго порядка, которые затем применяются для систематического изучения различных вопросов, связанных с распространением волн в сплошных средах.



где квадратные скобки [] обозначают скачок при переходе через поверхность слабого разрыва; B, \mathbf{A} — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства $B = 0$ и $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть, действительно, поверхность слабого разрыва.

Уравнения (1.3) позволяют найти следующие соотношения, связывающие скачки частных производных второго порядка от перемещений \mathbf{u} и температурных смещений ϑ при переходе через волновую поверхность:

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{A} + (\lambda + \mu)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{A})\mathbf{n} + \alpha B G \mathbf{n} - \rho G^2 \mathbf{A} &= \mathbf{0}, \\ B - \frac{\kappa}{\Lambda} B G^2 + \frac{\alpha G}{\Lambda} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из первого уравнения⁵ выразим скалярное произведение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ и подставим результат во второе уравнение. Тогда, предполагая, что на волновой поверхности имеется слабый разрыв температурного смещения ($B \neq 0$), получим уравнение для скорости распространения волновой поверхности вдоль нормали \mathbf{n} :

$$1 - \frac{G^2}{l^2} - \frac{s^2 G^2}{c_l^2 - G^2} = 0 \quad \left(l^{-2} = \frac{\kappa}{\Lambda}, \quad s^2 = \frac{\alpha^2}{\rho \Lambda} \right),$$

откуда сразу же находим (положительный знак соответствует индексу 1)

$$\frac{G_{1,2}^2}{l^2} = \frac{1 + \frac{c_l^2}{l^2} + s^2 \pm \sqrt{\left(\frac{c_l^2}{l^2} + s^2 - 1\right)^2 + 4s^2}}{2}, \quad (1.5)$$

причем выражение справа всегда положительно, т.е. имеется ровно две возможных скорости распространения слабых разрывов температурного смещения ϑ .

Слабый разрыв температурного смещения ($B \neq 0$) всегда сопровождается слабым разрывом перемещений ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \neq 0$), поскольку

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = -\frac{\alpha G B}{\rho(c_l^2 - G^2)}.$$

Слабый разрыв температурного смещения ϑ , не сопровождающийся слабым разрывом перемещений ($\mathbf{A} = \mathbf{0}$), невозможен ни на какой волновой поверхности.

Ясно, что помимо двух скоростей $G_{1,2}$ имеется еще одна нормальная скорость распространения слабых разрывов перемещений. Действительно, проектируя первое из уравнений системы (1.4) на произвольное касательное к волновой поверхности направление $\boldsymbol{\tau}$, получаем $(\mu - \rho G^2)(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A}) = 0$, следовательно, наличие слабого разрыва перемещений, характеризующегося условием $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{A} \neq 0$, возможно лишь на волновой поверхности, которая распространяется с нормальной скоростью, равной скорости чисто упругих поперечных волн $G_3 = c_t$. При этом слабый разрыв температурного смещения может отсутствовать.

Далее будем рассматривать только гармоническую зависимость перемещений \mathbf{u} и приращений температуры θ от времени: $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-i\omega t}$, $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$, где ω есть циклическая частота изменения гармонических полей смещений и приращений температуры; \mathbf{U}, Θ — комплексные амплитуды.

Тогда систему уравнений (1.2) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{U} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U} - \alpha \nabla \Theta + \omega^2 \rho \mathbf{U} &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2 \Theta + \omega^2 \left(\frac{\kappa}{\Lambda} \Theta + \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla \cdot \mathbf{U} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Значения ω , при которых система (1.6) имеет нетривиальное решение при заданных граничных условиях, будут являться частотами собственных колебаний (собственные значения) термоупругого тела, а соответствующие им амплитуды \mathbf{U}, Θ будут формами собственных колебаний (собственные формы).

⁵Обе части которого предварительно надо скалярно умножить на вектор \mathbf{n} .



2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Построим решения системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.6) для неограниченного кругового цилиндра в форме нормальных гармонических волн, распространяющихся вдоль оси цилиндра, предполагая, что боковая поверхность цилиндра свободна и теплоизолирована. Эти решения должны содержать *достаточное* количество произвольных постоянных с тем, чтобы можно было удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности волновода.

Для определения указанных решений системы (1.6) представим вектор \mathbf{U} в виде разложения Гельмгольца на безвихревую и вихревую составляющие:

$$\mathbf{U} = \nabla\Phi + \nabla \times \Psi, \quad (2.1)$$

где Φ — скалярный потенциал, Ψ — векторный потенциал. Для однозначной определенности векторного потенциала необходимо учесть также дополнительное условие:

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \quad (2.2)$$

Это условие калибровки векторного потенциала.

Подставляя разложение Гельмгольца (2.1) в систему (1.6), получим

$$\begin{aligned} \nabla((\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi - \alpha\Theta + \omega^2\rho\Phi) + \nabla \times (\omega^2\rho\Psi + \mu\nabla^2\Psi) &= \mathbf{0}, \\ \nabla^2\Theta + \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda}\Theta + \omega^2\frac{\alpha}{\Lambda}\nabla^2\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ясно, что все уравнения системы (2.3) удовлетворяются, если

$$\omega^2\rho\Psi + \mu\nabla^2\Psi = \mathbf{0}, \quad (\lambda + 2\mu)\nabla^2\Phi - \alpha\Theta + \omega^2\rho\Phi = 0, \quad \nabla^2\Theta + \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda}\Theta + \omega^2\frac{\alpha}{\Lambda}\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.4)$$

Здесь волновые потенциалы перемещений и приращения температуры связаны только через второе и третье уравнения.

Для векторного потенциала Ψ имеем независимое векторное уравнение (уравнение Гельмгольца):

$$\nabla^2\Psi + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Для дальнейшего исследования необходимо ввести цилиндрические координаты r, φ, z . Физические компоненты вектора перемещения \mathbf{u} в этой системе координат мы будем представлять в форме

$$u_r = Ue^{-i\omega t}, \quad u_\varphi = Ve^{-i\omega t}, \quad u_z = We^{-i\omega t},$$

где U, V, W являются физическими компонентами вектора комплексной амплитуды \mathbf{U} в цилиндрической системе координат.

Для приращений температуры по-прежнему имеем $\theta = \Theta e^{-i\omega t}$.

Векторное уравнение (2.5) в цилиндрической системе координат r, φ, z , представленное через физические компоненты векторного потенциала $\Psi_r, \Psi_\varphi, \Psi_z$, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi_r &= 0, \\ \nabla^2\Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Psi_r}{\partial\varphi} + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi_\varphi &= 0, \\ \nabla^2\Psi_z + \frac{\omega^2\rho}{\mu}\Psi_z &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$



Физические компоненты Ψ_r , Ψ_φ связаны двумя первыми уравнениями системы дифференциальных уравнений в частных производных (2.6). Для определения компоненты Ψ_z имеется отдельное уравнение и мы далее рассмотрим его.

Относительно физических компонент Ψ_r , Ψ_φ необходимо решить связанную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_r - \frac{\Psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_r &= 0, \\ \nabla^2 \Psi_\varphi - \frac{\Psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi} + \frac{\omega^2}{c_t^2} \Psi_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для этого представим указанные компоненты в виде

$$\Psi_r(r, \varphi, z) = A_r(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad \Psi_\varphi(r, \varphi, z) = A_\varphi(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (2.8)$$

где k — волновое число (или постоянная распространения)⁶, значения $n = 0, 1, 2, \dots$ нумеруют окружные гармоники и определяют окружной профиль волны. Число n называется также азимутальным порядком волны⁷.

На основании формул (2.8) для определения компонент A_r , A_φ из (2.7) получим следующую, также пока еще связанную, систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_r}{dr} - \left(\frac{n^2 + 1}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) A_r + \frac{2n}{r^2} A_\varphi &= 0, \\ \frac{d^2 A_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_\varphi}{dr} - \left(\frac{n^2 + 1}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) A_\varphi + \frac{2n}{r^2} A_r &= 0. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая почленно приведенные уравнения, можно относительно суммы $A_r + A_\varphi$ и разности $A_r - A_\varphi$ получить уже несвязанные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} (A_r + A_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (A_r + A_\varphi) - \left(\frac{(n-1)^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) (A_r + A_\varphi) &= 0, \\ \frac{d^2}{dr^2} (A_r - A_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (A_r - A_\varphi) - \left(\frac{(n+1)^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) (A_r - A_\varphi) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

которые можно интегрировать независимо друг от друга.

Полученные уравнения (2.9) являются уравнениями Бесселя⁸. Решениями уравнений (2.9) являются линейные комбинации модифицированных функций Бесселя первого и второго рода. Однако в силу того что функции Бесселя второго рода не удовлетворяют условиям ограниченности на оси

⁶ Волновое число k может быть, вообще говоря, комплексной величиной. Вполне естественными представляются лишь волны ограниченной (с ростом z) амплитуды. Кроме того, будем считать, что поверхности постоянной фазы волны распространяются вдоль оси волновода в положительном направлении. Поэтому $\text{Re } k > 0$, $\text{Im } k > 0$ при выборе положительного знака в (2.8), и $\text{Re } k < 0$, $\text{Im } k < 0$ при выборе отрицательного знака. Заметим, что в литературе собственно волновым числом называется $\text{Re } k$; величина $\text{Im } k$ обычно называется коэффициентом затухания. С волновым числом k связаны также следующие понятия: $\frac{\omega}{\text{Re } k}$ — фазовая скорость волны; $\frac{1}{\text{Im } k}$ — глубина проникания волны; $4\pi \left| \frac{\text{Im } k}{\text{Re } k} \right|$ — коэффициент потерь.

⁷ Осесимметричная волна характеризуется значением $n = 0$. Ясно, что линейные комбинации окружных гармоник вида (2.8) составляют волну сколь угодно сложного окружного профиля.

⁸ См., например: Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.; Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). М.: Наука, 1968. 344 с.; Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с. В дальнейшем мы будем оперировать с модифицированными функциями Бесселя (или функциями Бесселя мнимого аргумента), которые являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения $\xi^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \xi \frac{dw}{d\xi} - (\xi^2 + \nu^2)w = 0$.

Решение этого уравнения, ограниченное при $\xi \rightarrow 0$, находится в виде степенного ряда $I_\nu(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{\nu + 2k}$ и называется функцией Бесселя первого рода мнимого аргумента.



цилиндра, то для $A_r + A_\varphi$ и $A_r - A_\varphi$, если ввести обозначение $q_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu}$, получаем

$$A_r + A_\varphi = C_3 I_{n-1}(q_2 r), \quad A_r - A_\varphi = C_4 I_{n+1}(q_2 r).$$

Здесь C_3, C_4 — произвольные постоянные. Следовательно, для комплексных амплитуд A_r, A_φ векторного потенциала имеем формулы

$$A_r = C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r), \quad A_\varphi = C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r).$$

Поэтому сами компоненты Ψ_r, Ψ_φ векторного потенциала Ψ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ \Psi_\varphi(r, \varphi, z) &= (C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим третье уравнение системы (2.6) относительно компоненты Ψ_z . Как и ранее, положим

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = A_z(r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}.$$

Тогда для комплексной амплитуды A_z получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 A_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_z}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \right) A_z = 0,$$

решением которого, ограниченным на оси цилиндра, также является модифицированная функция Бесселя первого рода. Поэтому комплексная амплитуда A_z векторного потенциала находится следующим образом: $A_z = C_5 I_n(q_2 r)$, где C_5 — произвольная постоянная⁹.

Следовательно, для физической компоненты Ψ_z векторного потенциала получаем представление

$$\Psi_z(r, \varphi, z) = C_5 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \quad (2.11)$$

Второе и третье уравнения в системе (2.4) содержат лишь скалярный потенциал и комплексную амплитуду приращений температуры и составляют связанную систему:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \alpha \Theta + \omega^2 \rho \Phi &= 0, \\ \nabla^2 \Theta + \omega^2 \frac{\kappa}{\Lambda} \Theta + \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \nabla^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений представим через новую неизвестную функцию Υ в форме

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Upsilon,$$

где a, b есть некоторые постоянные, причем будем считать, что функция Υ также является решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \Upsilon + \gamma^2 \Upsilon = 0 \quad (2.13)$$

с некоторой постоянной γ , имеющей смысл волнового числа гармонической связанной термоупругой волны.

⁹Заметим, что волновое число k есть, вообще говоря, комплексная величина. Если k вещественно и $q_2^2 > 0$, т.е. волновое число k превосходит волновое число чисто упругой сдвиговой волны, то приведенное выражение для A_z наиболее удобно для последующего анализа. Если k вещественно и $-q_2^2 > 0$, то наиболее адекватной формой решения будет $A_z = C_5 J_n(|q_2| r)$.



С учетом этого обстоятельства система (2.12) переписывается в виде

$$\begin{aligned} [\gamma^2(\lambda + 2\mu) - \omega^2\rho] a\Upsilon + \alpha b\Upsilon &= 0, \\ \omega^2\gamma^2\frac{\alpha}{\Lambda}a\Upsilon + \left[\gamma^2 - \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda}\right] b\Upsilon &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно $a\Upsilon$ и $b\Upsilon$, которая будет иметь нетривиальное решение только при условии, что определитель системы (2.14) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \gamma^2(\lambda + 2\mu) - \omega^2\rho & \alpha \\ \omega^2\gamma^2\frac{\alpha}{\Lambda} & \gamma^2 - \omega^2\frac{\kappa}{\Lambda} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.15)$$

Аналогичный определитель получается для нахождения волновых чисел связанной термоупругой плоской гармонической волны. Действительно, плоская гармоническая волна имеет вид (\mathbf{k} — волновой вектор, ω — циклическая частота, \mathbf{A} — вектор поляризации волны) $\theta = B e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, $\mathbf{u} = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$. Подставляя эти выражения в систему (1.2) и учитывая $\nabla = i\mathbf{k}$, $\partial/\partial t = -i\omega$, получаем

$$\begin{aligned} -\mu k^2 \mathbf{A} + (\lambda + \mu)(i\mathbf{k})(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) - \alpha(i\mathbf{k})B + \rho\omega^2 \mathbf{A} &= \mathbf{0}, \\ (-k^2 + \kappa\Lambda^{-1}\omega^2)B + \alpha\omega^2\Lambda^{-1}(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь k есть волновое число (модуль волнового вектора \mathbf{k}).

Умножив обе части первого из уравнений полученной системы скалярно на волновой вектор \mathbf{k} , приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2)(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + \alpha k^2 B &= 0, \\ \alpha\omega^2\Lambda^{-1}(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + (-k^2 + \kappa\Lambda^{-1}\omega^2)B &= 0, \end{aligned}$$

нетривиальная разрешимость которой требует того, чтобы

$$\begin{vmatrix} \rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2 & \alpha k^2 \\ \alpha\omega^2\Lambda^{-1} & \kappa\Lambda^{-1}\omega^2 - k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Таким образом, получаем биквадратное уравнение относительно неизвестного параметра γ

$$(\lambda + 2\mu)\gamma^4 - \omega^2 \left(\rho + \frac{\kappa}{\Lambda}(\lambda + 2\mu) + \frac{\alpha^2}{\Lambda} \right) \gamma^2 + \omega^4 \rho \frac{\kappa}{\Lambda} = 0,$$

корни которого (квадраты волновых чисел связанной термоупругой волны) находятся по формуле

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{\rho + \frac{\kappa}{\Lambda}(\lambda + 2\mu) + \frac{\alpha^2}{\Lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\Lambda}(\lambda + 2\mu) + \frac{\alpha^2}{\Lambda} - \rho\right)^2 + 4\rho\frac{\alpha^2}{\Lambda}}}{2(\lambda + 2\mu)} \omega^2. \quad (2.17)$$

Далее удобно ввести стандартные фазовые скорости упругих и термических волн, а также характерные безразмерные отношения: $l^{-2} = \kappa/\Lambda$, где l — имеет размерность скорости и является скоростью распространения собственно термической волны; $s^2 = \alpha^2/(\rho\Lambda)$ — безразмерная константа; $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ — скорость распространения чисто упругой продольной волны; $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения чисто упругой поперечной волны.

В дальнейшем изложении мы будем часто обращаться к безразмерным величинам s , $\delta_l = c_l/l$, $\delta = c_l/c_t \geq \sqrt{2}$.

Помимо указанных безразмерных отношений, в термоупругости используется еще одно характерное безразмерное отношение $s^2 l^2 / c_t^2$, которое часто называют постоянной термоупругой связанности. Традиционно считается, что она весьма мала.



Тогда квадраты волновых чисел связанной термоупругой волны $\gamma_{1,2}^2$ вычисляются по формуле

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1 + l^{-2}c_l^2 + s^2 \pm \sqrt{(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2}}{2c_l^2} \omega^2. \quad (2.18)$$

Здесь выражение справа, как нетрудно показать, строго положительно независимо от выбора знака. Следовательно, связанной термоупругой волне соответствуют ровно два вещественных волновых числа $\gamma_{1,2}$, что, собственно, предопределено гиперболичностью системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.2).

Волновым числам $\gamma_{1,2}$ соответствуют фазовые скорости распространения связанных термоупругих волн $c_{1,2}$, для которых находим (положительный знак соответствует индексу 1)

$$c_{1,2}^2 = \frac{c_l^2}{\frac{1}{2} \left(1 + l^{-2}c_l^2 + s^2 \pm \sqrt{(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2} \right)}. \quad (2.19)$$

Заметим, что нормальные скорости (1.5) распространения слабых разрывов перемещений и температурных смещений связаны с фазовыми скоростями $c_{1,2}$ соотношениями $G_1^2 = c_2^2$, $G_2^2 = c_1^2$, поскольку в силу $(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2 = (l^{-2}c_l^2 + s^2 + 1)^2 - 4l^{-2}c_l^2$ имеем

$$c_{2,1}^2 = l^2 \frac{1 + l^{-2}c_l^2 + s^2 \pm \sqrt{(l^{-2}c_l^2 + s^2 - 1)^2 + 4s^2}}{2}. \quad (2.20)$$

Здесь положительный знак соответствует индексу 2.

Заметим также, что на основании уравнения (2.16) можно заключить следующее: величины $c_{1,2}$ являются фазовыми скоростями связанных термоупругих плоских гармонических волн.

На рис. 1, 2 представлены полученные численно зависимости отношений квадратов фазовых скоростей $c_{1,2}^2/c_l^2$ от безразмерных параметров c_l/l и s .

Ясно, что имеется еще два характерных безразмерных отношения

$$\delta_1 = \frac{c_l}{c_1}, \quad \delta_2 = \frac{c_l}{c_2}.$$

С учетом (2.19) выражение (2.17) для волновых чисел связанной термоупругой волны примет вид $\gamma_{1,2}^2 = \omega^2/c_{1,2}^2$.

Для сокращения записи формул введем следующие обозначения: $g^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{l^2}$, $p_j^2 = k^2 - \gamma_j^2$ ($j = 1, 2$).

Из однородной системы линейных уравнений (2.14) относительно постоянных a, b для каждого из двух возможных значений волнового числа γ находим

$$a_j = b_j \frac{p_j^2 - g^2}{\omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_j^2} \quad (j = 1, 2)$$

или, не ограничивая общности,

$$a_j = p_j^2 - g^2, \quad b_j = \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_j^2 \quad (j = 1, 2).$$

В итоге связанные поля Φ и Θ определяются как линейные комбинации

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Upsilon|_{\gamma=\gamma_1} + C_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Upsilon|_{\gamma=\gamma_2}, \quad (2.21)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

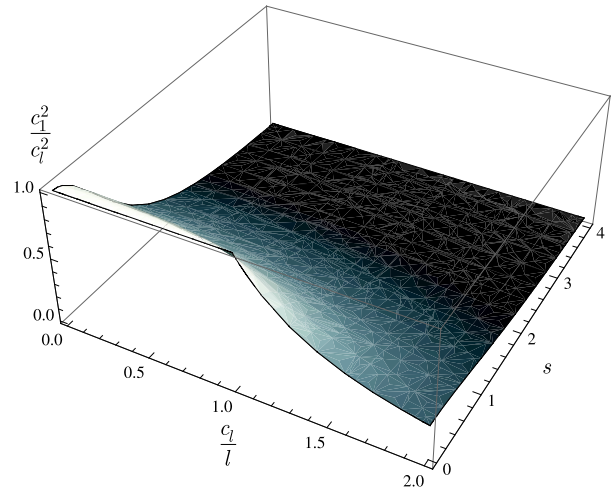


Рис. 1. Зависимость отношения квадрата фазовой скорости распространения связанной термоупругой волны c_1^2 к квадрату скорости упругой продольной волны c_l^2 от безразмерных параметров c_l/l и s



Для нахождения функции Υ необходимо разделить переменные в уравнении Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Upsilon}{\partial r} + \gamma_j^2 \Upsilon = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (2.22)$$

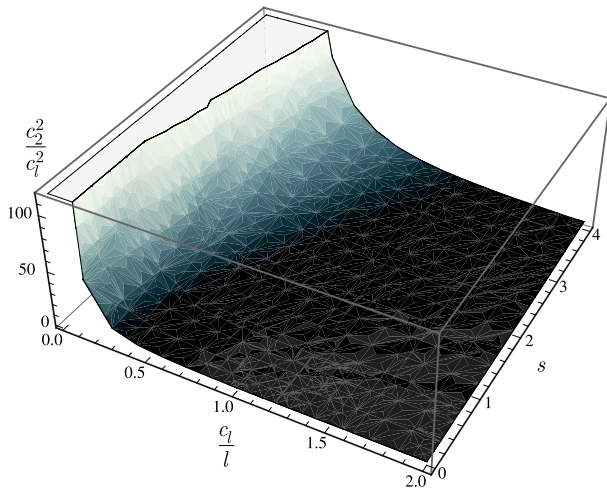


Рис. 2. Зависимость отношения квадрата фазовой скорости распространения связанной термоупругой волны c_2^2 к квадрату скорости упругой продольной волны c_1^2 от безразмерных параметров c_1/l и s

Для этого его решения будем разыскивать, отделяя все три пространственных координаты, в форме

$$\Upsilon = F(r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \quad (2.23)$$

При подстановке формулы (3.2) в (3.1), обозначая штрихом дифференцирование по переменной r , снова получаем уравнение Бесселя для определения комплексной амплитуды F

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 - \gamma_j^2 \right) F(r) = 0. \quad (2.24)$$

Поэтому функция Υ , определяющая форму скалярного потенциала перемещений и температуры, находится в виде

$$\Upsilon|_{\gamma=\gamma_j} = I_n(p_j r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} \quad (j = 1, 2). \quad (2.25)$$

Следовательно, необходимые нам решения связанной системы (2.12) будут представляться формулой

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Theta \end{pmatrix} = \left[C_1 \begin{pmatrix} p_1^2 - g^2 \\ \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_1^2 \end{pmatrix} I_n(p_1 r) + C_2 \begin{pmatrix} p_2^2 - g^2 \\ \omega^2 \frac{\alpha}{\Lambda} \gamma_2^2 \end{pmatrix} I_n(p_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \quad (2.26)$$

В итоге мы нашли решение уравнений связанной гиперболической термоупругости, содержащее пять произвольных постоянных C_j ($j = \overline{1,5}$). Как мы увидим далее, за счет выбора этих произвольных постоянных можно добиться того, чтобы построенное решение удовлетворяло всем граничным условиям на боковой поверхности волновода.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ (МОДЕЛЬ GNI)

Решение термоупругой задачи подразумевает определение перемещений, деформаций и напряжений. С этой целью мы привлечем стандартные уравнения Коши для деформаций (ϵ — тензор малых деформаций)

$$2\epsilon = \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T \quad (3.1)$$

и определяющие уравнения линейного изотропного термоупругого тела (уравнения Дюгамеля – Неймана)

$$\sigma = 2\mu\epsilon + (\lambda \text{tr}\epsilon - \alpha\theta)\mathbf{I}, \quad (3.2)$$

где σ — тензор напряжений Коши, \mathbf{I} — единичный тензор.

Приведем необходимые формулы для расчета перемещений, деформаций и напряжений в термоупругом теле, используя цилиндрическую систему координат,

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ 2\epsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, & 2\epsilon_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, & 2\epsilon_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}; \end{aligned} \quad (3.3)$$



$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - \alpha\theta, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) - \alpha\theta, & \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \alpha\theta, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right), & \sigma_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), & \sigma_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right); \\ \varepsilon &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Приведем также выражения для физических компонент перемещений через скалярный и векторный потенциалы, опуская при этом гармоническую экспоненту,

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial z}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Psi_\varphi}{r} + \frac{\partial \Psi_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial \varphi}. \quad (3.5)$$

При проведении преобразований нам потребуются также следующие рекуррентные соотношения между модифицированными функциями Бесселя:

$$\xi I_{\nu-1}(\xi) - \xi I_{\nu+1}(\xi) = 2\nu I_\nu(\xi), \quad I_{\nu-1}(\xi) + I_{\nu+1}(\xi) = 2 \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi)$$

и, кроме того, формулы дифференцирования модифицированных функций Бесселя:

$$\xi \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi) + \nu I_\nu(\xi) = \xi I_{\nu-1}(\xi), \quad \xi \frac{d}{d\xi} I_\nu(\xi) - \nu I_\nu(\xi) = \xi I_{\nu+1}(\xi).$$

С их помощью можно найти производные

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} I_n(p\xi) &= p I_{n+1}(p\xi) + \frac{n}{\xi} I_n(p\xi), & \frac{d}{d\xi} I_n(q\xi) &= q I_n(q\xi) + \frac{n-1}{\xi} I_{n-1}(q\xi), \\ \frac{d}{d\xi} I_{n+1}(q\xi) &= q I_n(q\xi) - \frac{n+1}{\xi} I_{n+1}(q\xi), \end{aligned}$$

участвующие в последующих преобразованиях.

Вычислим сначала физические компоненты ротора векторного потенциала $\nabla \times \Psi$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \Psi)_r &= \left[\frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) + (\mp ik)(C_3 I_{n-1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r)) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \times \Psi)_\varphi &= \left[(\pm ik)(C_3 I_{n-1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r)) + C_5 \frac{dI_n(q_2 r)}{dr} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \times \Psi)_z &= (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \end{aligned}$$

Физические компоненты градиента скалярного потенциала $\nabla \Phi$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\nabla \Phi)_r &= \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \frac{dI_n(p_1 r)}{dr} + C_2 (p_2^2 - g^2) \frac{dI_n(p_2 r)}{dr} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \Phi)_\varphi &= -\frac{n}{r} \left[C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \\ (\nabla \Phi)_z &= \pm ik \left[C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}. \end{aligned}$$

С учетом (2.26), (2.10), (2.11) для форм гармонических связанных термоупругих волн получаем следующие комплексные представления:

$$\begin{aligned} U &= \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + C_2 (p_2^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) \right] + \\ &+ \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) + (\mp ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \end{aligned}$$



$$V = \left[(\pm ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - C_5 \left(\frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right. \\ \left. - \frac{n}{r} \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}, \quad (3.6)$$

$$W = \left[\pm (ik) \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz}.$$

Подсчитывая частные производные от физических компонент перемещений и температуры по пространственным координатам, находим

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_1^2 r^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \\ \left. + C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_2^2 r^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \mp \right. \\ \left. \mp (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm (ik) C_4 \left\{ q_2 I_n(q_2 r) - \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} + \right. \\ \left. + C_5 \left\{ \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(q_2 r) + \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ -\frac{n^2}{r} I_n(p_1 r) - n p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} + C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ -\frac{n^2}{r} I_n(p_2 r) - n p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \right. \\ \left. \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2}{q_2 r} I_n(q_2 r) + n I_{n+1}(q_2 r) \right\} \mp (ik) C_4 n I_{n+1}(q_2 r) - C_5 \frac{n^2}{r} I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \left[\pm (ik) C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} \pm (ik) C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} + \right. \\ \left. + k^2 C_3 \left\{ \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + I_{n+1}(q_2 r) \right\} - k^2 C_4 I_{n+1}(q_2 r) \pm (ik) C_5 \frac{n}{r} I_n(q_2 r) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{n p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \\ \left. + C_2 (p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{n p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \right. \\ \left. \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm (ik) C_4 \left\{ q_2 I_n(q_2 r) - \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} - \right. \\ \left. - C_5 \left\{ \frac{n^2 - n + q_2^2 r^2}{r^2} I_n(q_2 r) - \frac{q_2}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \left[-C_1 \frac{n^2}{r} (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) - C_2 \frac{n^2}{r} (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2}{q_2 r} I_n(q_2 r) + n I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm \right. \\ \left. \pm (ik) C_4 n I_{n+1}(q_2 r) - C_5 \left\{ \frac{n^2}{r} I_n(q_2 r) + n q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} = \left[\mp (ik) C_1 \frac{n}{r} (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) \mp (ik) C_2 \frac{n}{r} (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) - k^2 C_3 \left\{ \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + I_{n+1}(q_2 r) \right\} - \right. \\ \left. - k^2 C_4 I_{n+1}(q_2 r) \mp (ik) C_5 \left\{ \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$



$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \left[\pm(ik)C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right\} \pm (ik)C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right\} + \right. \\ \left. + (C_3 - C_4)q_2 \left\{ \frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = [\mp(ik)(C_1(p_1^2 - g^2)nI_n(p_1 r) + C_2(p_2^2 - g^2)nI_n(p_2 r)) - \\ - (C_3 - C_4)nq_2 I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = [-k^2 C_1(p_1^2 - g^2)I_n(p_1 r) - k^2 C_2(p_2^2 - g^2)I_n(p_2 r) \pm \\ \pm(ik)(C_3 - C_4)q_2 I_n(q_2 r)] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = \omega^2 \frac{s^2 \rho}{\alpha} \left[C_1(k^2 - p_1^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + \right. \\ \left. + C_2(k^2 - p_2^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}.$$

Затем на основании формул Коши и определяющих уравнений термоупругости могут быть получены выражения для деформаций и напряжений. Мы выпишем лишь три компоненты тензора напряжений, которые существенны для дальнейшего изложения:

$$\sigma_{rz} = \mu e^{\pm ikz} \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} \left[\pm(2ik)C_1(p_1^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) \pm \right. \\ \pm(2ik)C_2(p_2^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + C_3 \left(\frac{q_2 n}{r} + \frac{2nk^2}{q_2 r} \right) I_n(q_2 r) + \\ \left. + C_3(k^2 + q_2^2)I_{n+1}(q_2 r) - C_4 \frac{nq_2}{r} I_n(q_2 r) - C_4(k^2 + q_2^2)I_{n+1}(q_2 r) \pm (ik) \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) \right], \\ \sigma_{r\varphi} = \mu e^{\pm ikz} \begin{Bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{Bmatrix} \left[2C_1(p_1^2 - g^2) \left(\frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{n}{r} p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + \right. \\ \left. + 2C_2(p_2^2 - g^2) \left(\frac{n - n^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{n}{r} p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) \pm \right. \\ \left. \pm(ik)C_3 \left(\frac{4n^2 - 4n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{2(n-1)}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right) \pm \right. \\ \left. \pm(ik)C_4 \left(q_2 I_n(q_2 r) - \frac{2(n+1)}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right) + C_5 \left(\frac{2n - 2n^2 - q_2^2 r^2}{r^2} I_n(q_2 r) + \frac{2q_2}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right) \right], \\ \sigma_{rr} = \left[(\lambda + 2\mu) \left(C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_1^2 r^2}{r^2} I_n(p_1 r) - \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n^2 - n + p_2^2 r^2}{r^2} I_n(p_2 r) - \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \mp \right. \\ \left. \mp(ik)C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n-1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \mp \right. \\ \left. \mp(ik)C_4 \left\{ -q_2 I_n(q_2 r) + \frac{n+1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} + C_5 \left\{ \frac{n^2 - n}{r^2} I_n(q_2 r) + \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \right) + \\ \left. + \lambda \left(C_1(p_1^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2 - k^2 r^2}{r^2} I_n(p_1 r) + \frac{p_1}{r} I_{n+1}(p_1 r) \right\} + \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
 & + C_2(p_2^2 - g^2) \left\{ \frac{n - n^2 - k^2 r^2}{r^2} I_n(p_2 r) + \frac{p_2}{r} I_{n+1}(p_2 r) \right\} \pm \\
 & \pm (ik) C_3 \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2 r^2}{q_2 r^2} I_n(q_2 r) + \frac{n - 1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} \pm (ik) C_4 \left\{ -q_2 I_n(q_2 r) + \frac{n + 1}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} + \\
 & + C_5 \left\{ \frac{n - n^2}{r^2} I_n(q_2 r) - \frac{q_2 n}{r} I_{n+1}(q_2 r) \right\} - C_1 \rho \omega^2 s^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) - \\
 & - C_2 \rho \omega^2 s^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r) \left[\begin{matrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{matrix} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}.
 \end{aligned}$$

Постоянные C_j и волновое число k , входящие в выражения для форм гармонических волн, должны подбираться так, чтобы удовлетворялись следующие граничные условия на боковой поверхности цилиндра:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \tag{3.7}$$

Последнее из них выражает отсутствие теплового потока во внутрь и во внешность цилиндрического волновода. В рамках проводимого исследования можно заменить это граничное условие на более общее, соответствующее случаю, когда на боковой поверхности волновода происходит теплообмен с окружающей средой. Полагая, что отдаваемое через боковую поверхность (или получаемое) волноводом тепло пропорционально разности температур между поверхностью волновода и окружающей средой, граничное условие формулируется следующим образом:

$$\Lambda \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=R} + h \theta|_{r=R} = 0,$$

где h — коэффициент скорости теплообмена.

Заметим также, что на основании (2.10), (2.11) уравнение (2.2), выражающее условие калибровки векторного потенциала, позволяет заключить, что должно выполняться соотношение

$$(C_3 + C_4)q_2 \pm (ik)C_5 = 0. \tag{3.8}$$

Это важное соотношение устраняет, в чем мы убедимся позднее, избыточность произвольных постоянных в той форме решения, которое было построено ранее методом разделения переменных.

4. ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СВЯЗАННЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В СВОБОДНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим случай осевой симметрии, полагая окружной профиль волны совпадающим с нулевой гармоникой, т.е. положим $n = 0$ во всех предшествующих формулах. Компоненты Ψ_r, Ψ_z векторного потенциала обращаются в нуль. В формулах (2.10) модифицированные функции Бесселя при $n = 0$ становятся линейно зависимыми. Поэтому мы примем, что $C_3 + C_4 = 0$ и $C_5 = 0$, а разность $C_3 - C_4$ будет играть роль независимой произвольной постоянной.

Ясно, что в условиях осевой симметрии $V = 0$, а оставшиеся выражения для форм (3.6) существенно упрощаются

$$U = [C_1 (p_1^2 - g^2) p_1 I_1(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) p_2 I_1(p_2 r) \mp (ik)(C_3 - C_4) I_1(q_2 r)] e^{\pm ikz},$$

$$W = [\pm(ik) \{C_1 (p_1^2 - g^2) I_0(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_0(p_2 r)\} + (C_3 - C_4)q_2 I_0(q_2 r)] e^{\pm ikz}.$$

Условие (3.8) в случае осевой симметрии удовлетворено. Граничное условие для компоненты $\sigma_{r\varphi}|_{r=R} = 0$ тензора напряжений заведомо удовлетворяется. Остальные граничные условия из (3.7)



дают с учетом найденных в предыдущем разделе работы выражений для компонент тензора напряжений три соотношения

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \left[C_1(p_1^2 - g^2)p_1 \left(\frac{1}{R}I_1(p_1R) + p_1I_2(p_1R) \right) + \right. \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 \left(\frac{1}{R}I_1(p_2R) + p_2I_2(p_2R) \right) \mp ik(C_3 - C_4) \left(\frac{1}{R}I_1(q_2R) + q_2I_2(q_2R) \right) \left. \right] + \\
 & + \frac{\lambda}{R} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2R)] + \\
 & + \lambda[-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2R)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2R)] - \\
 & - C_1\rho\omega^2 s^2(k^2 - p_1^2)I_0(p_1R) - C_2\rho\omega^2 s^2(k^2 - p_2^2)I_0(p_2R) = 0, \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

$$\pm 2ik \{C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R)\} + (k^2 + q_2^2)(C_3 - C_4)I_1(q_2R) = 0, \tag{4.2}$$

$$C_1(k^2 - p_1^2)p_1I_1(p_1R) + C_2(k^2 - p_2^2)p_2I_1(p_2R) = 0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.1) разделим на $\rho\omega^2$ и, учитывая

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho\omega^2} = \frac{1}{k^2 - q_1^2}, \quad \frac{\lambda}{\rho\omega^2} = \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)},$$

где $q_1^2 = k^2 - \omega^2/c_l^2$, после ряда преобразований приходим к

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k^2 - q_1^2} \left[C_1(p_1^2 - g^2)p_1 \left(\frac{1}{R}I_1(p_1R) + p_1I_2(p_1R) \right) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 \left(\frac{1}{R}I_1(p_2R) + p_2I_2(p_2R) \right) \mp \right. \\
 & \mp ik(C_3 - C_4) \left(\frac{1}{R}I_1(q_2R) + q_2I_2(q_2R) \right) \left. \right] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)R} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1R) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2R) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2R)] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1R) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2R)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2R)] - C_1s^2(k^2 - p_1^2)I_0(p_1R) - \\
 & - C_2s^2(k^2 - p_2^2)I_0(p_2R) = 0. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Обезразмерим уравнения, образующие систему (4.1)–(4.3), вводя следующие обозначения для безразмерных аналогов размерных величин:

$$\begin{aligned}
 \tilde{k} &= Rk, & \tilde{g} &= Rg, & \tilde{p}_1 &= Rp_1, & \tilde{p}_2 &= Rp_2, & \tilde{q}_1 &= Rq_1, & \tilde{q}_2 &= Rq_2, \\
 \tilde{C}_1 &= R^{-4}C_1, & \tilde{C}_2 &= R^{-4}C_2, & \tilde{C}_j &= R^{-2}C_j & (j &= 3, 4, 5).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

В дальнейших выкладках, для более компактной записи соотношений будем опускать знак волны над безразмерными величинами (4.5). С учетом этого замечания система (4.1)–(4.3) в безразмерной форме будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k^2 - q_1^2} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1 (I_1(p_1) + p_1I_2(p_1)) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 (I_1(p_2) + p_2I_2(p_2)) \mp \\
 & \mp ik(C_3 - C_4) (I_1(q_2) + q_2I_2(q_2))] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2) \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2)] + \frac{2q_1^2 - q_2^2 - k^2}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} [-k^2 \{C_1(p_1^2 - g^2)I_0(p_1) + \\
 & + C_2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2)\} \pm ik(C_3 - C_4)q_2I_0(q_2)] - C_1s^2(k^2 - p_1^2)I_0(p_1) - C_2s^2(k^2 - p_2^2)I_0(p_2) = 0, \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

$$\pm 2ik \{C_1(p_1^2 - g^2)p_1I_1(p_1) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2I_1(p_2)\} + (k^2 + q_2^2)(C_3 - C_4)I_1(q_2) = 0,$$

$$C_1(k^2 - p_1^2)p_1I_1(p_1) + C_2(k^2 - p_2^2)p_2I_1(p_2) = 0.$$



Приведенная система трех линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $C_1, C_2, C_3 - C_4$ имеет нетривиальное решение, только если ее определитель равен нулю. Таким образом, получается частотное уравнение (дисперсионное соотношение) для связанных термоупругих волн, распространяющихся в свободном теплоизолированном цилиндрическом волноводе, из которого можно определить зависимость волнового числа k от частоты ω . Ясно, что в рассматриваемом случае частотное уравнение является чрезвычайно сложным и даже его качественное исследование представляется весьма трудоемким.

Так как $I_1(\xi) = 0$ при $\xi = 0$, то система (4.6) имеет нетривиальные решения вида $C_3 - C_4 = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$, если $q_2 = 0$ (волновое число равно волновому числу чисто упругой поперечной волны). В этом случае $\theta = 0$ и, следовательно, этот корень частотного уравнения не представляет никакого интереса, поскольку волновое число $k = \frac{\omega}{c_t}$ не соответствует никакой распространяющейся термической волне. Поэтому мы выразим из второго уравнения системы (4.6) разность $C_3 - C_4$

$$C_3 - C_4 = \mp \frac{2ik}{(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} (C_1(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + C_2(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2)) \quad (4.7)$$

и подставим результат в первое уравнение. В итоге приходим к системе двух линейных однородных уравнений относительно постоянных C_1, C_2 . Определитель полученной системы имеет следующие элементы:

$$\begin{aligned} D_{11} = & (k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1(p_1 I_0(p_1) - I_1(p_1)) - \frac{2k^2(I(q_2) - 1)}{k^2 + q_2^2} (k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) + \\ & + (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)(p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)}{k^2 + q_2^2} (p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \\ & - (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)k^2(p_1^2 - g^2)I_0(p_1) + \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)I(q_2)}{k^2 + q_2^2} (p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1) - \\ & - s^2(k^2 - p_1^2)(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)I_0(p_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{12} = & (k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2(p_2 I_0(p_2) - I_1(p_2)) - \frac{2k^2(I(q_2) - 1)}{k^2 + q_2^2} (k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) + \\ & + (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)(p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) - \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)}{k^2 + q_2^2} (p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) - \\ & - (2q_1^2 - k^2 - q_2^2)k^2(p_2^2 - g^2)I_0(p_2) + \frac{2k^2(2q_1^2 - k^2 - q_2^2)I(q_2)}{k^2 + q_2^2} (p_2^2 - g^2)p_2 I_1(p_2) - \\ & - s^2(k^2 - p_2^2)(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)I_0(p_2), \end{aligned}$$

$$D_{21} = (k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1), \quad D_{22} = (k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2).$$

Здесь вводится новое обозначение

$$I(\xi) = \frac{\xi I_0(\xi)}{I_1(\xi)} = 2 + \frac{\xi^2}{2^2} - \frac{\xi^4}{2^5 \cdot 3} + \frac{\xi^6}{2^9 \cdot 3} - \frac{\xi^8}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{13\xi^{10}}{2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5} - \dots$$

Частотное уравнение $D(k, \omega) = D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} = 0$ было проанализировано численно с помощью системы символьных вычислений Mathematica 6.0. Сначала задавались безразмерные параметры s, δ, δ_l (в дальнейшем мы принимаем следующие значения: $s = 0.01, \delta = c_l/c_t = 1.9, \delta_l = 1.2$), затем для различных значений безразмерного отношения $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l}$ осуществлялся поиск корней частотного уравнения и определялись безразмерные величины $\tilde{k} = kR$. Численный анализ проводился лишь для гармонического множителя e^{+ikz} . Поэтому физический смысл будут иметь лишь такие корни частотного уравнения, для которых $\text{Im } k > 0$. Если ограничиваться волнами, фазовые поверхности которых распространяются в положительном направлении вдоль оси цилиндра, то приходится полагать, что $\text{Re } k > 0$.



Для заданной частоты всегда имеется счетное число волновых чисел. Поскольку все элементы определителя D удовлетворяют условиям (черта сверху обозначает комплексное сопряжение)

$$D_{jl}(k, \omega) = D_{jl}(-k, \omega), \quad \overline{D_{jl}(k, \omega)} = D_{jl}(\bar{k}, \omega),$$

то этим условиям будет удовлетворять и сам определитель, т.е. $D(k, \omega) = D(-k, \omega)$, $\overline{D(k, \omega)} = D(\bar{k}, \omega)$.

Поэтому корни частотного уравнения $D(k, \omega) = 0$ находятся парами $k, -k$ (если они вещественные или чисто мнимые) и четверками $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ (если они обладают и вещественной, и мнимой частью, отличными от нуля). Результаты численного анализа сведены в табл. 1 (в ней указаны лишь несколько наиболее близко расположенных к нулю ($\text{Re } k = 0, \text{Im } k = 0$) волновых чисел). Кроме того, из четверки корней $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ мы приводим лишь пару $k, -k$.

Таблица 1

Частоты $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.1$	$-0.117472, 0.117472$ $-1.63769 - 6.05966i, 1.63769 + 6.05966i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.2$	$0.235177, -0.235177$ $-1.63819 - 6.05393i, 1.63819 + 6.05393i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.3$	$-0.360084, 0.360084$ $-1.63902 - 6.04437i, 1.63902 + 6.04437i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.4$	$-0.47231, 0.47231$ $-1.64015 - 6.03096i, 1.64015 + 6.03096i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.5$	$-0.600175, 0.600175$ $-1.64156 - 6.01367i, 1.64156 + 6.01367i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.6$	$-0.713849, 0.713849$ $-1.83157 - 9.22297i, 1.83157 + 9.22297i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.7$	$-0.837132, 0.837132, -0.840674, 0.840674$ $-1.38012 - 2.48891i, 1.38012 + 2.48891i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.8$	$-0.964707, 0.964707$ $-1.38413 - 2.41191i, 1.38413 + 2.41191i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 0.9$	$-1.07991, 1.07991, -1.83529 - 9.16659i$ $1.83529 + 9.16659i, -1.3874 - 2.32184i, 1.3874 + 2.32184i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$	$-1.2, 1.2, -10.1024i, 10.1024i$ $-1.83669 - 9.14266i, 1.83669 + 9.14266i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$	$-1.67103, 1.67103, -0.168746, 0.168746$ $-2.98688i, 2.98688i, -19.4685i, 19.4685i$
$\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$	$-2.02041, 2.02041, -3.29846, 3.29846$ $-3.60043, 3.60043, -6.00311, 6.00311$ $-1.31193i, 1.31193i, -6.02141i, 6.02141i$ $-1.38711 + 3.96229i, 1.38711 - 3.96229i$

С каждым волновым числом связано волновое решение связанной системы дифференциальных уравнений движения и теплопроводности, которое определяет бегущую (k вещественно) вдоль оси волновода или нераспространяющуюся (стоячую) экспоненциально спадающую (k чисто мнимое) волну. Внимательное изучение численных результатов свидетельствует о том, что для каждой сравнительно высокой частоты всегда имеется, по меньшей мере, одно вещественное волновое число, что указывает на возможность передачи по цилиндрическому волноводу термоупругого сигнала, амплитуда которого зависит лишь от расстояния до оси волновода, т.е. не изменяется вдоль направления



распространения сигнала, и, по меньшей мере, одно чисто мнимое волновое число, которому соответствует стоячая связанная термоупругая волна.

На рис. 3–11 даны графики (в форме поверхностей) величины $|D|$ в зависимости от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$, а также кривые пересечения указанных поверхностей с плоскостями $\text{Im } k = 0$ и $\text{Re } k = 0$.

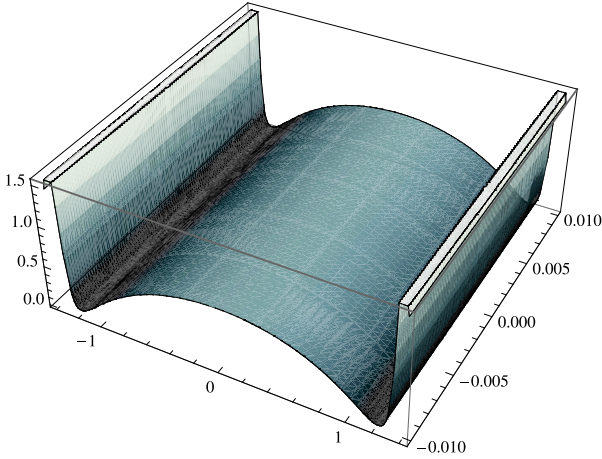


Рис. 3. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

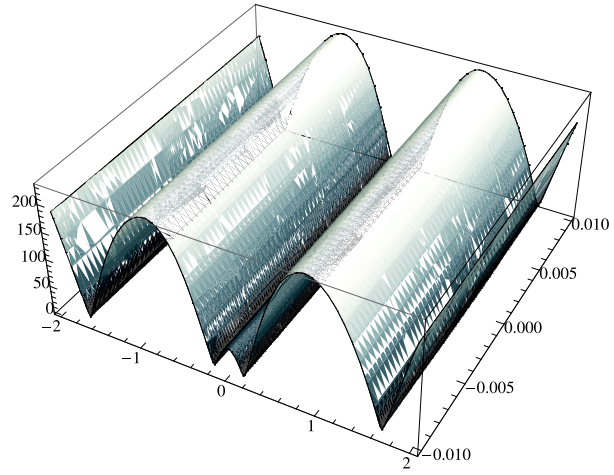


Рис. 4. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

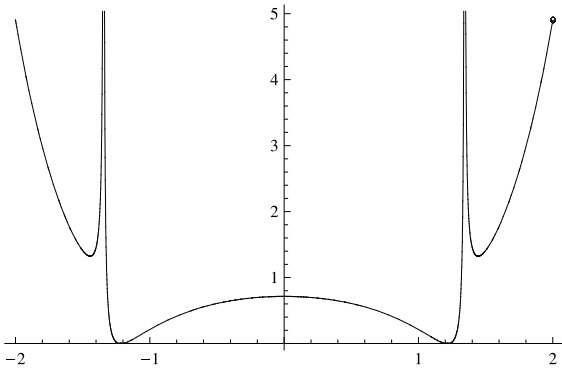


Рис. 5. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

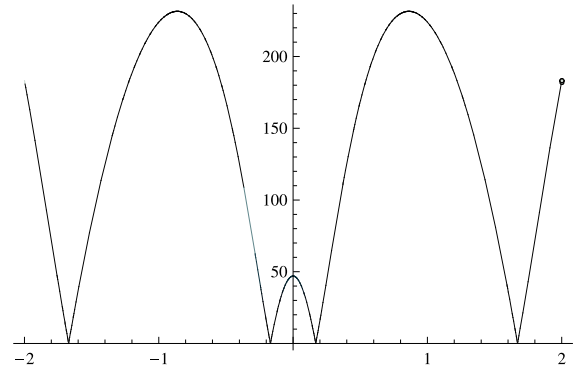


Рис. 6. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

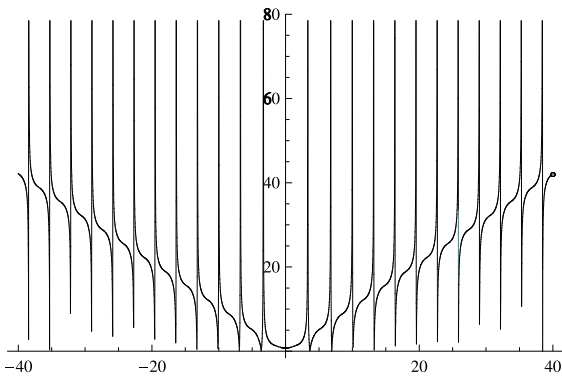


Рис. 7. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

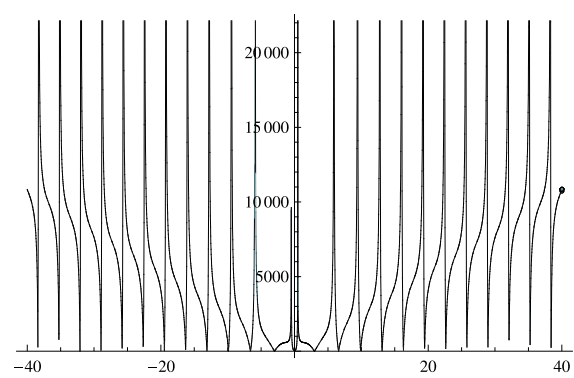


Рис. 8. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

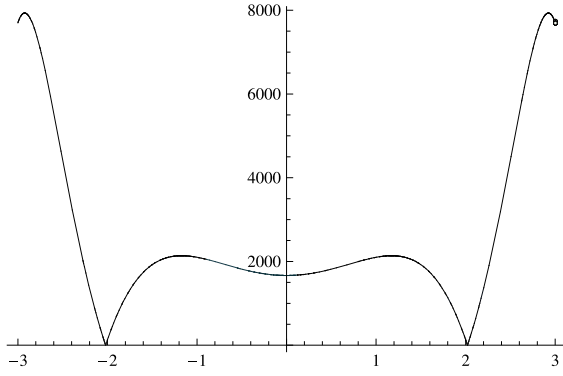


Рис. 9. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

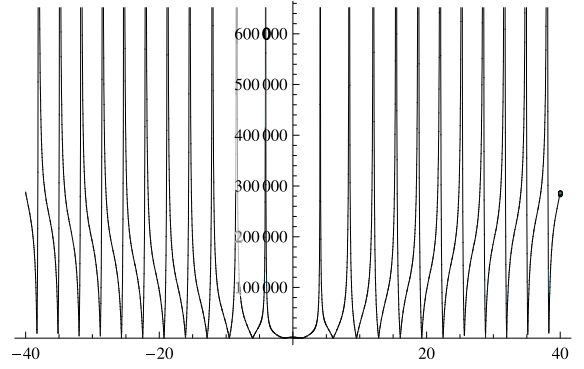


Рис. 10. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

Перейдем далее к вычислению перемещений и температуры в осесимметричной волне. Так как после исключения разности $C_3 - C_4$ постоянные C_1, C_2 удовлетворяют системе двух линейных однородных уравнений с нулевым определителем, то можно выразить C_2 через $C = C_1$ из наиболее простого третьего уравнения системы (4.6)

$$C_2 = -\frac{(k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2)} C,$$

а затем с помощью (4.7) найти разность $C_3 - C_4$ в виде

$$C_3 - C_4 = \mp \frac{2ikCp_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} \times \\ \times ((k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)).$$

После этого можно вычислить перемещения и температуру в осесимметричной волне. Вводя следующие безразмерные отношения

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad \tilde{u}_r = \frac{u_r}{R}, \quad \tilde{u}_z = \frac{u_z}{R}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\rho \omega^2 s^2 \alpha^{-1}}$$

и опуская знак волны над безразмерными величинами, получим

$$u_r = C e^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left((p_1^2 - g^2)p_1 I_1(p_1 r) - \frac{(k^2 - p_1^2)(p_1^2 - g^2)I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)I_1(p_2)} p_1 I_1(p_2 r) - \right. \\ \left. - \frac{2k^2 p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} ((k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)) I_1(q_2 r) \right), \\ u_z = C e^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left((\pm ik)(p_1^2 - g^2)I_0(p_1 r) - (\pm ik) \frac{(k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)p_1 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)p_2 I_1(p_2)} I_0(p_2 r) \mp \right. \\ \left. \mp \frac{2ikp_1 q_2 I_1(p_1)}{(k^2 - p_2^2)(k^2 + q_2^2)I_1(q_2)} ((k^2 - p_2^2)(p_1^2 - g^2) - (k^2 - p_1^2)(p_2^2 - g^2)) I_0(q_2 r) \right), \\ \theta = C e^{\pm ikz} e^{-i\omega t} \left((k^2 - p_1^2)I_0(p_1 r) - \frac{(k^2 - p_1^2)p_1 I_1(p_1)}{p_2 I_1(p_2)} I_0(p_2 r) \right).$$

Подчеркнем еще раз, что в этих формулах все величины не имеют физической размерности. Опуская затем множитель $C e^{-i\omega t}$, получаем безразмерные формы радиального и осевого перемещений и

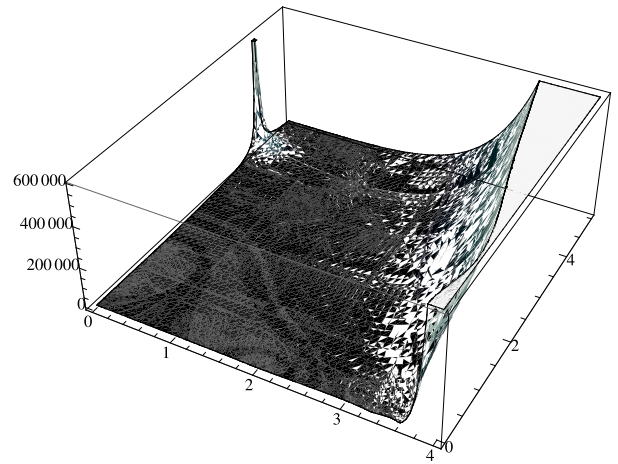


Рис. 11. Величина $|D(k, \omega)|$ как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$



температуры. На рис. 12, 13 изображены типичные профили *форм* перемещений на центральной оси и в центральном сечении цилиндра для одной из бегущих осесимметричных волн с вещественным волновым числом k .

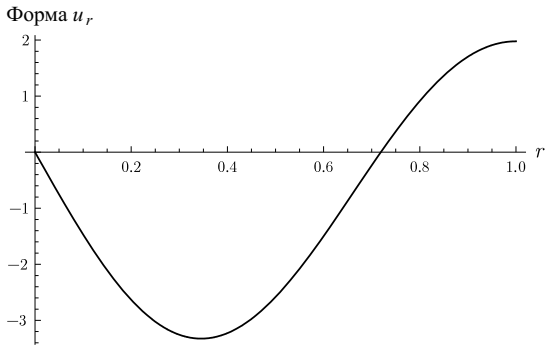


Рис. 12. Профиль формы бегущей осесимметричной волны радиального перемещения u_r в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

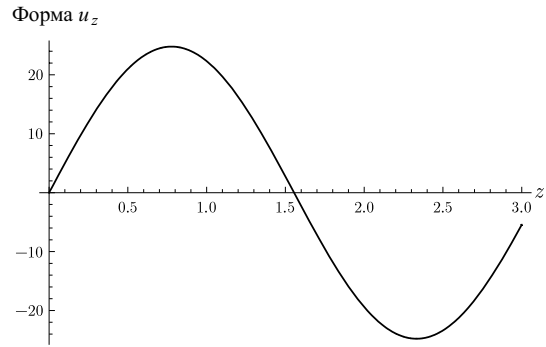


Рис. 13. Профиль формы бегущей осесимметричной волны вертикального перемещения u_z на оси $r = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

Соответствующие формы для температуры приводятся на рис. 14, 15. Как явствует из рис. 14 поверхность волновода будет в наибольшей степени разогреваться и охлаждаться при прохождении осесимметричной связанной термоупругой волны.

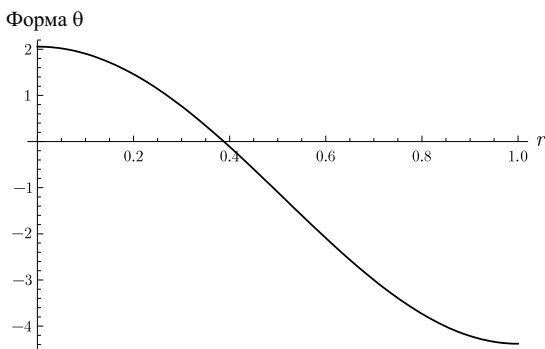


Рис. 14. Профиль формы бегущей осесимметричной температурной волны в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

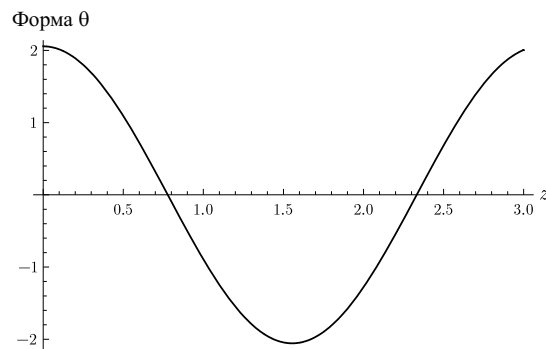


Рис. 15. Профиль формы бегущей осесимметричной температурной волны на оси $r = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 2.02041$

5. ЧАСТОТНОЕ УРАВНЕНИЕ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОКРУЖНЫХ ГАРМОНИК

Рассмотрения становятся несколько более сложными, если поставить задачу вывода частотного уравнения в случае термоупругой волны с окружной гармоникой сколь угодно высокого порядка n .

Подставляя выражения для компонент тензора напряжений и градиента температуры в граничные условия (3.7) и условие калибровки (3.8) получается система пяти линейных однородных уравнений

$$D_{jl}C_l = 0 \quad (j, l = \overline{1, 5}) \quad (5.1)$$

относительно пяти постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 .

Нас интересует условие нетривиальной разрешимости указанной системы. Приравняв нулю определитель системы, приходим к частотному уравнению. Оно содержит в качестве параметра порядок окружной гармоники n . Выполняя ряд преобразований, частотное уравнение можно обезразмерить и несколько упростить. Мы не будем останавливаться на деталях. Окончательно частотное уравнение



для волны с произвольным номером n окружной гармоника есть

$$D(k, \omega) = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

где элементы определителя вычисляются как

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_1^2 - g^2) \{ (n^2 - n + p_1^2) I_n(p_1) - p_1 I_{n+1}(p_1) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ (n - n^2 - k^2) I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \} - s^2 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1), \\ D_{12} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_2^2 - g^2) \{ (n^2 - n + p_2^2) I_n(p_2) - p_2 I_{n+1}(p_2) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ (n - n^2 - k^2) I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \} - s^2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2), \\ D_{13} &= \mp(ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \left\{ \frac{2n^2 - 2n + q_2^2}{q_2} I_n(q_2) + (n - 1) I_{n+1}(q_2) \right\}, \\ D_{14} &= \mp(ik) \frac{2}{k^2 - q_2^2} \{ -q_2 I_n(q_2) + (n + 1) I_{n+1}(q_2) \}, \\ D_{15} &= \frac{2}{k^2 - q_2^2} \{ (n^2 - n) I_n(q_2) + q_2 n I_{n+1}(q_2) \}, \\ D_{21} &= 2(p_1^2 - g^2) \{ (n - n^2) I_n(p_1) - n p_1 I_{n+1}(p_1) \}, \\ D_{22} &= 2(p_2^2 - g^2) \{ (n - n^2) I_n(p_2) - n p_2 I_{n+1}(p_2) \}, \\ D_{23} &= \pm(ik) \left\{ \frac{4n^2 - 4n + q_2^2}{q_2} I_n(q_2) + (2n - 2) I_{n+1}(q_2) \right\}, \\ D_{24} &= \pm(ik) \{ q_2 I_n(q_2) - (2n + 2) I_{n+1}(q_2) \}, \quad D_{25} = (2n - 2n^2 - q_2^2) I_n(q_2) + 2q_2 I_{n+1}(q_2), \\ D_{31} &= \pm(2ik) (p_1^2 - g^2) \{ n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1) \}, \quad D_{32} = \pm(2ik) (p_2^2 - g^2) \{ n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2) \}, \\ D_{33} &= \frac{2k^2 n + q_2^2 n}{q_2} I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \\ D_{34} &= -q_2 n I_n(q_2) - (q_2^2 + k^2) I_{n+1}(q_2), \quad D_{35} = \pm(ik) n I_n(q_2), \\ D_{41} &= (k^2 - p_1^2) (n I_n(p_1) + p_1 I_{n+1}(p_1)), \quad D_{42} = (k^2 - p_2^2) (n I_n(p_2) + p_2 I_{n+1}(p_2)), \\ D_{43} &= 0, \quad D_{44} = 0, \quad D_{45} = 0, \\ D_{51} &= 0, \quad D_{52} = 0, \quad D_{53} = q_2, \quad D_{54} = q_2, \quad D_{55} = \pm(ik). \end{aligned}$$

Следует отметить, что при вычислении отношений $\xi^{-1} I_n(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots$) удобнее всего воспользоваться формулой

$$\frac{I_n(\xi)}{\xi} = \frac{I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi)}{2n}.$$

Был осуществлен (средствами Mathematica 6.0) численный анализ частотного уравнения $D = 0$ в случае $n = 2$ при заданных значениях $s = 0.01$, $\delta = c_l/c_t = 1.9$, $\delta_l = 1.2$. Для проведения анализа был выбран гармонический множитель e^{+ikz} . Поэтому физический смысл имеют лишь такие корни частотного уравнения, для которых $\text{Im } k > 0$. Если рассматривать волны, фазовые поверхности



которых распространяются в положительном направлении вдоль оси цилиндра, то необходимо также полагать, что $\text{Re } k > 0$.

Как и в случае осесимметричного окружного профиля волны ($n = 0$) для заданной частоты ω всегда имеется счетное число волновых чисел k .

Определитель $D(k, \omega)$ по-прежнему удовлетворяет условиям

$$D(k, \omega) = D(-k, \omega), \quad \overline{D(k, \omega)} = D(\bar{k}, \omega). \quad (5.3)$$

Действительно, принимая во внимания вышеуказанные выражения для его элементов, видно, что он имеет следующую структуру:

$$D(k, \omega) = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & (\mp ik)D'_{13} & (\mp ik)D'_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & (\pm ik)D'_{23} & (\pm ik)D'_{24} & D_{25} \\ (\pm ik)D'_{31} & (\pm ik)D'_{32} & D_{33} & D_{34} & (\pm ik)D'_{35} \\ D_{41} & D_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & q_2 & \pm ik \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

где не выписанные явно величины (в том числе величины при множителях $\mp ik, \pm ik$) удовлетворяют условиям вида (5.3). Умножая первую строку определителя на $-D_{21}/D_{11}$ и складывая со второй строкой, добиваемся того, чтобы в позиции 21 располагался нуль; далее, умножая четвертую строку на $-D_{11}/D_{41}$ и складывая с первой строкой, получаем нуль в позиции 11; затем, умножая вторую строку на $-D_{15}/D_{25}$ и складывая с первой строкой, получаем нуль в позиции 15; умножая пятую строку на $-D'_{35}$ и складывая с третьей строкой, получаем нуль в позиции 35; вычитая из четвертого столбца определителя третий его столбец, получаем нуль в позиции 54; вычитая из второго столбца определителя первый его столбец, умноженный на D_{42}/D_{41} , получаем нуль в позиции 42; после указанных преобразований¹⁰ величина определителя не изменится, а в затронутых преобразованиями позициях определителя будут располагаться выражения (в том числе выражения при множителях $\mp ik, \pm ik$), удовлетворяющие условиям вида (5.3). Таким образом, вместо (5.4) получается определитель

$$D(k, \omega) = \begin{vmatrix} 0 & D''_{12} & (\mp ik)D''_{13} & (\mp ik)D''_{14} & 0 \\ 0 & D''_{22} & (\pm ik)D''_{23} & (\pm ik)D''_{24} & D''_{25} \\ (\pm ik)D''_{31} & (\pm ik)D''_{32} & D''_{33} & D''_{34} & 0 \\ D_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 & \pm ik \end{vmatrix}, \quad (5.5)$$

раскладывая который по четвертой строке, находим

$$D(k, \omega) = -D_{41} \begin{vmatrix} D''_{12} & (\mp ik)D''_{13} & (\mp ik)D''_{14} & 0 \\ D''_{22} & (\pm ik)D''_{23} & (\pm ik)D''_{24} & D''_{25} \\ (\pm ik)D''_{32} & D''_{33} & D''_{34} & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \pm ik \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Далее первую строку определителя умножаем на $-D''_{22}/D''_{12}$ и, сложив со второй строкой, добиваемся того, чтобы в позиции 21 располагался нуль; после этого третью строку умножим на $-\frac{(\mp ik)D''_{12}}{k^2 D''_{32}}$ и сложим с первой строкой, получая нуль в позиции 11. Раскладывая затем полученный определитель по первому столбцу, приходим к формуле следующего вида:

$$D(k, \omega) = -(\pm ik)D_{41}D''_{32} \begin{vmatrix} (\mp ik)D'''_{13} & (\mp ik)D'''_{14} & 0 \\ (\pm ik)D'''_{23} & (\pm ik)D'''_{24} & D'''_{25} \\ q_2 & 0 & \pm ik \end{vmatrix}. \quad (5.7)$$

¹⁰При их проведении приходится полагать, что элементы D_{11}, D_{41}, D_{25} не будут равны нулю для корней частотного уравнения $D(k, \omega) = 0$.



Здесь не выписанные явно величины (включая величины при множителях $\mp ik, \pm ik$) удовлетворяют условиям вида (5.3). При вычислении оставшегося определителя *каждое* из слагаемых будет содержать множитель ik либо в первой, либо в третьей степени, и, учитывая еще один множитель ik перед определителем, заключаем, что определитель D действительно удовлетворяет (5.3).

Ясно поэтому, что корни частотного уравнения $D(k, \omega) = 0$ находятся парами $k, -k$ (если они вещественные или чисто мнимые) и четверками $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ (если они обладают и вещественной, и мнимой частью, отличными от нуля).

Результаты численного анализа сведены в табл. 2 (в ней указаны лишь несколько наиболее близко расположенных к нулю ($\text{Re } k = 0, \text{Im } k = 0$) волновых чисел). Из четверки корней $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ мы приводим лишь пару $k, -k$.

Таблица 2

Частоты $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_t}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.1$	-0.120014, -0.0999886, 0.0999886, -0.19, 0.19 0.120014, -4.12194i, 4.12194i, -9.96875i, 9.96875i -1.8244 - 9.04076i, 1.8244 + 9.04076i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.2$	-0.199977, 0.199977 -0.240027, 0.240027, -0.38, 0.38, -9.96658i, 9.96658i -1.8247 - 9.03695i, 1.8247 + 9.03695i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.3$	-0.299966, 0.299966 -0.360041, 0.360041, -0.57, 0.57, -9.96297i, 9.96297i -1.82519 - 9.03059i, 1.82519 + .03059i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.4$	-0.480055, 0.480055 -0.399955, 0.399955, -0.76, 0.76, -9.9579i, 9.9579i -1.82588 - 9.02168i, 1.82588 + 9.02168i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.5$	-0.600068, 0.600068, -49.3923i, 49.3923i -0.499943, 0.499943, -0.95, 0.95, -2.99472i, 2.99472i -1.82674 - 9.01021i, 1.82674 + 9.01021i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.6$	-1.14, 1.14, -0.599932, 0.599932 -9.94343i, 9.94343i -1.82777 - 8.99617i, 1.82777 + 8.99617i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.7$	-0.699921, 0.699921, -1.33, 1.33 -2.93644i, 2.93644i, -3.88716i, 3.88716i -1.82893 - 8.97954i, 1.82893 + 8.97954i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.8$	-0.799909, 0.799909, -1.52, 1.52 -3.81142i, 3.81142i, -9.92313i, 9.92313i -1.83022 - 8.9603i, 1.83022 + 8.9603i
$\frac{\omega R}{c_t} = 0.9$	-1.08012, 1.08012, -0.899898, 0.899898 -2.85689i, 2.85689i, -3.72414i, 3.72414i -1.62518 - 5.52602i, 1.62518 + 5.52602i
$\frac{\omega R}{c_t} = 1.0$	-0.999886, 0.999886, -1.9, 1.9 -2.80859i, 2.80859i, -3.6247i, 3.6247i -1.62742 - 5.48637i, 1.62742 + 5.48637i
$\frac{\omega R}{c_t} = 2.0$	-1.63942, 1.63942, -1.99977, 1.99977 -1.88936i, 1.88936i, -6.26192i, 6.26192i -1.63445 - 4.81404i, 1.63445 + 4.81404i



Окончание табл. 2

Частоты $\tilde{\omega} = \frac{\omega R}{c_l}$	Волновые числа $\tilde{k} = kR$
$\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$	-1.90591, 1.90591, -2.99966, 2.99966 -5.65782i, 5.65782i, -9.9055i, 9.9055i -1.39809 - 3.37753i, 1.39809 + 3.37753i
$\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$	-9.99886, 9.99886, -12.0014, 12.0014 -5.42717i, 5.42717i, -11.0981i, 11.0981i -1.27647 - 17.8477i, 1.27647 + 17.8477i

На рис. 16–27 даны графики (в форме поверхностей) величины $|D|$ в зависимости от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$, а также кривые пересечения указанных поверхностей с плоскостями $\text{Im } k = 0$ и $\text{Re } k = 0$.

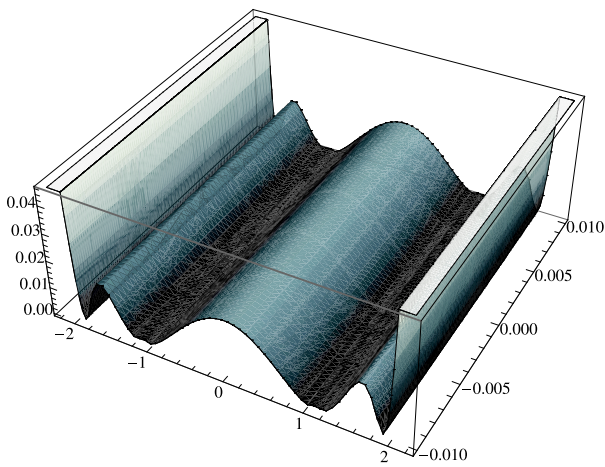


Рис. 16. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

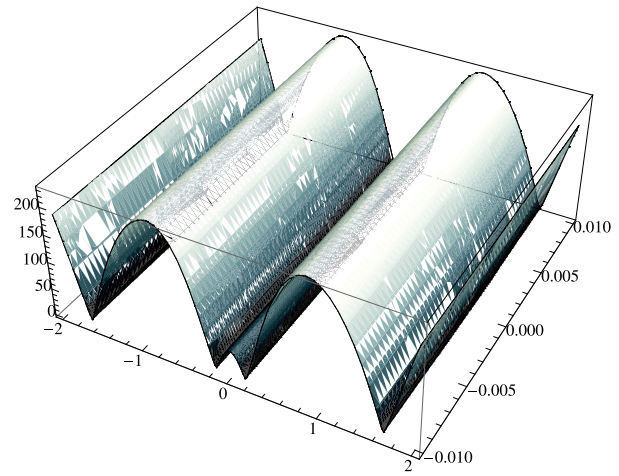


Рис. 17. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

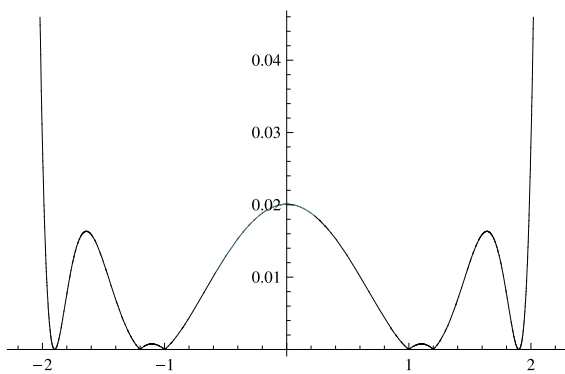


Рис. 18. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

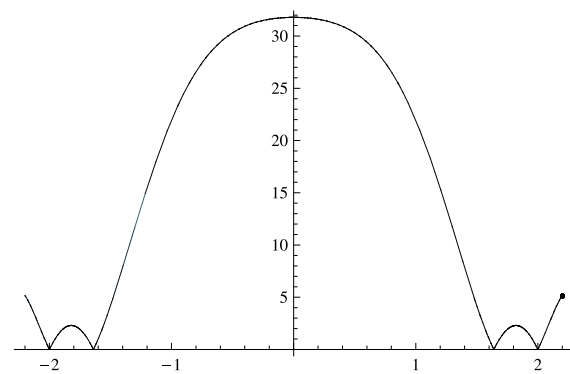


Рис. 19. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

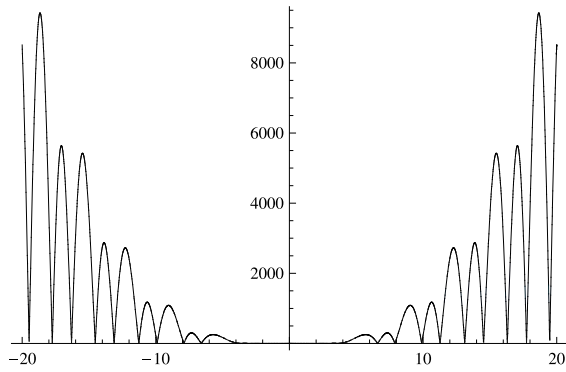


Рис. 20. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 1.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

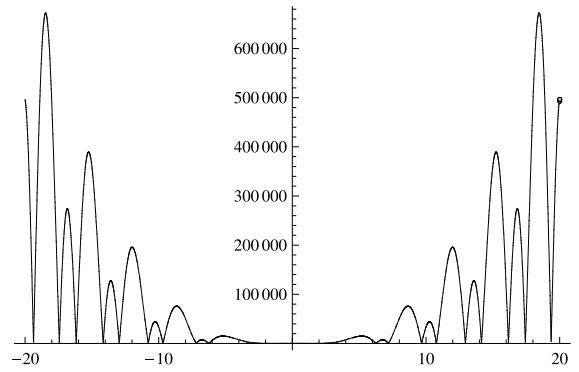


Рис. 21. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

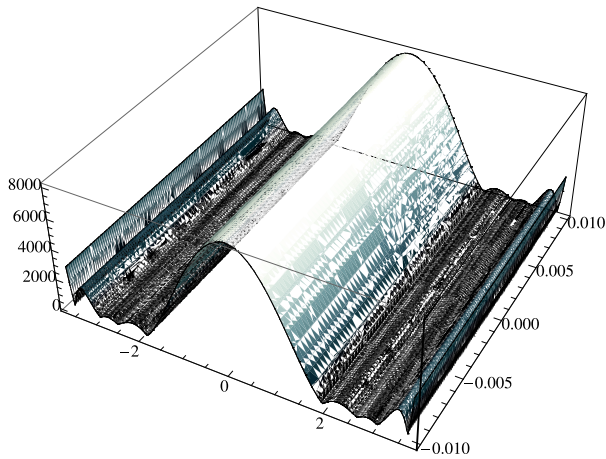


Рис. 22. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

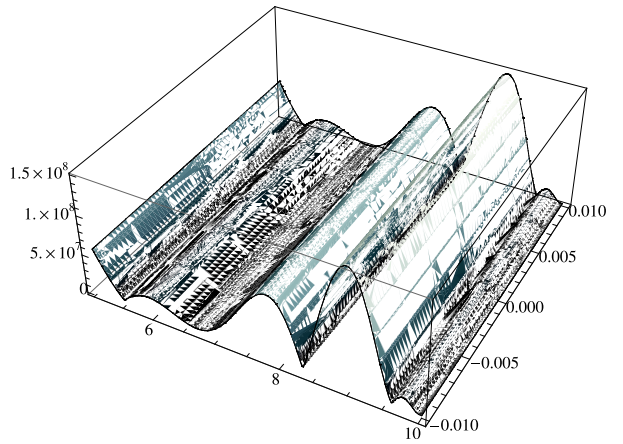


Рис. 23. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ и $\text{Im } k$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

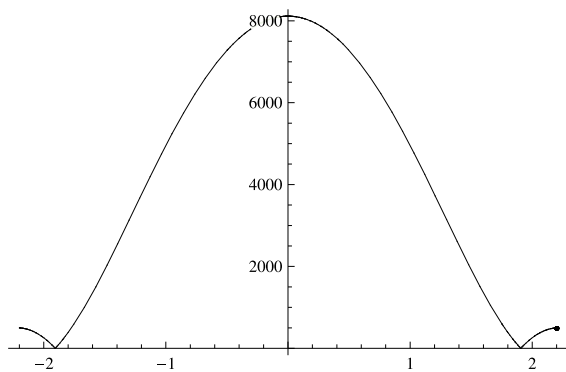


Рис. 24. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

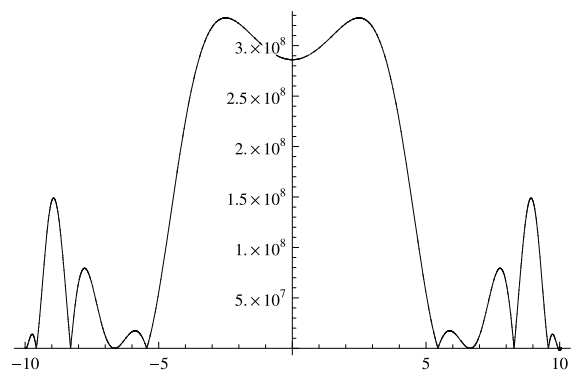


Рис. 25. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Re } k$ ($\text{Im } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

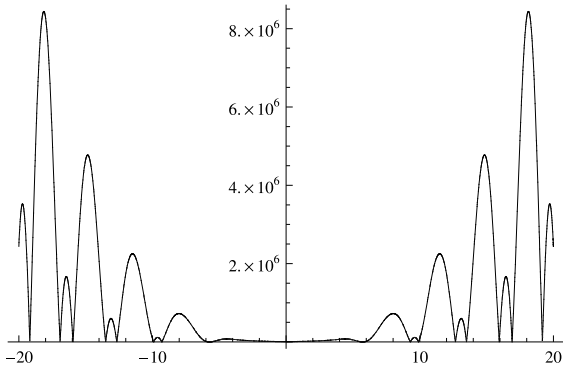


Рис. 26. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 3.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

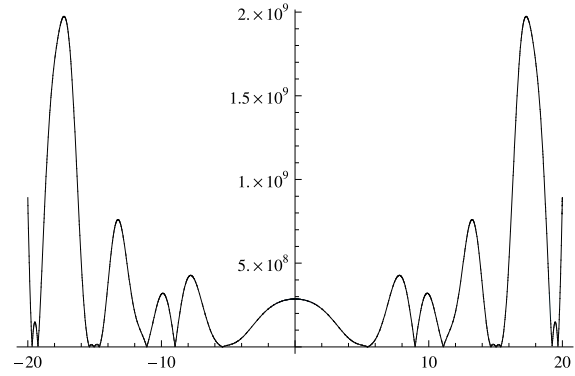


Рис. 27. Величина $|D(k, \omega)|$ ($n = 2$) как функция от $\text{Im } k$ ($\text{Re } k = 0$). Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 10.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$

Переходим к определению перемещений и температуры в случае связанной термоупругой волны с окружной гармоникой произвольного порядка n . Для этого рассмотрим систему линейных уравнений (5.1). Поскольку определитель этой системы равен нулю (см. (5.2)), то мы попытаемся выразить постоянные C_j через одну из них, скажем, $C_1 = C$. С этой целью из пятого уравнения системы (5.1) выразим C_5 через C_3 и C_4 , считая при этом, что $D_{55} \neq 0$. Полученное значение C_5 подставим в первое, второе и третье уравнения системы (5.1). Затем из преобразованного первого уравнения найдем выражение C_4 через C_1 , C_2 , C_3 и подставим результат во второе и третье уравнения¹¹.

Тогда второе и третье уравнения будут содержать только C_1 , C_2 , C_3 . Из второго уравнения находим C_3 через C_1 , C_2 , предполагая

$$D_{55}(D_{23}D_{14} - D_{13}D_{24}) + D_{53}(D_{13}D_{25} + D_{15}D_{24} - D_{15}D_{23} - D_{14}D_{25}) \neq 0.$$

Из четвертого уравнения выразим C_2 через C при условии $D_{42} \neq 0$. Тогда появляется возможность найти выражение C_3 через C , затем C_4 через C и C_5 через C . В итоге, вводя обозначения

$$K = D_{55}(D_{23}D_{14} - D_{13}D_{24}) + D_{53}(D_{13}D_{25} + D_{15}D_{24} - D_{15}D_{23} - D_{14}D_{25}),$$

$$K_1 = D_{42}D_{11} - D_{41}D_{12}, \quad K_2 = D_{15}D_{53} - D_{14}D_{55}, \quad K_3 = D_{24}D_{55} - D_{25}D_{53},$$

$$K_4 = D_{42}D_{21} - D_{41}D_{22}, \quad K_5 = D_{15}D_{53} - D_{13}D_{55},$$

после ряда преобразований получаем

$$C_2 = -\frac{D_{41}}{D_{42}}C, \quad C_3 = \frac{K_3K_1 + K_2K_4}{D_{42}K}C, \quad D_{42}C_4 = \frac{K_1K - K_2K_4K_5 - K_1K_3K_5}{KK_2}C,$$

$$C_5 = -\frac{D_{53}}{D_{55}D_{42}} \frac{K_1K_2K_3 + K_2^2K_4 + KK_1 - K_2K_4K_5 - K_1K_3K_5}{KK_2}C.$$

Перемещения и температура в связанной термоупругой волне, как было указано ранее, имеют вид

$$u_r = \left[C_1 (p_1^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_1 r) + p_1 I_{n+1}(p_1 r) \right) + C_2 (p_2^2 - g^2) \left(\frac{n}{r} I_n(p_2 r) + p_2 I_{n+1}(p_2 r) \right) + \right. \\ \left. + \frac{n}{r} C_5 I_n(q_2 r) \mp (ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) - C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) \right] \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{\pm ikz} e^{-i\omega t}, \\ u_\varphi = \left[\pm (ik) \left(C_3 \frac{2n}{q_2 r} I_n(q_2 r) + C_3 I_{n+1}(q_2 r) + C_4 I_{n+1}(q_2 r) \right) - C_5 \left(\frac{n}{r} I_n(q_2 r) + q_2 I_{n+1}(q_2 r) \right) - \right]$$

¹¹При этом нам придется полагать, что $D_{15}D_{53} - D_{14}D_{55} \neq 0$.



$$-\frac{n}{r} \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} \left[\begin{matrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{matrix} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$u_z = \left[\pm(ik) \left\{ C_1 (p_1^2 - g^2) I_n(p_1 r) + C_2 (p_2^2 - g^2) I_n(p_2 r) \right\} + (C_3 - C_4) q_2 I_n(q_2 r) \right] \left[\begin{matrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{matrix} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

$$\theta = \frac{\rho s^2 \omega^2}{\alpha} (C_1 (k^2 - p_1^2) I_n(p_1 r) + C_2 (k^2 - p_2^2) I_n(p_2 r)) \left[\begin{matrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{matrix} \right] e^{\pm ikz} e^{-i\omega t},$$

и для их определения необходимо подставить только что найденные выражения для произвольных постоянных в приведенные формулы.

Стоит отметить, что при вычислении отношений $\xi^{-1} I_n(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots$) при малых ξ удобнее всего, как и ранее, воспользоваться формулой

$$\frac{I_n(\xi)}{\xi} = \frac{I_{n-1}(\xi) - I_{n+1}(\xi)}{2n}.$$

На рис. 28–31 приводятся профили форм (за вычетом окружных гармоник) перемещений и температуры в сечении волновода $z = 0$ для бегущей волны, характеризуемой значениями $n = 2$, $\omega R/c_l = 2.0$, $kR = 1.63942$.

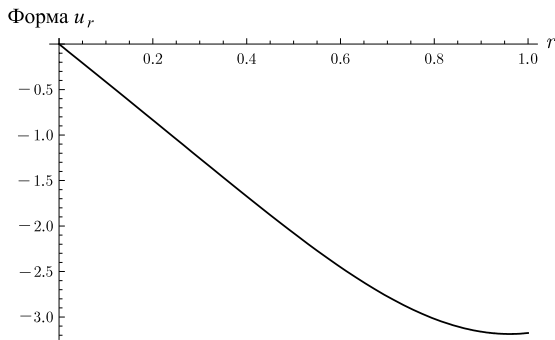


Рис. 28. Профиль формы бегущей волны радиального перемещения u_r ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$

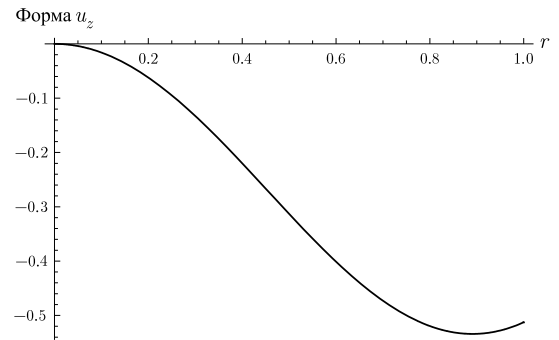


Рис. 29. Профиль формы бегущей волны осевого перемещения u_z ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$

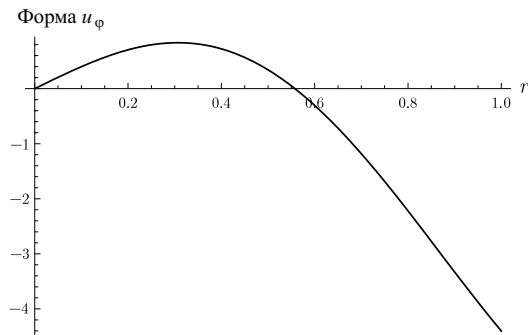


Рис. 30. Профиль формы бегущей волны тангенциального перемещения u_φ ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$

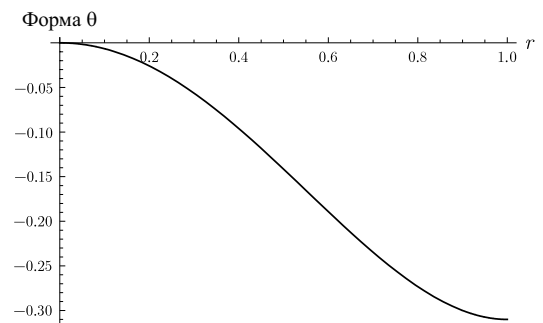


Рис. 31. Профиль формы бегущей температурной волны ($n = 2$) в плоскости $z = 0$. Данные численного анализа при $\frac{\omega R}{c_l} = 2.0$, $s = 0.01$, $\delta = 1.9$, $\delta_l = 1.2$, $kR = 1.63942$



Данная описанная процедура редукции системы линейных алгебраических уравнений (5.1) приводит к системе из двух уравнений $\Delta_{jl}C_l = 0$ ($j, l = 1, 2$), в которой коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= D_{41}, & \Delta_{12} &= D_{42}, \\ \Delta_{21} &= \frac{1}{K_2} \left[D_{11}P + D_{31}K_2 - \frac{S}{K} (D_{11}K_3 + D_{21}K_2) \right], \\ \Delta_{22} &= \frac{1}{K_2} \left[D_{12}P + D_{32}K_2 - \frac{S}{K} (D_{12}K_3 + D_{22}K_2) \right], \end{aligned}$$

где для сокращения записи формул были введены следующие обозначения:

$$P = D_{34}D_{55} - D_{35}D_{53}, S = D_{55}(D_{14}D_{33} - D_{13}D_{34}) + D_{53}(D_{13}D_{35} + D_{15}D_{34} - D_{14}D_{35} - D_{15}D_{33}).$$

Ясно, что частотное уравнение будет иметь вид $\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{21}\Delta_{12} = 0$. Корни этого уравнения при заданной частоте будут определять волновые числа связанных термоупругих волн с произвольным номером окружной гармоники n .

Заключая эту часть исследования, сделаем несколько замечаний относительно редукции к осесимметричному случаю общих формул данного раздела работы. Осевая симметрия характеризуется тем, что $n = 0$, $C_3 + C_4 = 0$, $C_5 = 0$, и имеется всего три независимых постоянных $C_1, C_2, C_3 - C_4$. Для элементов D_{jl} при $n = 0$ получаются более простые выражения

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_1^2 - g^2) \{ p_1^2 I_0(p_1) - p_1 I_1(p_1) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_1^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ -k^2 I_0(p_1) + p_1 I_1(p_1) \} - s^2(k^2 - p_1^2) I_0(p_1), \\ D_{12} &= \frac{1}{k^2 - q_1^2} (p_2^2 - g^2) \{ p_2^2 I_0(p_2) - p_2 I_1(p_2) \} + \\ &+ \frac{(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(p_2^2 - g^2)}{(k^2 - q_1^2)(k^2 - q_2^2)} \{ -k^2 I_0(p_2) + p_2 I_1(p_2) \} - s^2(k^2 - p_2^2) I_0(p_2), \\ D_{13} &= \mp(2ik) \frac{1}{k^2 - q_2^2} \{ q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2) \}, & D_{14} &= -D_{13}, & D_{15} &= 0, \\ D_{21} &= 0, & D_{22} &= 0, & D_{23} &= \pm(ik) \{ q_2 I_0(q_2) - 2I_1(q_2) \}, \\ D_{24} &= D_{23}, & D_{25} &= -q_2^2 I_0(q_2) + 2q_2 I_1(q_2), \\ D_{31} &= \pm(2ik)(p_1^2 - g^2) p_1 I_1(p_1), & D_{32} &= \pm(2ik)(p_2^2 - g^2) p_2 I_1(p_2), \\ D_{33} &= (k^2 + q_2^2) I_1(q_2), & D_{34} &= -D_{33}, & D_{35} &= 0, \\ D_{41} &= (k^2 - p_1^2) p_1 I_1(p_1), & D_{42} &= (k^2 - p_2^2) p_2 I_1(p_2), & D_{43} &= 0, & D_{44} &= 0, & D_{45} &= 0, \\ D_{51} &= 0, & D_{52} &= 0, & D_{53} &= q_2, & D_{54} &= q_2, & D_{55} &= \pm(ik). \end{aligned}$$

Пятое и второе уравнения системы (5.1) удовлетворяются тождественно в силу условий $C_3 + C_4 = 0$ и $C_5 = 0$, и структуры коэффициентов D_{jl} . Следовательно, остается ровно три уравнения относительно величин $C_1, C_2, C_3 - C_4$, которые образуют систему линейных алгебраических уравнений с определителем

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \\ D_{41} & D_{42} & 0 \end{vmatrix},$$

элементы которого вычисляются по только что данным упрощенным формулам.



6. ПЕРЕХОД К ЧИСТО УПРУГИМ ВОЛНАМ В СООТНОШЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Покажем как может быть осуществлен переход к чисто упругому случаю от уравнений гиперболической связанной термоупругости, описывающих распространение гармонических термоупругих волн в цилиндрическом волноводе. При этом, помимо волн произвольного азимутального порядка, отдельно будут рассматриваться осесимметричный случай, т.е. продольные волны с нулевым азимутальным порядком, и случай изгибных волн, которым соответствует азимутальный порядок n , равный единице.

Для простоты сначала ограничимся осесимметричным случаем, т.е. продольными волнами с нулевым азимутальным числом n . Прежде всего заметим, что поставленная задача будет выполнена, если в соотношениях гиперболической термоупругости, выведенных для осесимметричного случая, удалить температурное граничное условие и совершить предельный переход, полагая

$$s \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty, \quad c_1 \rightarrow c_l, \quad c_2 \rightarrow \infty, \quad p_1^2 \rightarrow q_1^2, \quad p_2^2 \rightarrow k^2, \quad g^2 \rightarrow k^2. \quad (6.1)$$

Поскольку наибольший интерес представляет собой частотное уравнение, то мы сразу же преобразуем систему граничных условий на боковой поверхности волновода (4.6), учитывая (6.1) и отбрасывая третье уравнение системы (4.6), так как оно как раз и задает граничное условие для градиента температуры. В результате приходим к следующей системе двух линейных алгебраических уравнений, связывающей постоянные C_1 и $C_3 - C_4$:

$$\begin{aligned} & -(k^2 - q_2^2)(k^2 - q_1^2)q_1(q_1 I_0(q_1) - I_1(q_1))C_1 \mp (ik)(k^2 - q_2^2)(q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2))(C_3 - C_4) + \\ & + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2) \left(-(k^2 - q_1^2)q_1 I_1(q_1)C_1 \mp (ik)(C_3 - C_4)I_1(q_2) \right) - \\ & - (2q_1^2 - q_2^2 - k^2) \left(-k^2(k^2 - q_1^2)I_0(q_1)C_1 \mp (ik)(C_3 - C_4)q_2 I_0(q_2) \right) = 0, \\ & \mp (2ik)(k^2 - q_1^2)q_1 I_1(q_1)C_1 + (k^2 + q_2^2)I_1(q_2)(C_3 - C_4) = 0. \end{aligned}$$

Формируя определитель D из коэффициентов полученной системы уравнений, произведем необходимые преобразования и выпишем его элементы

$$\begin{aligned} D_{11} &= (q_1^2 - k^2)^2 \left(-(q_2^2 + k^2)I_0(q_1) + 2q_1 I_1(q_1) \right), \\ D_{12} &= \pm (2ik)(q_1^2 - k^2) (q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2)), \\ D_{21} &= \pm (2ik)(q_1^2 - k^2)q_1 I_1(q_1), \quad D_{22} = (q_2^2 + k^2)I_1(q_2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Частотное уравнение $D = 0$ поэтому получается в виде

$$(q_2^2 + k^2)[2q_1 I_1(q_1) - (q_2^2 + k^2)I_0(q_1)]I_1(q_2) + 4k^2 q_1 [q_2 I_0(q_2) - I_1(q_2)]I_1(q_1) = 0.$$

Последнее уравнение, в свою очередь, можно привести к

$$I_1(q_1)I_1(q_2) \left\{ (q_2^2 + k^2)(2q_1^2 - (q_2^2 + k^2)I(q_1)) + 4k^2 q_1^2 (I(q_2) - 1) \right\} = 0. \quad (6.3)$$

Здесь еще раз вводится ранее уже использованная нами функция

$$I(\xi) = \frac{\xi I_0(\xi)}{I_1(\xi)} = 2 + \frac{\xi^2}{2^2} - \frac{\xi^4}{2^5 \cdot 3} + \frac{\xi^6}{2^9 \cdot 3} - \frac{\xi^8}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{13\xi^{10}}{2^{15} \cdot 3^3 \cdot 5} - \dots \quad (6.4)$$

Ей, как правило, уделяется внимание в руководствах по теории функций Бесселя (см., например: Грей Э., Мэтьюз Г.Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. С. 203–205). Данное разложение $I(\xi)$ в ряд по степеням переменной ξ легко преобразуется в непрерывную дробь, которую также можно эффективно использовать при расчете ее значений.

После отбрасывания множителей $I_1(q_1)$, $I_1(q_2)$ уравнение (6.3) приобретает довольно простой вид

$$(q_2^2 + k^2) \left(2q_1^2 - (q_2^2 + k^2)I(q_1) \right) + 4k^2 q_1^2 (I(q_2) - 1) = 0. \quad (6.5)$$



Это известное уравнение Похгаммера – Кри [9, 10]; его можно также представить в форме

$$2q_1(q_2^2 - k^2)I_1(q_1)I_1(q_2) - (q_2^2 + k^2)^2 I_0(q_1)I_1(q_2) + 4k^2 q_1 q_2 I_1(q_1)I_0(q_2) = 0. \quad (6.6)$$

Вводя «поперечные» волновые числа (transverse wavenumbers)

$$g_1^2 = -q_1^2, \quad g_2^2 = -q_2^2 \quad (6.7)$$

и учитывая хорошо известные соотношения между функциями Бесселя

$$I_0(i\xi) = J_0(\xi), \quad I_1(i\xi) = -\frac{J_1(\xi)}{i}, \quad (6.8)$$

уравнение (6.6) можно также привести к виду

$$2g_1(g_2^2 + k^2)J_1(g_1)J_1(g_2) - (g_2^2 - k^2)^2 J_0(g_1)J_1(g_2) - 4k^2 g_1 g_2 J_1(g_1)J_0(g_2) = 0. \quad (6.9)$$

Именно в этой форме уравнение Похгаммера – Кри чаще всего встречается в современной научной литературе [16, р. 214–225; 17, р. 464–474].

Обозначая через $E(k, \omega)$ левую часть уравнения (6.9) и учитывая (черта сверху обозначает комплексное сопряжение) $E(k, \omega) = E(-k, \omega)$, $\overline{E(k, \omega)} = E(\bar{k}, \omega)$, заключаем, что корни уравнения Похгаммера – Кри $E(k, \omega) = 0$ находятся парами $k, -k$ (если они вещественные или чисто мнимые) и четверками $k, -k, \bar{k}, -\bar{k}$ (если они обладают и вещественной, и мнимой частью, отличными от нуля).

Рассмотрим общий случай, т.е. примем, что азимутальное число n произвольно. Граничные условия на боковой поверхности волновода (3.7) и условие калибровки (3.8) после отбрасывания граничного условия для градиента температуры позволяют выписать четыре линейных уравнения для нахождения четырех постоянных C_1, C_3, C_4, C_5 :

$$\begin{aligned} & -(q_2^2 - k^2) \{ ((q_1^2 - n + n^2)I_n(q_1) - q_1 I_{n+1}(q_1)) (q_1^2 - k^2)C_1 + (nq_2 I_{n+1}(q_2) + n(n-1)I_n(q_2))C_5 \mp \\ & \mp (ik) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n-1)I_{n+1}(q_2)) C_3 \pm (ik)(q_2 I_n(q_2) - (n+1)I_{n+1}(q_2))C_4 \} + \\ & + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2) \{ ((n - n^2 - k^2)I_n(q_1) + q_1 I_{n+1}(q_1)) (q_1^2 - k^2)C_1 \pm \\ & \pm (ik) (q_2^{-1}(2n^2 - 2n + q_2^2)I_n(q_2) + (n-1)I_{n+1}(q_2)) C_3 \pm \\ & \pm (ik)((n+1)I_{n+1}(q_2) - q_2 I_n(q_2))C_4 + ((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2 I_{n+1}(q_2))C_5 \} = 0, \quad (6.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(q_1^2 - k^2) ((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1 I_{n+1}(q_1)) C_1 \pm (ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + \\ & + 2(n-1)I_{n+1}(q_2)C_3 \pm (ik)(q_2 I_n(q_2) - 2(n+1)I_{n+1}(q_2))C_4 + \\ & + ((2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2 I_{n+1}(q_2))C_5 = 0, \quad (6.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pm (2ik)(q_1^2 - k^2)(nI_n(q_1) + q_1 I_{n+1}(q_1))C_1 + ((nq_2 + 2nk^2 q_2^{-1})I_n(q_2) + \\ & + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)C_3 - (nq_2 I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2))C_4 \pm (ik)nI_n(q_2)C_5 = 0, \quad (6.12) \end{aligned}$$

$$(C_3 + C_4)q_2 \pm (ik)C_5 = 0. \quad (6.13)$$

Ясно, что частотный определитель будет иметь размерность 4×4 , а его элементы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{11} &= -(q_1^2 - k^2)(q_2^2 - k^2) ((q_1^2 - n + n^2)I_n(q_1) - q_1 I_{n+1}(q_1)) + \\ & + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2)(q_1^2 - k^2) ((n - n^2 - k^2)I_n(q_1) + q_1 I_{n+1}(q_1)), \\ D_{12} &= \pm (ik)(q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n-1)I_{n+1}(q_2)) \pm \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \pm(ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(2n^2 - 2n + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{13} = & \mp(ik)(q_2^2 - k^2)(q_2I_n(q_2) - (n + 1)I_{n+1}(q_2)) \pm (ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)), \\
 D_{14} = & 2(q_1^2 - k^2)((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{21} = & 2(q_1^2 - k^2) ((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1I_{n+1}(q_1)), \\
 D_{22} = & \pm(ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + 2(n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{23} = & \pm(ik)(q_2I_n(q_2) - 2(n + 1)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{24} = (2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} = & \pm(2ik)(q_1^2 - k^2)(nI_n(q_1) + q_1I_{n+1}(q_1)), \quad D_{32} = (nq_2 + 2nk^2q_2^{-1})I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), \\
 D_{33} = & -(nq_2I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{34} = \pm(ik)nI_n(q_2), \\
 D_{41} = & 0, \quad D_{42} = q_2, \quad D_{43} = q_2, \quad D_{44} = \pm(ik).
 \end{aligned}$$

Не изменяя корней частотного уравнения, можно несколько упростить приведенные выражения для элементов определителя, опуская в элементах первого столбца множитель $q_1^2 - k^2$,

$$\begin{aligned}
 D_{11} = & -(q_2^2 - k^2) ((q_1^2 - n + n^2)I_n(q_1) - q_1I_{n+1}(q_1)) + (2q_1^2 - q_2^2 - k^2)((n - n^2 - k^2)I_n(q_1) + \\
 & + q_1I_{n+1}(q_1)) = (q_1^2 - k^2) (2q_1I_{n+1}(q_1) - (2(n^2 - n) + q_2^2 + k^2)I_n(q_1)), \\
 D_{12} = & \pm(ik)(q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)) \pm \\
 & \pm(ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2) (q_2^{-1}(2n^2 - 2n + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)) = \\
 & = \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{13} = & \mp(ik)(q_2^2 - k^2)(q_2I_n(q_2) - (n + 1)I_{n+1}(q_2)) \pm (ik)(2q_1^2 - q_2^2 - k^2)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)) = \\
 & = \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)), \\
 D_{14} = & 2(q_1^2 - k^2)((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2I_{n+1}(q_2)), \quad D_{21} = 2((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1I_{n+1}(q_1)), \\
 D_{22} = & \pm(ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + 2(n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{23} = & \pm(ik)(q_2I_n(q_2) - 2(n + 1)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{24} = (2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} = & \pm 2(ik)(nI_n(q_1) + q_1I_{n+1}(q_1)), \quad D_{32} = (nq_2 + 2nk^2q_2^{-1})I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), \\
 D_{33} = & -(nq_2I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{34} = \pm(ik)nI_n(q_2), \\
 D_{41} = & 0, \quad D_{42} = q_2, \quad D_{43} = q_2, \quad D_{44} = \pm(ik).
 \end{aligned}$$

Из первой строки определителя снова можно вынести множитель $q_1^2 - k^2$. В итоге получаем

$$\begin{aligned}
 D_{11} = & 2q_1I_{n+1}(q_1) - (2(n^2 - n) + q_2^2 + k^2)I_n(q_1), \\
 D_{12} = & \pm 2(ik) (q_2^{-1}(-2n + 2n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + (n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{13} = & \pm 2(ik)((n + 1)I_{n+1}(q_2) - q_2I_n(q_2)), \quad D_{14} = 2((n - n^2)I_n(q_2) - nq_2I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{21} = & 2((n - n^2)I_n(q_1) - nq_1I_{n+1}(q_1)), \\
 D_{22} = & \pm(ik) (q_2^{-1}(-4n + 4n^2 + q_2^2)I_n(q_2) + 2(n - 1)I_{n+1}(q_2)), \\
 D_{23} = & \pm(ik)(q_2I_n(q_2) - 2(n + 1)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{24} = (2n - 2n^2 - q_2^2)I_n(q_2) + 2q_2I_{n+1}(q_2), \\
 D_{31} = & \pm 2(ik)(nI_n(q_1) + q_1I_{n+1}(q_1)), \\
 D_{32} = & (nq_2 + 2nk^2q_2^{-1})I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2), \\
 D_{33} = & -(nq_2I_n(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_{n+1}(q_2)), \quad D_{34} = \pm(ik)nI_n(q_2),
 \end{aligned}$$



$$D_{41} = 0, \quad D_{42} = q_2, \quad D_{43} = q_2, \quad D_{44} = \pm(ik).$$

Более простые формулы получаются, если перейти к исследованию изгибной упругой волны первого азимутального порядка $n = 1$. Тогда элементы частотного определителя будут иметь вид

$$\begin{aligned} D_{11} &= (q_1^2 - k^2)(2q_1 I_2(q_1) - (q_2^2 + k^2)I_1(q_1)), & D_{12} &= \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2)q_2 I_1(q_2), \\ D_{13} &= \pm 2(ik)(q_1^2 - k^2)(2I_2(q_2) - q_2 I_1(q_2)), & D_{14} &= -2(q_1^2 - k^2)q_2 I_2(q_2), & D_{21} &= -2q_1 I_2(q_1), \\ D_{22} &= \pm(ik)q_2 I_1(q_2), & D_{23} &= \pm(ik)(q_2 I_1(q_2) - 4I_2(q_2)), & D_{24} &= -q_2^2 I_1(q_2) + 2q_2 I_2(q_2), \\ D_{31} &= \pm 2(ik)(I_1(q_1) + q_1 I_2(q_1)), & D_{32} &= (q_2 + 2k^2 q_2^{-1})I_1(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_2(q_2), \\ D_{33} &= -(q_2 I_1(q_2) + (q_2^2 + k^2)I_2(q_2)), & D_{34} &= \pm(ik)I_1(q_2), \\ D_{41} &= 0, & D_{42} &= q_2, & D_{43} &= q_2, & D_{44} &= \pm(ik). \end{aligned}$$

Далее можно устранить функции Бесселя мнимого аргумента второго порядка на основании формулы $I_2(\xi) = -\frac{2}{\xi}I_1(\xi) + I_0(\xi)$. Затем выполним следующие преобразования частотного определителя:

- 1) второй столбец определителя умножим на q_2 ;
- 2) третий столбец определителя умножим на q_2 ;
- 3) из первой строки определителя вынесем множитель $q_1^2 - k^2$;
- 4) из первого столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_1)$;
- 5) из второго столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_2)$;
- 6) из третьего столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_2)$;
- 7) из четвертого столбца определителя вынесем множитель $I_1(q_2)$;
- 8) четвертую строку определителя умножим на $I_1(q_2)$.

Вводя обозначение $I(\xi) = \xi I_0(\xi)/I_1(\xi)$, перейдем к «эквивалентному» определителю:

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{vmatrix},$$

в четвертой строке которого располагаются элементы $D_{41} = 0, D_{42} = q_2^2, D_{43} = q_2^2, D_{44} = \pm(ik)$.

Остальные элементы «эквивалентного» определителя вычисляются в виде

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2I(q_1) - 4 - q_2^2 - k^2, & D_{12} &= \pm 2(ik)q_2^2, & D_{13} &= \pm 2(ik)(2I(q_2) - 4 - q_2^2), \\ D_{14} &= -2(I(q_2) - 2), & D_{21} &= -2(I(q_1) - 2), & D_{22} &= \pm(ik)q_2^2, \\ D_{23} &= \pm(ik)(-4I(q_2) + q_2^2 + 8), & D_{24} &= 2I(q_2) - 4 - q_2^2, & D_{31} &= \pm 2(ik)(I(q_1) - 1), \\ D_{32} &= -q_2^2 + (q_2^2 + k^2)I(q_2), & D_{33} &= q_2^2 + 2k^2 - (q_2^2 + k^2)I(q_2), & D_{34} &= \pm(ik). \end{aligned}$$

Разложим частотный определитель по четвертой строке $D = D_2 - D_3 + D_4$, где

$$\begin{aligned} D_2 &= q_2^2 \left(-2I^2(q_2) (k^2 + q_2^2)^2 + I(q_2) (4k^4 + k^2 (2 + k^2 + 10I(q_1))) q_2^2 + 2 (5 + k^2 - I(q_1)) q_2^4 + q_2^6 \right) - \\ &\quad - q_2^2 (k^2 (-8 + k^2) - 2 (-4 + k^2) q_2^2 + q_2^4 + 2I(q_1) (9k^2 + (-1 + 2k^2) q_2^2)), \\ D_3 &= -D_2, \\ D_4 &= 2k^2 \left(2I^2(q_2) (k^2 + q_2^2)^2 - I(q_2) (4k^4 + k^2 (2 + k^2 + 10I(q_1))) q_2^2 + 2 (5 + k^2 - I(q_1)) q_2^4 + q_2^6 \right) + \\ &\quad + q_2^2 (k^2 (-8 + k^2) - 2 (-4 + k^2) q_2^2 + q_2^4 + 2I(q_1) (9k^2 + (-1 + 2k^2) q_2^2)). \end{aligned}$$



Следовательно, частотное уравнение в случае $n = 1$ после ряда преобразований представляется в следующем виде:

$$D = 2D_2 + D_4 = 2(k^2 - q_2^2) \times \\ \times \left(2I^2(q_2)(k^2 + q_2^2)^2 - I(q_2)(4k^4 + k^2(2 + k^2 + 10I(q_1))q_2^2 + 2(5 + k^2 - I(q_1))q_2^4 + q_2^6) + \right. \\ \left. + q_2^2(k^2(-8 + k^2) - 2(-4 + k^2)q_2^2 + q_2^4 + 2I(q_1)(9k^2 + (-1 + 2k^2)q_2^2)) \right) = 0,$$

или, опустив множитель $2(k^2 - q_2^2)$,

$$k^2(-8 + k^2 + 18I(q_1))q_2^2 + 2(4 - k^2 + (-1 + 2k^2)I(q_1))q_2^4 + q_2^6 + 2I^2(q_2)(k^2 + q_2^2)^2 - \\ - I(q_2)(4k^4 + k^2(2 + k^2 + 10I(q_1))q_2^2 + 2(5 + k^2 - I(q_1))q_2^4 + q_2^6) = 0.$$

Окончательно частотное уравнение в случае $n = 1$ можно выписать в форме

$$A_1 I(q_1) + A_2 I(q_2) + A_3 I(q_1) I(q_2) + A_4 I^2(q_2) + A_5 = 0, \quad (6.14)$$

где

$$A_1 = 2q_2^2 [k^2(9 + 2q_2^2) - q_2^2], \quad A_2 = - [4k^4 + k^2(2 + k^2)q_2^2 + 2(5 + k^2)q_2^4 + q_2^6], \\ A_3 = 2q_2^2(q_2^2 - 5k^2), \quad A_4 = 2(k^2 + q_2^2)^2, \quad A_5 = q_2^2 [k^2(k^2 - 8) + 2(4 - k^2)q_2^2 + q_2^4].$$

С точностью до обозначений частотное уравнение (6.14) совпадает с уравнением, данным в книге [16, p. 224].

Библиографический список

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
2. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. Joseph D.D. Heat waves // Rev. Modern Physics. 1989. V. 61, № 1. P. 41–73.
4. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress. 1992. V. 15. P. 253–264.
5. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208.
6. Bargmann S., Steinmann P. Theoretical and computational aspects of non-classical thermoelasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2006. V. 196. P. 516–527.
7. Kalpakides V.K., Maugin G.A. Canonical formulation and conservation laws of thermoelasticity without dissipation // Reports in Mathematical Physics. 2004. V. 53. P. 371–391.
8. Puri P., Jordan P.M. On the propagation of plane waves in type-III thermoelastic media // Proc. R. Soc. Lond. A. 2004. V. 460. P. 3203–3221.
9. Pochhammer L. Uber Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder // J. reine angew. Math. 1876. V. 81. P. 324–336.
10. Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates: Their solution and application // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1889. V. 14. P. 250–369.
11. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: Физматлит, 1961. 220 с.
12. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 192 с.
13. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. N.Y.: Dover Publications, 1944. 644 p.
14. Bancroft D. The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars // Phys. Rev. 1941. V. 59. P. 588–593.
15. Hudson G.E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // Phys. Rev. 1943. V. 63. P. 46–51.
16. Miklowitz J. The theory of elastic waves and waveguides. Amsterdam; N.Y.; Oxford.: North-Holland Publishing Company, 1978. 618 p.
17. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. N.Y.: Dover Publications, 1991. 649 p.