УДК 514.774.2:517.972/.974:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СОВРЕМЕННЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев*

Московский городской университет управления
Правительства Москвы,
кафедра прикладной математики;
*Самарский государственный университет,
кафедра механики сплошных сред
E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru

Работа посвящена основам современной теории поля. Вводятся базовые понятия и определения теории поля в 4-мерном пространстве – времени и развивается лагранжев формализм в самом его сложном варианте, связанный с принципом наименьшего действия Гамильтона и возможностью вариационного описания поля с помощью указанного принципа. Развивается теория геометрических и обобщенных вариационных симметрий и приводится вывод законов сохранения (включая ряд их новых форм) на основе геометрических вариационных симметрий действия. На основе канонических тензорных характеристик поля, определяемых с помощью групп геометрических симметрий действия, найден ряд новых форм первой вариации интеграла действия. Приводится полная теория лагранжиана пустого пространства (нулевого лагранжиана) для пространственно-временного многообразия произвольной размерности. С помощью дивергентного представления лагранжиана пустого пространства для звездообразной области получено его общее выражение, содержащее градиенты поля порядка не выше первого. Показано, что в случае трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве нулевой лагранжиан может содержать в общей сложности 15 независимых элементов. Исследован также случай, когда лагранжиан пустого пространства не зависит от сдвигов физических полевых величин. Заключительная часть работы содержит полное изложение теоретико-группового формализма, связанного с современной теорией поля.

Ключевые слова: теория поля, лагранжев формализм, вариационный принцип, законы сохранения, нулевой лагранжиан, теоретико-групповой формализм.

Mathematical Models and Contemporary Theories of Physical Fields

V.A. Kovalev, Yu.N. Radayev*

Moscow City Government University of Management,
Chair of Applied Mathematics;
*Samara State University,
Chair of Continuum Mechanics
E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru

Elements of the classical field theory based on a variational formulation of the Hamilton type are discussed and corresponding 4-dimensional Lagrange formalism is presented both as the variational and the group theoretical script. Variational symmetries (geometric and generalized) of field equations and the Noether theorem providing a regular way of obtaining a conservation law for every given variational symmetry are revisited in the study in order to give a complete version of the contemporary field theory. All developments are presented in the non-linear frame (i.e. of finite strains as to continuum mechanics). Natural derivations of all tensor attributes of a physical field are given by the variational symmetry technique. The null Lagrangian theory for n-dimensional manifold (including 4-dimensional Minkowski space-time) is developed in an attempt to extend the canonical formalism of non-linear field theory. By the aid of divergence formula for the null Lagrangians regular in n-dimensional star-shaped domains, a general representation of the null Lagrangian depending as maximum on the first order field gradients is obtained. A method of systematic and derivation of the null Lagrangians for n-dimensional manifold is proposed. It is shown that in the case of non-linear 3-component field in 3-dimensional space the null Lagrangian is represented, in general, via 15 arbitrary independent field functions.

Key words: field theory, Lagrange formalism, variational principle, conservation law, null Lagrangian, group theoretical formalism.

ВВЕДЕНИЕ

Вариационная формулировка как средство математического представления физической теории часто рассматривается в качестве самого элегантного и экономичного (в духе принципа «экономии мышления» Маха (E. Mach)) такого представления, по крайней мере для физических теорий, не претендующих на описание диссипативных процессов. Компактность, с которой в вариационных принципах выражаются физические законы, рассматривалась Махом лишь как один из способов «экономии мышления» в познавательной деятельности и никогда не связывалась им с возможностью проявления действующих в природе физических законов в подобной математической форме. Следуя концепции Лейбница (G.W. Leibniz), наш мир является наилучшим из всех возможных миров и, следовательно, его законы выражаются экстремальными принципами.

Классическая аналитическая механика Лагранжа (J.L. Lagrange) и Гамильтона (W.R. Hamilton) является великолепным образцом теории, реализованной с помощью вариационного описания. Базисом вариационного описания здесь служит принцип Гамильтона – Остроградского, или принцип наименьшего действия[1]. Принцип наименьшего действия часто служит отправной точкой при построении аналитической механики (см., например, [1]). Наконец, следует отметить, что вариационные принципы были положены в основу теории электромагнитного и гравитационного поля в курсе теоретической физики [2]. Механика континуума, являясь классической теорией поля, не должна быть исключением: исследование геометрических и обобщенных (высших) симметрий функционала действия, а также соответствующих им законов сохранения, есть, по-видимому, не только самое мощное средство проникновения в сущность самой механики континуума, но и регулярный метод вывода законов сохранения и соответствующих им инвариантных интегралов, которые часто могут иметь и важное прикладное значение[2]. Следует к тому же отметить, что теория поля исторически строилась как логическое продолжение механики сплошных материальных сред. Современная термомеханика сплошных сред уже давно выросла в классическую физическую теорию поля. Ярким примером здесь может служить теория связанной гиперболической термоупругости (GN II), которая допускает вариационную формулировку, а следовательно, и полевой Лагранжев вариант представления всех тензорных характеристик и уравнений, относящихся к динамическому связанному термоупругому полю.

Представленный здесь материал[3] будет излагаться в следующей последовательности: сначала (разд. 1) рассматриваются вводные понятия классической теории поля в 4-мерном пространстве – времени[4], сформулирован принцип Гамильтона – Остроградского (принцип наименьшего действия), критерии абсолютной и инфинитезимальной инвариантности интеграла действия, изложен ограниченный вариант теории геометрических вариационных симметрий действия; теорема Нетер [3] и вывод законов сохранения на основе геометрических вариационных симметрий действия (также пока еще в ограниченном варианте) рассматриваются в разд. 2; следующий раздел работы (разд. 3) посвящен классическим законам сохранения, соответствующим преобразованиям сдвига и поворота пространства – времени, а также повороту трехкомпонентного динамического поля, в этом же разделе приводятся определения и «естественные» канонические представления всех важнейших векторных и тензорных полей нелинейной механики сплошных сред, необходимые для записи законов сохранения в самом общем нелинейном случае (в том числе с учетом динамического вклада в функционал действия); обобщенные геометрические вариационные симметрии действия и соответствующий более общий вариант теоремы Нетер рассматриваются в разд. 4, здесь же выводится одна новая форма вариации действия, которая с помощью трех способов варьирования пространственно-временных координат и полевых переменных позволяет получить (см. разд. 5) ряд новых форм законов сохранения; далее, в разд. 6, получена общая форма закона сохранения, соответствующая *полному* варьированию координат и полей, представленная через два канонических тензора (первого тензора напряжений

[1]Принцип наименьшего действия был сформулирован Гамильтоном в работах 1834, 1835 гг. (*Hamilton W.R.* On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function // Philos. Trans. Roy. Soc. L., 1834. Pt. II. P. 247–308; *Hamilton W.R.* Second assay on a general method in dynamics // Philos. Trans. Roy. Soc. L., 1835. Pt. I. P. 95–144) и независимо от него М.В. Остроградским в 1848 г.

[2]См., например: *Knowles J.K., Sternberg E.* On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 44. P. 187–211; *Olver P.J.* Conservation laws in elasticity I. General results// Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 119–129; *Olver P.J.* Conservation laws in elasticity II. Linear homogeneous isotropic elastostatics // Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 85. P. 131–160; *Olver P.J.* Symmetry Groups and Path-Independent Integrals // Fundamentals of Deformation and Fracture / Eds. B.A. Bilby et al. Eshelby Memorial Symposium, Sheffield 2–5 April, 1984. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. P. 57–71.

[3]См. также: *Радаев Ю.Н.* Нелинейная теория упругости как физическая теория поля// Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / Под ред. акад. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 658–684.

[4]Следует заметить, что число «пространственных» координат в пространстве – времени чаще всего не играет никакой роли. При исследовании некоторых вопросов (таких как, например, повороты трехкомпонентного поля) указанное число существенно.

Пиола – Кирхгофа и тензора напряжений Эшелби); в разд. 7 рассматриваются не геометрические обобщенные группы преобразований (преобразования Ли – Бэклунда) и обобщенные негеометрические вариационные симметрии действия, т.е. самый общий вариант теории вариационных симметрий поля; в качестве важного элемента теории поля следует рассматривать разд. 8, посвященный лагранжиану «пустого пространства» (нулевому лагранжиану)[5]; теория геометрических и негеометрических обобщенных вариационных симметрий поля во всей своей полноте излагается в разд. 9 в терминах и с помощью алгоритмов группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных[6].

Теория поля является весьма важной частью современной физики, но систематические изложения ее классических основ недостаточно доступны. Последовательное изложение затрагиваемого круга проблем заинтересованный читатель может найти также в известной монографии [5]. К сожалению, на русском языке имеется весьма ограниченный набор литературных источников по проблеме применения геометрических и обобщенных вариационных симметрий в таких разделах механики сплошных сред, как нелинейная упругость или связанная термоупругость. Так, в известной монографии [6] вообще нет никаких указаний на это.

Вариационное исчисление является на редкость всеобъемлющим математическим методом. Именно в рамках этой науки выкристаллизовались многие понятия математики, механики и физики. Поэтому вариационное исчисление выступает не только как самостоятельная математическая дисциплина, но и как в определенном смысле летопись этих трех наук. По поводу формализма исчисления вариаций для функционалов с переменной областью интегрирования и доказательства теоремы Нетер см. работы [7–12].

Систематическое изложение теории геометрических вариационных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, следующих из вариационного принципа, дано в 4-й главе монографии [13] (перевод на русский язык см. [14]). В 5-й главе указанной книги приводится теория обобщенных симметрий. Новый вариант изложения этого круга вопросов читатель может найти в монографии [15].

1. ВВОДНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Ниже будут даны необходимые сведения (преимущественно формального плана) из современной теории поля, с помощью которых на единой основе могут быть получены уравнения поля, динамические инварианты поля (энергия, импульс, момент импульса) и инвариантные интегралы. Для по-

[5] Действие, лагранжиан которого является нулевым, называется нейтральным. Оно стационарно на произвольных физических полях, и поэтому никак не связано со свойствами каких бы то ни было физических полей, что, собственно, и позволяет ассоциировать такое действие не с физическими полями, а с пространством, их «вмещающим». Изложение теории лагранжиана пустого пространства в основном следует по статье [4]. Добавление лагранжиана пустого пространства в силу его дивергентной структуры к лагранжиану физического поля не изменяет условий стационарности действия, хотя и может изменить условие инфинитезимальной инвариантности интеграла действия и выражения для канонических тензоров. Понятие о лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку законов сохранения. В п. 8.4 приводится полная теория лагранжиана пустого пространства для n-мерного пространственно-временного многообразия (включая 4-мерное пространство – время Минковского). С помощью дивергентного представления лагранжиана пустого пространства для звездообразной области (см. п. 8.1) получено его общее выражение, содержащее градиенты поля порядка не выше первого, в случае произвольного числа измерений пространства – времени. Показано (п. 8.2), что в случае статического трехкомпонентного физического поля в трехмерном пространстве нулевой лагранжиан может содержать в общей сложности 15 независимых элементов. Исследован также случай, когда лагранжиан пустого пространства не зависит от сдвигов физических полевых величин (см. п. 8.5). Лагранжианы пустого пространства выступают в качестве основы решения одной важной задачи вариационного исчисления об «интегрирующем множителе». Эта проблема, которой посвящен п. 8.6, состоит в поиске таких функций, зависящих от пространственно-временных переменных, полевых переменных и их градиентов, которые позволяли бы для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных которая не вытекает из вариационного принципа, гарантировать выполнение равенства между скалярным произведением вектор-множителя и вектор-системы и некоторым дивергентным выражением для произвольных полевых переменных, и тем самым сформулировать на решениях системы дивергентный закон сохранения.

[6] В этом разделе работы формализм теории геометрических и обобщенных вариационных симметрий распространяется на лагранжианы, зависящие от градиентов полевых переменных, сколь угодно высокого порядка.

нимания излагаемой далее теории необходимо достаточно свободное владение исчислением вариаций (например, в рамках замечательного курса вариационного исчисления [10]). Компактное изложение имеется в работе [8, p. 260–264]. Можно рекомендовать также монографию [5, p. 96–115].

Рассмотрим функционал типа Гамильтонова действия

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) d^4X, \tag{1.1}$$

где φ^k — упорядоченный массив физических полевых величин (или динамических переменных), число которых предполагается конечным; X^β ($\beta = 1,2,3,4$) — пространственно-временные координаты[7]; $X^4 = ct$ (константа c имеет смысл характерной скорости и ее можно положить равной единице); d^4X — элемент объема; $\mathcal{D}$ — область 4-пространства[8], в пределах которой изменяются пространственно-временные координаты X^1, X^2, X^3, X^4. При этом речь может идти о лагранжиане и действии как всего тела, так и любой его части. Именно поэтому мы чаще всего не будем в дальнейшем явно указывать область интегрирования в (1.1) и вообще не будем ее специфицировать[9].

Пространство – время релятивистских теорий является четырехмерным псевдоевклидовым пространством[10], метрика которого в *галилеевой координатной системе* задается знаконеопределенной квадратичной формой

$$ds^2 = \varepsilon_\beta (dX^\beta)^2 \qquad (\beta = 1,2,3,4),$$

где $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_4 = -1$.

Определенное подобным образом 4-пространство обычно называют пространством Минковского (H. Minkowski), или пространством событий.

В пространстве Минковского может быть введена криволинейная координатная система X^β; метрика в этом случае задается квадратичной формой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta. \tag{1.2}$$

Такое задание линейного метрического элемента характерно для пространств Римана[11]. В принципе, n-мерное риманово пространство, квадрат метрического элемента которого знаконеопределен, — это вполне достаточный для развития теории поля образец пространственно-временного многообразия. Гиперболическое риманово пространство размерности 4 служит в качестве пространственно-временного многообразия в общей теории относительности. Физическое содержание этой типично полевой теории состоит в объяснении всего лишь одного явления — всемирного тяготения.

Под d^4X мы понимаем «естественный» пространственно-временной элемент объема

$$d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4. \tag{1.3}$$

[7] Аналогия между пространством и временем была известна еще древним грекам. Аристотель включал время в число непрерывных величин наряду с линиями, поверхностями и телами. В современной физике равноправие пространственных координат и времени утверждалось в процессе становления теории относительности. Пространственно-временное многообразие — неотъемлемый элемент теории относительности. Геометрия пространства – времени как объект физической теории рассматривается, например, в [16, с. 457–472]. С точки зрения классической механики сплошных сред переменные X^1, X^2, X^3 вполне аналогичны координатам Лагранжа, а оперирование с четырехмерным пространственно-временным многообразием исключительно удобно при описании динамических процессов в деформируемых средах. Большинство положений теории поля обобщается на случай пространства – времени с произвольным числом пространственных измерений.

[8] В рамках классической нелинейной механики сплошных сред и действия для трехмерного деформируемого тела следует считать, что $\mathcal{D}$ — декартово произведение отсчетной конфигурации тела, деформацию которого обычно описывают, сравнивая отсчетную конфигурацию с актуальной деформированной, и интервала времени с границами t_1, t_2.

[9] Граница неспецифицированной 4-области интегрирования (в данном случае — замкнутая трехмерная гиперповерхность в четырехмерном пространства – времени) обозначается далее через ∂.

[10] Геометрия псевдоевклидовых пространств и пространственно-временного многообразия в деталях изложена в кн.: *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

[11] Теория пространств Римана изложена в ряде известных монографий: *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 316 с.; *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.; *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.

Поэтому $\mathcal{L}$ — «естественная» плотность лагранжиана. Лагранжиан предполагается локальным, т.е. его значение в точке X^β определяется значениями динамических переменных φ^k и конечного числа их частных производных по пространственно-временным координатам, вычисленных в той же самой точке.

Инвариантный элемент объема $d^4\tau$ пространственно-временного многообразия, параметризованного *криволинейными* координатами X^β, определяется на основании

$$d^4\tau = \sqrt{g}\, dX^1 dX^2 dX^3 dX^4, \tag{1.4}$$

где g — определитель (точнее, его абсолютная величина), составленный из метрических коэффициентов пространственно-временного многообразия $g_{\alpha\beta}$. В том случае, когда метрика пространства – времени гиперболична, то обычно вместо $\sqrt{g}$ пишут $\sqrt{-g}$[12], ибо в последнем случае величина под корнем будет положительной. Тогда инвариант $\sqrt{-g}\, dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ — величина четырехмерного объема, измеренного в локальной координатной системе посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности.

Инвариантный элемент объема следует отличать от «естественного» элемента объема $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$, поскольку координатная система пространственно-временного многообразия может быть криволинейной, и в этом случае величина $\sqrt{-g}$ отлична от единицы. Использование «естественного» элемента объема вместо инвариантного предпочтительнее с точки зрения формализма исчисления вариаций.

При использовании криволинейной координатной системы в пространственно-временном многообразии функционал действия следует записывать в форме

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) \sqrt{-g}\, d^4X. \tag{1.5}$$

Ясно поэтому, что характер координатной системы можно вообще не специфицировать, но тогда в уравнениях поля под функцией Лагранжа следует понимать не $\mathcal{L}$, а $\sqrt{-g}\,\mathcal{L}$. Следует поэтому помнить, что символ $\mathcal{L}$ тогда не будет указывать на плотность по отношению к инвариантному элементу объема пространственно-временного многообразия. Величина $\mathcal{L}$ будет являться скалярной плотностью по отношению к «естественному» элементу объема. Как уже отмечалось, величину $\mathcal{L}$ можно поэтому называть «естественной» плотностью лагранжиана.

В дальнейшем изложении будет предполагаться, что при использовании криволинейной координатной системы в пространстве – времени в интеграле действия с самого начала следует выполнить замену

$$\sqrt{-g}\,\mathcal{L} \to \mathcal{L}, \tag{1.6}$$

а в уравнениях поля — замену

$$\mathcal{L} \to \sqrt{-g}\,\mathcal{L}, \tag{1.7}$$

и мы, таким образом, возвращаемся к выражению действия в первоначально данной форме (1.1).

Сделаем еще одно важное замечание относительно расстановки и индексов у пространственно-временных координат и полевых переменных. В первом случае греческий индекс пишется в верхней позиции, поскольку координаты X^β преобразуются как 1-контравариантный «отсчетный» вектор. Во втором случае «пространственный» индекс k пишется в верхней позиции чисто условно: полевая переменная может быть скаляром или тензором произвольного ранга. Принятое нами обозначение однако подразумевает, что φ^k есть эйлеровы переменные в том самом смысле, который приписывается им в классических теориях поля механики сплошных деформируемых сред.

[12]Часто для краткости применяется также сокращенное обозначение $\surd$ (см., например, [17, с. 39]).

Как это принято в вариационном исчислении, через ∂_β в (1.1) и в дальнейшем обозначается оператор *полного* частного дифференцирования по пространственно-временной координате X^β. Оператор полного дифференцирования действует на функцию $F(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\nu)$ по формуле

$$\partial_\beta F = \partial_\beta^{\mathrm{expl}} F + \sum_{s\geq 0} \left(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_s}\partial_\beta\varphi^l\right) \frac{\partial F}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)}. \tag{1.8}$$

В сумме справа верхний предел суммирования можно не указывать, поскольку функция $F(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\nu)$ зависит лишь от *конечного* числа аргументов, и поэтому суммирование в (1.8) рано или поздно обрывается.

Мы будем систематически использовать именно этот дифференциальный оператор с тем, чтобы изложение было выдержано в духе классического вариационного исчисления, тем более, что уравнения поля (которые мы будем систематически записывать исключительно с помощью операторов полного дифференцирования ∂_β и частного дифференцирования $\partial_\beta^{\mathrm{expl}}$ по *явному* вхождению переменной X^β), как известно, *ковариантны*, т.е. *правило составления* уравнений поля при использовании «естественной» плотности лагранжиана остается неизменным и не зависящим от выбора координатной системы в пространственно-временнном многообразии. Впрочем, все уравнения исчисления вариаций без труда представляются в прямой тензорной записи, общепринятой в рамках рациональной механики. «Прямая» тензорная запись уравнений поля, несмотря на известные преимущества, которые в полной мере были использованы направлением «рациональной механики сплошных сред»[13], часто оказывается неудобной, так как она скрывает истинную природу тензорных характеристик поля: при построении канонических тензоров теории поля заимствуются элементы как пространства – времени (греческий индекс), так и самих физических полей (латинский индекс), которые «скрываются» за «прямой» тензорной записью уравнений поля.

Заметим, что в рамках формализма группового анализа дифференциальных уравнений оператор полного дифференцирования обозначается как D_β.

Большинство современных физических теорий поля ограничивается градиентами первого порядка от динамических переменных φ^k и соответствующим лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, X^\beta). \tag{1.9}$$

Это согласуется с тем обстоятельством, что в обычной практике уравнения поля являются дифференциальными уравнениями самое большее второго порядка.

Для классической механики сплошных сред физические поля φ^k — это закон движения (или деформирования) тела, представленный как зависимости координат Эйлера (т.е. координат в пространстве, которые выбираются наблюдателем для представления положений точек сплошной среды в процессе ее деформации) от координат Лагранжа (координаты Лагранжа, согласно традиционным представлениям механики сплошных сред, индивидуализируют точки континуума, являясь для каждой из них уникальной меткой[14]):

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3, X^4).$$

Таким образом, в дальнейшем, интерпретируя развиваемую теорию в аспекте механики деформируемых сред, можно считать, что полевые переменные φ^k есть эйлеровы координаты: $\varphi^k = x^k$.

В принципе деформацию сплошного тела можно описывать обратным отображением (так называемое обратное лагранжево описание):

$$X^\beta = X^\beta(x^1, x^2, x^3, t).$$

[13] См., например: *Truesdell C., Toupin R.A.* The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, V. III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 226–793.

[14] Различные представления деформации сплошного тела и теория тензоров конечных деформаций приводятся в известных монографиях [18–20].

Тогда роль физических полевых величин будут играть переменные Лагранжа. Ни одно из описаний — прямое лагранжево и обратное лагранжево — не имеет никаких преимуществ по сравнению с другим. Исторически сложилось так, что широкое распространение получило лишь прямое описание. И только в последнее время обратное описание стало проникать в работы по нелинейной механике деформируемого твердого тела (см., например, [5]).

Нелинейная теория упругости в варианте прямого лагранжева описания — великолепный пример теории, реализуемой с помощью принципа наименьшего действия. Пространство – время при этом распадается на трехмерное евклидово пространство и абсолютное время, а лагранжиан равен разности кинетической и потенциальной энергий. Полевые переменные в этом случае суть компоненты вектора перемещения.

Отправным пунктом для математического описания физических полей служит принцип Гамильтона – Остроградского (или принцип наименьшего действия), который гласит, что действительное поле реализуется таким образом, что действие оказывается экстремальным, т.е. первая вариация действия обращается в нуль для всех допустимых вариаций физических полей φ^k:

$$\delta\Im = 0. \tag{1.10}$$

Здесь не подвергаются варьированию пространственно-временные координаты X^β и 4-область интегрирования. В аналитической механике такому способу варьирования отвечают так называемые изохронные вариации.

Принцип наименьшего действия позволяет сформулировать задачу о вычислении поля внутри 4-области $\mathcal{D}$ как вариационную задачу об отыскании экстремумов интегрального функционала (1.1).

Осознанное оперирование с вариацией интеграла действия $\Im$ подразумевает ясное и строгое определение различных видов варьирования как самих полевых переменных φ^k, так и пространственно-временных координат X^β. Поэтому мы начнем с базовых понятий и определений.

Основным исходным элементом, необходимым для определения понятия вариации, является однопараметрическое семейство (группа) геометрических (точечных) преобразований пространственно-временных координат и физических полей

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\widetilde{X}^\beta, \widetilde{\varphi}^k), \tag{1.11}$$

где

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \quad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \tag{1.12}$$

причем

$$\mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k. \tag{1.13}$$

Величина ε — параметр группы преобразований (1.12), который может быть скалярным, векторным или тензорным. В дальнейшем изложении параметр группы обычно будет считаться скалярным.

Следует обратить внимание на тот факт, что пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^k входят в группу преобразований (1.12) явно несимметрично, ибо закон преобразования (1.12) не допускает трансформацию переменных X^β, зависящую от полевых переменных φ^k. Подобного рода ограничение не является непреодолимым препятствием для построения теории поля. Впоследствии мы рассмотрим более широкий спектр однопараметрических геометрических преобразований

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \tag{1.14}$$

и соответствующие обобщенные геометрические симметрии действия с целью устранения указанной несимметричности.

Итак, мы пока ограничиваемся случаем, когда трансформация (1.12) пространственно-временных координат X^β не зависит от динамических переменных φ^k. В большинстве практически важных случаев однопараметрические группы будут принадлежать именно такому типу преобразований (fiber-preserving transformations). В частности, можно вести речь только о преобразованиях пространственно-временных координат (base transformations)

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon), \qquad \widetilde{\varphi}^k = \varphi^k$$

или только полевых переменных (standard transformations)

$$\widetilde{X}^\beta = X^\beta, \qquad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon).$$

Исключительный интерес представляют однопараметрические геометрические группы преобразований, которые не изменяют форму функционала действия и его величину (или при неизменной форме функционала изменение величины функционала действия является бесконечно малым, порядка более высокого, чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия, т.е.

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta) d^4X = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \dots, \widetilde{X}^\beta) d^4\widetilde{X} \tag{1.15}$$

при преобразовании координат и полей, согласно (1.12), и соответствии пространственно-временных 4-областей интегрирования в переменных X^β и $\widetilde{X}^\beta$.

Указанные группы обычно называют геометрическими группами абсолютной инвариантности функционала действия, а также абсолютными геометрическими симметриями действия по Гамильтону (или просто — вариационными симметриями действия).

Если при неизменной форме функционала действия изменение его значения, отвечающее преобразованию (1.12), является бесконечно малой величиной, порядка более высокого, чем ε, то говорят об инфинитезимальной инвариантности функционала действия под действием геометрической группы преобразований (1.12). В этом случае равенство (1.15) выполняется с невязкой $o(\varepsilon)$. Группа преобразований (1.12) при этом называется *инфинитезимальной геометрической вариационной симметрией действия*. Ясно, что абсолютная инвариантность функционала действия влечет его инфинитезимальную инвариантность.

Прежде чем дать дополнительный комментарий понятию абсолютной (или инфинитезимальной) инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1.12), введем представление об эквивалентности функционалов ([15, p. 230]) $\Im$ и $\widetilde{\Im}$. Функционалы

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta) d^4X, \tag{1.16}$$

$$\widetilde{\Im} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \dots, \widetilde{X}^\beta) d^4\widetilde{X} \tag{1.17}$$

называются эквивалентными при их преобразовании группой (1.12) тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\widetilde{\Im} = \Im$.

Заметим, что абсолютная инвариантность функционала действия относительно однопараметрической группы преобразований (1.12) означает не только сохранение величины действия, т.е. не только эквивалентность функционалов в смысле выполнения равенства[15]

$$\widetilde{\Im} = \Im \tag{1.18}$$

или

$$\widetilde{\mathcal{L}} d^4\widetilde{X} = \mathcal{L} d^4X, \tag{1.19}$$

[15]Или в случае, когда речь идет об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1.12), приводимое далее равенство должно удовлетворяться с точностью до бесконечно малой величины порядка выше, чем ε.

где $\widetilde{\mathcal{L}}$ — «естественная» плотность лагранжиана, выраженная с помощью новых пространственно-временных координат $\widetilde{X}^\beta$ и физических полей $\widetilde{\varphi}^k$ в результате замены переменных согласно (1.12)

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta),$$

но и подразумевает, что в условии (1.19) также выполнена замена

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) \to \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta), \tag{1.20}$$

гарантирующая неизменность формы функционала действия.

Итак, в результате преобразования однопараметрической геометрической группой (1.12), если только при этом величина действия не изменяется, «естественная» плотность лагранжиана преобразуется (возможно, в случае, когда речь идет об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1.12), с точностью до бесконечно малой величины, порядка выше, чем ε) в соответствии с формулой (1.19), которую можно также представить в виде

$$\det\left(\frac{\partial\widetilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha}\right)\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta). \tag{1.21}$$

Абсолютная инвариантность функционала действия относительно группы геометрических преобразований (1.12) означает, что (1.21) выполняется после замены (1.20), т.е.

$$\det\left(\frac{\partial\widetilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha}\right)\mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta). \tag{1.22}$$

Это необходимое и достаточное условие абсолютной инвариантности функционала действия относительно группы геометрических преобразований (1.12).

Равенство (1.21) выступает в качестве критерия эквивалентности функционалов (1.16), (1.17) относительно группы геометрических преобразований (1.12).

Инфинитезимальная инвариантность функционала действия (в отличие от абсолютной инвариантности, выражаемой критерием (1.22)) относительно группы преобразований (1.12) означает, что равенство (1.22) выполняется с точностью до бесконечно малой величины порядка выше, чем ε. Условие инфинитезимальной инвариантности функционала действия, к сожалению, не может быть выражено чисто как условие на «естественную» плотность лагранжиана. Далее условие инфинитезимальной инвариантности действия будет сформулировано как условие на вариации «естественной» плотности лагранжиана и вариации пространственно-временных координат.

Рассмотрим сначала однопараметрические преобразования (1), т.е. полагаем, что пространственно-временные координаты X^β не варьируются. Полная вариация полевой переменной φ^k в этом случае определяется как

$$\delta\varphi^k = \varepsilon\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}. \tag{1.23}$$

Поскольку дифференцирования по пространственно-временным координатам и параметру ε перестановочны, операторы ∂_β и δ также перестановочны

$$\delta\partial_\beta = \partial_\beta\delta. \tag{1.24}$$

В случае, когда лагранжиан $\mathcal{L}$ зависит от градиентов переменных поля порядка не выше первого, вариациям физических полей φ^k при неварьируемых пространственно-временных координатах отвечает вариация действия ([9, с. 152; 15, p. 223, 224]):

$$\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\delta\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\delta\varphi^k)\right\}d^4X,$$

или, выделяя дивергентное слагаемое, —

$$\delta\Im = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right\} \delta\varphi^k d^4X + \int \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \delta\varphi^k \right) d^4X. \tag{1.25}$$

Исчезающим как на границе пространственной области интегрирования, так и на границах временного интервала вариациям физических полей φ^k будет отвечать вариация действия

$$\delta\Im = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right\} \delta\varphi^k d^4X. \tag{1.26}$$

Стационарность действия (при произвольных допустимых вариациях поля) необходимо влечет уравнения Эйлера – Лагранжа (уравнения поля):

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} = 0. \tag{1.27}$$

Действительное физическое поле (при условии его гладкости) должно удовлетворять системе уравнений Эйлера – Лагранжа.

Обобщение уравнений Эйлера – Лагранжа на тот случай, когда плотность лагранжиана зависит от частных производных порядка выше первого, есть[16]

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \dots = 0. \tag{1.28}$$

Оператор $\mathcal{E}_k$, определенный согласно (1.28), называется оператором Эйлера (его применение к лагранжиану дает так называемую вариационную производную лагранжиана). Вариационная производная лагранжиана есть 1-ковариантный пространственный вектор.

Структура дифференцирований в операторе Эйлера становится более понятной и обозримой, если ввести обозначения

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^l} = \underset{0}{\partial_l}, \qquad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)} = \underset{s}{\partial_l^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}} \tag{1.29}$$

и записать его символически в форме (см. также [15, p. 223])

$$\mathcal{E}_l = \sum_{s\geq 0} (-1)^s \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\dots\partial_{\alpha_s} \underset{s}{\partial_l^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s}}. \tag{1.30}$$

Здесь и в дальнейшем в такого рода суммах при $s = 0$ подразумевается слагаемое $\underset{0}{\partial_l}$.

Уравнения Эйлера – Лагранжа (1.28) *ковариантны* относительно группы преобразований (1), т.е. при заменах пространственно-временных координат X^β. Действительно, прямой расчет показывает, что[17]

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \det\left(\frac{\partial \widetilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha}\right) \widetilde{\mathcal{E}}_k(\widetilde{\mathcal{L}}), \tag{1.31}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{E}}_k(\widetilde{\mathcal{L}}) \equiv \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \widetilde{\varphi}^k} - \widetilde{\partial}_\beta \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\varphi}^k)} + \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\beta \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\varphi}^k)} - \dots,$$

$$\det\left(\frac{\partial \widetilde{X}^\lambda}{\partial X^\mu}\right) \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \dots, \widetilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \dots, X^\beta) \tag{1.32}$$

при условии, что переменные φ^k, X^β и $\widetilde{\varphi}^k$, $\widetilde{X}^\beta$ связаны формулами преобразования (1). На основании (1.31) можно заключить, что выполнение уравнения $\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0$ влечет выполнение уравнения $\widetilde{\mathcal{E}}_k(\widetilde{\mathcal{L}}) = 0$

[16]Мы не будем в деталях развивать далее теорию поля для лагранжиана, зависящего от градиентов полевых переменных φ^k, порядка выше первого, а ограничимся лишь минимумом необходимых в прикладном аспекте формул. По поводу соответствующего обобщения см., например, [5, p. 116, 117].

[17]См., например, [7, с. 213–221]. Инвариантности функционала действия относительно группы преобразований (1) при этом не требуется. Более того сама замена переменных (1) может и не быть однопараметрической группой.

и обратно. Следовательно, в новых переменных *правило* составления уравнений Эйлера – Лагранжа не изменяется: они составляются по той же самой схеме, что и в исходных переменных, но для преобразованной согласно (1.32) «естественной» плотности лагранжиана.

Ковариантность уравнений Эйлера – Лагранжа относительно более широкой группы преобразований (1.14) рассмотрена, например, в [14, с. 323–327; 15, p. 230–235]. Заметим, что в литературе чаще всего говорят (что противоречит действительному положению дел) об инвариантности уравнений Эйлера – Лагранжа. Строгое определение инвариантности системы уравнений относительно группы преобразований известно из группового анализа и означает сохранение формы уравнений при их преобразовании к новым переменным согласно (1.14). Относительно произвольной однопараметрической геометрической группы преобразований (1.14) уравнения Эйлера – Лагранжа, вообще говоря, не инвариантны, но они ковариантны, поскольку в новых переменных не изменяется правило их составления.

Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (1.12) определены:

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta (X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \qquad \delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k (\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \tag{1.33}$$

Полная вариация полевой переменной φ^k в данной точке пространства – времени складывается из изменения поля вследствие изменения его функциональной зависимости и изменения, вызванного перемещением δX^β в близлежащую точку пространства – времени. Поэтому мы определяем частичную вариацию $\overline{\delta}\varphi^k$ полевой переменной φ^k с помощью соотношения

$$\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha. \tag{1.34}$$

В современной теории поля частичную вариацию полевой переменной часто называют локальной (а также функциональной) вариацией, а полную вариацию — субстанциональной. Второе слагаемое в правой части соотношения (1.34) можно назвать конвективной вариацией. В разд. 9 будет показано, что частичная вариация поля под действием однопараметрической геометрической группы преобразований соответствует характеристике инфинитезимального оператора группы.

Как уже отмечалось, инфинитезимальная инвариантность функционала действия относительно группы преобразований (1.12) означает, что равенство (1.22) выполняется с точностью до бесконечно малой величины, порядка выше, чем ε. Так как

$$\det \left(\frac{\partial \widetilde{X}^\beta}{\partial X^\alpha} \right) = 1 + \frac{\partial (\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} + o(\varepsilon),$$

то критерий инфинитезимальной инвариантности функционала действия имеет вид

$$\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial (\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \tag{1.35}$$

где вариация лагранжиана $\delta\mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta). \tag{1.36}$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, то вариация лагранжиана, очевидно, равна

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\gamma} \right)_{\text{expl}} \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \delta \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \delta (\partial_\beta \varphi^k).$$

Учитывая затем формулу для полной вариации первых градиентов поля $\delta(\partial_\beta \varphi^k) = \partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) + (\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)\delta X^\gamma$, а также $\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma \varphi^k)\delta X^\gamma$, получаем

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_\gamma \mathcal{L}) \delta X^\gamma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} \overline{\delta} \varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \varphi^k)} \partial_\beta (\overline{\delta} \varphi^k), \tag{1.37}$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right). \tag{1.38}$$

Оценка приращения (1.36) в случае, когда лагранжиан зависит от градиентов поля более высокого порядка, будет дана в разд. 9.

Полное варьирование действия (при условии, что «естественная» плотность лагранжиана зависит от градиентов поля порядка не выше первого) по пространственно-временным координатам X^β и физическим полям φ^k приводит к следующему результату [7, с. 246–248; 10, p. 168–176]:

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{S} &= \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta}(\mathcal{L}\delta X^\beta)\right\}d^4X = \\ &= \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right\}\overline{\delta}\varphi^k d^4X + \int\partial_\beta\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta\right\}d^4X.\end{aligned} \tag{1.39}$$

Если функционал $\mathfrak{S}$ инвариантен[18] относительно группы преобразований (1.12), то его первая вариация (1.39), соответствующая варьированию координат и полей по закону (1.12), очевидно, будет равна нулю.

Сделаем одно важное замечание по поводу вариации действия в (1.10) и (1.39). В (1.39) варьирование действия отвечает одной вполне конкретной группе преобразований координат и полей согласно (1.12). Вариационное уравнение (1.10) должно выполняться при произвольных допустимых однопараметрических преобразованиях полей, не обязательно являющихся однопараметрическими группами. Пространственно-временные координаты при этом считаются не подлежащими никаким преобразованиям.

Инфинитезимальный критерий инвариантности функционала действия (1.35) относительно геометрической группы преобразований (1.12) может быть заменен более слабым условием, следуя [21],

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\alpha)}{\partial X^\alpha} = \varepsilon\frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma} \tag{1.40}$$

так, что первая вариация действия будет вычисляться в виде $\delta\mathfrak{S} = \varepsilon\int(\partial_\gamma B^\gamma)d^4X$, где в правой части подынтегральное выражение представляет собой дивергенцию векторного поля B^γ.

Здесь 1-контравариантный отсчетный вектор B^γ может зависеть от пространственно-временных координат и полей (включая и градиенты поля порядка равного, большего или меньшего, чем входящие в лагранжиан) $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\beta\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\nu)$.

Группа преобразований (1.12) в случае, когда выполняется (1.40) с некоторым вектором B^γ, называется инфинитезимальной дивергентной симметрией функционала действия (см. [14, с. 358]).

Формула (1.39) остается справедливой и для более широкого класса преобразований, в которые пространственно-временные координаты X^β и физические поля φ^k входят уже совершенно симметрично

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \quad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \tag{1.41}$$

где, по-прежнему, $\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \quad \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k$.

Инвариантность функционала действия относительно обобщенных геометрических преобразований (1.41) исследуется в разд. 6.

2. ТЕОРЕМА НЕТЕР ДЛЯ ИНВАРИАНТНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Теорема Нетер (по поводу доказательства см. [7, с. 248–250; 10, p. 176–178; 11, с. 377–386]) является классическим результатом теории поля и устанавливает закон сохранения, соответствующий однопараметрической группе геометрических преобразований, не изменяющих функционала

[18] Или, делая тем самым более общее предположение, — инфинитезимально инвариантен.

действия (или изменяющих его, но на бесконечно малую величину порядка выше, чем ε) любой 4-области пространственно-временного многообразия. Другими словами, инвариантность функционала действия (вариационная симметрия действия) относительно однопараметрической геометрической группы преобразований (1.12)

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\widetilde{X}^\beta, \widetilde{\varphi}^k)$$

порождает некоторый дивергентный закон сохранения[19].

Пока мы рассмотрим ограниченный вариант теоремы Нетер для геометрических преобразований (1.12) и случая, когда лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого.

Требование инвариантности действия прежде всего выражает основные свойства пространства – времени, хотя отнюдь и не ограничивается лишь этими последними свойствами.

Априорно можно указать следующие преобразования 4-пространства Минковского, относительно которых действие инвариантно (и, следовательно, инвариантны уравнения поля):

1) трансляции начала координат (однородность 4-пространства – времени);

2) вращения 4-пространства – времени, содержащие как обычные повороты в 3-пространстве, так и преобразования Лоренца (H.A. Lorentz) в собственном смысле этого слова (изотропия пространства и специальный принцип относительности);

3) зеркальные отражения (инверсии) и обращение времени.

Произвольные точечные преобразования координат в пространстве Минковского, т.е. переход к криволинейным координатам (общий принцип относительности — отсутствие преимущественных систем отсчета), не являются, вообще говоря, симметриями действия и уравнений поля. Но можно вести речь о ковариантности уравнений поля по отношению к указанным преобразованиям.

Перечисленным преобразованиям, относительно которых уравнения поля ковариантны, соответствуют фундаментальные законы сохранения, имеющие смысл сохранения импульса, момента импульса и энергии (всего десять законов сохранения). Если удается разыскать иные группы инвариантности функционала действия и получить дополнительный нетривиальный закон сохранения, то его принято называть существенным[20].

Исходным пунктом рассуждений является полученная ранее формула для полной вариации действия, отвечающей заданной однопараметрической группе преобразований (1.12).

Поскольку физические полевые величины φ^k в любом случае обеспечивают стационарность действия, то уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} = 0$$

должны удовлетворяться и, следовательно, вариацию действия (1.39) можно вычислить в виде

$$\delta\Im = \int \partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \bar{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\} d^4X, \tag{2.1}$$

[19]Общая теория законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, следующих из существования геометрических вариационных симметрий действия, излагается, например, в [11, с. 377–386; 13, с. 337–362]. Дивергентный закон сохранения является обобщением известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений понятия первого интеграла и всегда имеет форму дивергентного дифференциального уравнения $\partial_\beta J^\beta = 0$, где $J^\beta(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\mu)$ — 1-ковариантный пространственно-временной 4-вектор, которое должно удовлетворяться для любого решения уравнений поля. Тривиальность закона сохранения означает, что уравнение $\partial_\beta J^\beta = 0$ удовлетворяется тождественно для любых физических полей φ^k; вектор J^β в этом случае называется нулевой дивергенцией. Тривиальный закон сохранения никак не связан с той или иной системой уравнений поля, поскольку выполняется на любом решении произвольно выбранной системы дифференциальных уравнений в частных производных и поэтому не несет никакой информации о решениях уравнений поля. Общая форма тривиального закона сохранения известна (см., например, [13, с. 341–343]) в силу известной дифференциальной структуры нулевой дивергенции в пределах звездообразных областей: $J^\beta = \partial_\sigma L^{\sigma\beta}$, где $L^{\sigma\beta} = L^{\sigma\beta}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\mu)$ — антисимметричный тензор второго ранга ($L^{\sigma\beta} = -L^{\beta\sigma}$).

[20]Часто оказывается невозможным установить физический смысл дополнительных существенных законов сохранения. Что касается теории упругости, то уже не поддаются физической интерпретации законы сохранения, следующие из изотропии пространства и возможности преобразования масштаба координатных осей.

или, учитывая связь между частичной и полной вариацией поля φ^k, —

$$\delta\Im = \int \partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta\varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha \right) + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\} d^4X. \tag{2.2}$$

Вводя 1-контравариантный отсчетный четырехмерный вектор

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \left(\delta\varphi^k - \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha} \delta X^\alpha \right) + \mathcal{L}\delta X^\beta \right\}, \tag{2.3}$$

вариацию действия, отвечающую однопараметрической группе преобразований (1.12), можно также представить в форме

$$\delta\Im = \varepsilon \int \partial_\beta J^\beta d^4X. \tag{2.4}$$

Не составляет труда получить для вектора J^β вместо (2.3) следующее выражение:

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \delta\varphi^k + \left(\mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta X^\alpha \right\}. \tag{2.5}$$

Воспользуемся теперь предположением об инвариантности функционала действия относительно однопараметрической группы преобразований (1.12) (достаточно, однако, предположить, что функционал действия не изменяет своей величины с точностью до малых порядка выше, чем ε):

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\widetilde{X}^\beta, \widetilde{\varphi}^k).$$

Ясно, что тогда в (2.4) следует полагать $\delta\Im = 0$ и соответствующий закон сохранения имеет следующую четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, поток 4-вектора J^β через любую поверхность, замкнутую в пространстве – времени, равен нулю:

$$\oint\limits_{\partial} J^\beta N_\beta dA = 0. \tag{2.7}$$

Теорема Нетер в принципе не может дать более общего закона сохранения, чем (2.6), где четырехмерный вектор J^β удобно представить в форме

$$-J^\beta = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ S^{\beta\cdot}_{\cdot k} \delta\varphi^k + P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} \delta X^\alpha \right\}, \tag{2.8}$$

обозначив через $S^{\beta\cdot}_{\cdot k}$ и $P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ противоположные величины коэффициентов при полных вариациях $\delta\varphi^k$ и δX^α соответственно в (2.5).

Из каждого соотношения (2.7) может быть получен инвариант поля, существующего в неограниченной среде, не изменяющий своего значения с течением времени. Действительно, рассмотрим четырехмерную область в форме цилиндра, основания которого $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ есть гиперплоскости, перпендикулярные оси времени. Поток 4-вектора J^β через границу этой области равен нулю. Если физические поля достаточно быстро затухают на бесконечности, то, удаляя боковую поверхность цилиндра в бесконечность, находим, что

$$\int\limits_{X^4=C_1} J^\beta N_\beta d^3X + \int\limits_{X^4=C_2} J^\beta N_\beta d^3X = 0.$$

Поскольку на гиперплоскостях $X^4 = C_1$, $X^4 = C_2$ компоненты нормали $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, $N_3 = 0$ и соответственно $N_4 = -1$, $N_4 = 1$, то

$$\int\limits_{X^4=C_1} J^4 d^3X = \int\limits_{X^4=C_2} J^4 d^3X,$$

т.е. интеграл по неограниченному 3-пространству

$$\int J^4 d^3X \tag{2.9}$$

не зависит от времени.

Ясно, что полученный только что результат обобщается на случай произвольной гиперповерхности в пространстве Минковского $X^4 = X^4(X^1, X^2, X^3)$, края которой уходят в бесконечно удаленную точку: интеграл

$$\int\limits_{X^4=X^4(X^1,X^2,X^3)} J^\beta N_\beta \, dA \tag{2.10}$$

не зависит от формы указанной гиперповерхности.

Компоненты вектора J^β (вектор тока), очевидно, без проблем вычисляются по формуле (2.3), если известна однопараметрическая группа инвариантности функционала действия[21]:

$$J^\beta = \mathcal{L}\left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}\left[\left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\alpha(X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha}\right]. \tag{2.11}$$

Заметим, что каждой инфинитезимальной дивергентной симметрии действия, которая определяется обобщенным условием (1.40), соответствует закон сохранения

$$\partial_\beta(J^\beta - B^\beta) = 0. \tag{2.12}$$

3. ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ФУНКЦИОНАЛА ДЕЙСТВИЯ

Мы рассмотрим основные группы инвариантности гамильтонова действия и формулировку соответствующих законов сохранения. Изложение в формальном плане будет в основном опираться на материал, представленный в [2, 10]. Законы сохранения для статического упругого поля, следующие из теоремы Нетер, обсуждаются также в [14, с. 355–358].

3.1. Преобразования сдвига в пространстве – времени

Зафиксируем отсчетный 4-индекс α и рассмотрим однопараметрическую группу трансляций пространства – времени вдоль прямолинейной α-оси:

$$X^\beta \to \widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon \delta^\beta_\alpha. \tag{3.1}$$

Такого рода преобразования включают сдвиги временной координаты.

Функционал действия любой 4-области пространственно-временного многообразия должен быть абсолютно инвариантен относительно группы трансляций пространства – времени, если плотность лагранжиана явно не зависит от координат X^β (т.е. $\partial^{\mathrm{expl}}_\alpha \mathcal{L} = 0$), следовательно, для координатного направления α 4-вектор $J^\beta_{(\alpha)} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$, где

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha \varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}, \tag{3.2}$$

и канонический закон сохранения, соответствующий группе трансляций пространства – времени, есть

$$\partial_\beta T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = 0. \tag{3.3}$$

Полученный канонический закон сохранения может быть найден также с помощью следующего рассуждения. Если лагранжиан явно не зависит от пространственно-временных координат X^β, то, вычисляя полную поизводную, находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^j}\frac{\partial \varphi^j}{\partial X^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \varphi^s)}\frac{\partial}{\partial X^\beta}\frac{\partial \varphi^s}{\partial X^\gamma}$$

[21] Известны функциональные зависимости $\mathcal{X}^\beta(\cdot,\cdot)$, $\Phi^k(\cdot,\cdot,\cdot)$.

и, заменяя в этом уравнении производную лагранжиана по полевой переменной согласно уравнениям Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \varphi^j)},$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta} = \frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left(\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial X^\beta} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \varphi^j)} \right),$$

откуда немедленно получаем

$$\frac{\partial}{\partial X^\gamma} \left(\mathcal{L}\delta^\gamma_\beta - (\partial_\beta \varphi^j) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \varphi^j)} \right) = 0.$$

Заметим, что тензор $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ не симметричен, однако само его выражение (3.2), обеспечивающее выполнение закона сохранения (3.3), не уникально: трансформируя тензор $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ по формуле $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + \partial_\gamma B^{\gamma\beta\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}$, где тензор $B^{\gamma\beta\cdot}_{\cdot\cdot\alpha} = B^{\gamma\beta\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}(\varphi^k, \partial_\lambda \varphi^k, \partial_\lambda \partial_\mu \varphi^k, \ldots, X^\nu)$ антисимметричен при перестановке контравариантных индексов $B^{\gamma\beta\cdot}_{\cdot\cdot\alpha} = -B^{\beta\gamma\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}$, также получаем закон сохранения:

$$\partial_\beta (T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + \partial_\gamma B^{\gamma\beta\cdot}_{\cdot\cdot\alpha}) = 0.$$

Указанную трансформацию тензора $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ можно использовать для построения симметричного тензора, для которого будет по-прежнему справедлив закон сохранения вида (3.3).

Если плотность лагранжиана зависит явно от пространственно-временных координат X^β, то дивергентный закон сохранения нарушается, и для 4-вектора $J^\beta_{(\alpha)}$ имеем закон «сохранения»:

$$\partial_\beta T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}}. \tag{3.4}$$

Для доказательства достаточно заметить, что, с одной стороны,

$$\delta \Im = \varepsilon \int \partial_\beta J^\beta_{(\alpha)} d^4 X, \tag{3.5}$$

а с другой — непосредственное вычисление вариации действия приводит к

$$\delta \Im = \varepsilon \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} d^4 X. \tag{3.6}$$

Сравнивая (3.5) и (3.6), приходим к (3.4).

Компоненты канонического 4-тензора $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ имеют размерность плотности энергии[22]. Тензор $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ часто называют также тензором энергии – импульса (см., например, [2, с. 105–109, 345–349]), поскольку канонические уравнения баланса энергии ($\alpha = 4$) и импульса являются непосредственным следствием канонического закона «сохранения» (3.4), точнее не сохранения (применительно к уравнению (3.4) лучше говорить об уравнении баланса).

Действительно, чтобы, например, вывести канонические уравнения баланса импульса, заметим сначала, что три первых уравнения (3.4) можно представить следующим образом:

$$\partial_4 T^{4\cdot}_{\cdot\alpha} - \partial_\beta P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} \right)_{\text{expl}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \tag{3.7}$$

где $P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = -T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ — тензор напряжений Эшелби. Затем, учитывая $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4 x^k)} = \rho_{\text{R}} v_k$, преобразуем уравнение (3.7) к виду

$$-\rho_{\text{R}} \partial_4 (v_k \partial_\alpha x^k) - \partial_\beta P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = f^{\text{inh}}_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

[22]Этот тензор называется каноническим тензором энергии [22, с. 143, 144]. Обратим внимание читателя на тот факт, что, согласно определению канонического тензора энергии, его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 1-ковариантное.

обозначая при этом $v^k = \partial_4\varphi^k$, что означает, что скорость есть 1-контравариантный пространственный вектор, и

$$f_\alpha^{\mathrm{inh}} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\right)_{\mathrm{expl}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Принимая во внимание далее, что

$$-\mathcal{P}_\alpha = \rho_{\mathrm{R}} v_k \partial_\alpha \varphi^k, \tag{3.8}$$

приходим к уравнению баланса канонического импульса

$$\partial_4\mathcal{P}_\alpha - \partial_\beta P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = f_\alpha^{\mathrm{inh}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{3.9}$$

Здесь производные по времени вычисляются при фиксированных лагранжевых координатах.

Уравнение (3.8) ясно указывает на то, что канонический импульс — 1-ковариантный отсчетный вектор. Это уравнение можно также представить в виде $\mathcal{P}_\alpha = \rho_{\mathrm{R}} v_\alpha$, где $v_\alpha = -v_k\partial_\alpha\varphi^k$ есть отсчетный вектор скорости, который в силу определения представляет собой 1-ковариантный отсчетный вектор[23].

Опираясь на результаты, изложенные в предыдущем разделе, заключаем, что 1-ковариантный отсчетный вектор

$$P_\beta = -\int\limits_{X^4 = X^4(X^1, X^2, X^3)} T^{\gamma\cdot}_{\cdot\beta} N_\gamma \, dA$$

не зависит от координаты X^4. Этот вектор обычно называют полным 4-импульсом поля (или волновым импульсом поля).

Определяя «естественную» плотность функции Гамильтона,

$$\mathcal{H} = (\partial_4\varphi^j)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^j)} - \mathcal{L}, \tag{3.10}$$

для компоненты P_4 полного 4-импульса поля находим

$$P_4 = \int\limits_{X^4 = \mathrm{const}} \mathcal{H} d^3X, \tag{3.11}$$

т.е. эта компонента представляет собой полную энергию поля и, поскольку значение интеграла не зависит от положения гиперповерхности $X^4 = \mathrm{const}$, полная энергия поля сохраняется. Здесь d^3X — «естественный» элемент объема трехмерного пространства.

На основании (3.10) можно заключить, что выполняется равенство $T^{4\cdot}_{\cdot 4} = -\mathcal{H}$.

Закон «сохранения» (3.4) при $\alpha = 4$ приводит к уравнению

$$\partial_4 T^{4\cdot}_{\cdot 4} + \partial_\beta T^{\beta\cdot}_{\cdot 4} = \partial_4^{\mathrm{expl}}\mathcal{L} \qquad (\beta = 1, 2, 3)$$

или, поскольку $T^{\beta\cdot}_{\cdot 4} = -v^k\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} = v^k S^{\beta\cdot}_{\cdot k}, \quad S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = -\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}$, получаем уравнение баланса энергии

$$\partial_4\mathcal{H} - \partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot k} v^k) = -\partial_4^{\mathrm{expl}}\mathcal{L} \qquad (k = 1, 2, 3; \ \ \beta = 1, 2, 3).$$

Здесь $Q^\beta = S^{\beta\cdot}_{\cdot k} v^k$ есть вектор Умова – Пойнтинга. Его естественные компоненты 1-контравариантные отсчетные.

[23] Не следует путать компоненты v^k и v_α, представляющие различные векторы, — пространственную и отсчетную скорости соответственно.

3.2. Преобразования поворота трехкомпонентного поля

Функционал действия $\Im$, если отождествить полевые переменные φ^k $(k = 1, 2, 3)$ с декартовыми эйлеровыми координатами x_k, в силу принципа объективности (галилеевой инвариантности, принципа относительности Галилея) должен быть абсолютно инвариантен относительно преобразований поворота:

$$\widetilde{x}_k = Q_{kj}x_j, \tag{3.12}$$

где Q_{kj} — компоненты ортогонального тензора второго ранга. Пространственно-временные координаты при этом не подвергаются никакому преобразованию, т.е. $\widetilde{X}^\gamma = X^\gamma$ $(\gamma = 1, 2, 3, 4)$.

Инвариантность действия относительно поворотов эйлерова координатного репера является проявлением изотропии эйлерова координатного пространства, т.е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Выясним прежде всего условия, при которых действие будет абсолютно инвариантно относительно преобразований поворота трехкомпонентного поля x_k.

Предполагая, что в силу галилеевой инвариантности относительно сдвигов эйлеровых координат лагранжиан не зависит явно от x_k, можно считать, что абсолютная инвариантность действия относительно преобразований поворота (3.12) означает выполнение равенства

$$\mathcal{L}(\partial_\alpha\widetilde{x}_k, \partial_t\widetilde{x}_k, X^\beta, t) = \mathcal{L}(\partial_\alpha x_k, \partial_t x_k, X^\beta, t) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{3.13}$$

для произвольного ортогонального тензора второго ранга Q_{kj}, т.е.

$$\mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t) = \mathcal{L}(\partial_\alpha x_k, \partial_t x_k, X^\beta, t) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \tag{3.14}$$

Последнее обстоятельство позволяет заключить, что выражение $\mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t)$ на самом деле не зависит от Q_{kj}, если только $\Phi_{sl} = Q_{sm}Q_{lm} - \delta_{sl} = 0$. Поэтому можно сформулировать экстремальную задачу $\mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t) \to \mathrm{extremum}$, т.е.

$$\frac{\partial\mathcal{L}(Q_{kj}\partial_\alpha x_j, Q_{kj}\partial_t x_j, X^\beta, t)}{\partial Q_{kj}} = 0$$

при ограничении $\Phi_{sl} = Q_{sm}Q_{lm} - \delta_{sl} = 0$. Вводя множители Лагранжа λ_{sl}, сформулируем условие экстремальности функции Лагранжа $\mathcal{L} - \lambda_{sl}\Phi_{sl}$ в форме

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{kj}} - \lambda_{sl}\frac{\partial\Phi_{sl}}{\partial Q_{kj}} = 0,$$

откуда, сворачивая с Q_{ij}, находим

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{kj}}Q_{ij} - \lambda_{sl}(\delta_{sk}\delta_{jm}Q_{lm} + \delta_{lk}\delta_{mj}Q_{sm})Q_{ij} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{kj}}Q_{ij} = \lambda_{ki} + \lambda_{ik}.$$

Следовательно, тензор второго ранга $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{kj}}Q_{ij}$ симметричен. Поскольку для произвольного ортогонального тензора второго ранга Q_{ij}

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q_{kj}}Q_{ij} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\widetilde{x}_k)}(\partial_\alpha\widetilde{x}_j) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t\widetilde{x}_k)}(\partial_t\widetilde{x}_j)\right)Q_{ij},$$

то симметричной будет правая часть этого равенства, которая при $Q_{ij} = \delta_{ij}$ будет равна

$$M_{ik} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x_k)}(\partial_\alpha x_i) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t x_k)}(\partial_t x_i) \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3.15}$$

Таким образом, тензор второго ранга M_{ik} симметричен.

Замечая, что тензор второго ранга $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t x_k)}(\partial_t x_i) = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_k}v_i = \rho_{\mathrm{R}}v_iv_k$ $(v_k = \partial_t x_k)$ симметричен, приходим к выводу, что тензор $(\partial_\alpha x_i)\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x_k)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ также симметричен. Он лишь скалярным множителем отличается от тензора напряжений Коши, определяемого согласно

$$T^{l\cdot}_{\cdot k} = -J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3). \tag{3.16}$$

Итак, действие абсолютно инвариантно относительно поворотов полевых переменных при выполнении следующего условия симметрии:

$$(\partial_\alpha x_i)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x_k)} = (\partial_\alpha x_k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x_i)} \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3.17}$$

Найдем законы сохранения, соответствующие инвариантности действия относительно поворотов трехкомпонентного поля x_k.

Бесконечно малый поворот полевых переменных φ^k можно задать линейными преобразованиями:

$$\widetilde{X}^\beta = X^\beta \qquad (\beta = 1, 2, 3, 4), \widetilde{x}_k = x_k + \omega_{kj} x_j \qquad (k, j = 1, 2, 3),$$

где $\omega_{kj} = -\omega_{jk}$ $(k, j = 1, 2, 3)$ есть антисимметричный второго ранга, компоненты которого выступают как тензорные параметры группы малых поворотов. Естественные компоненты этого тензора — 3-пространственные.

Шесть величин ω_{kj} $(k \neq j)$ связаны соотношениями $\omega_{kj} = -\omega_{jk}$, следовательно, среди них имеется лишь три независимых. В качестве независимых тензорных параметров в (3.18) возьмем те ω_{kj}, для которых $k < j$.

Ясно, что вариации эйлеровых координат вычисляются как $\delta x_k = \dfrac{\partial \widetilde{x}_k}{\partial \omega_{js}}\omega_{js} = \omega_{ks} x_s$ или

$$\delta x_k = \sum_{l<s} \omega_{ls}(\delta_{kl} x_s - \delta_{ks} x_l).$$

Здесь суммирование производится по всем парам индексов l, s: $l < s$, $l, s = 1, 2, 3$.

Ясно, что $\delta X^\beta = 0$ $(\beta = 1, 2, 3, 4)$.

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора J^β в виде

$$J^\beta_{(ls)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta x_k)}(\delta_{kl} x_s - \delta_{ks} x_l) \qquad (k, l, s = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2, 3, 4). \tag{3.18}$$

Полагая

$$-S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta x_k)} \qquad (k = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2, 3, 4), \tag{3.19}$$

имеем

$$J^\beta_{(ls)} = -(S^{\beta\cdot}_{\cdot l} x_s - S^{\beta\cdot}_{\cdot s} x_l) \qquad (l, s = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2, 3, 4).$$

Поскольку для $J^\beta_{(ls)}$ $(l, s = 1, 2, 3)$ выполняется свойство антисимметрии по нижним индексам, то можно ввести эквивалентный пространственный 3-вектор

$$J^\beta_{(k)} = e_{ksl} S^{\beta\cdot}_{\cdot s} x_l. \tag{3.20}$$

Соответствующий группе вращений полевых переменных закон сохранения есть

$$\partial_\beta J^\beta_{(k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{3.21}$$

Преобразуем его сначала к виду

$$\partial_\alpha J^\alpha_{(k)} + \partial_4 J^4_{(k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3),$$

затем, принимая во внимание, что $S^{4\cdot}_{\cdot s} = -\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4 x_s)} = -\rho_{\mathrm{R}} v_s$, $J^4_{(k)} = -e_{ksl}\rho_{\mathrm{R}} v_s x_l$, получаем

$$\partial_\alpha(e_{ksl}x_l S^{\alpha\cdot}_{\cdot s}) - \partial_4(e_{ksl}\rho_{\mathrm{R}} v_s x_l) = 0 \qquad (k, s, l = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, 3).$$

Это закон сохранения момента количества движения. Вектор $e_{kls}\rho_{\mathrm{R}} x_l v_s$ представляет собой момент количества движения поля (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии). Его часто называют также вращательным моментом, или угловым моментом (angular momentum) поля.

3.3. Преобразования поворота 4-пространства – времени

Рассмотрим далее группу вращений пространственно-временного многообразия X^β. Функционал действия $\Im$ должен быть абсолютно инвариантен относительно этой группы преобразований, если в качестве модели пространственно-временного многообразия выступает пространство Минковского.

Линейные преобразования пространства Минковского, сохраняющие неизменными его метрику, называются преобразованиями Лоренца. Преобразования Лоренца включают повороты прямоугольных реперов в этом пространстве. Введем в пространстве Минковского прямоугольную координатную систему X_β. Поворот прямоугольной системы координат X_β в 4-пространстве Минковского порождает некоторый псевдоортогональный тензор второго ранга $\mathbf{\Lambda}$, представляемый в выбранной системе координат псевдоортогональной матрицей. Признак псевдоортогональности тензора второго ранга выражается соотношением $\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{E}$, или $\Lambda_{\alpha\nu}E_{\alpha\lambda}\Lambda_{\lambda\mu} = g_{\nu\mu}$.

Псевдоединичный тензор $\mathbf{E}$ в прямоугольной системе координат пространства Минковского имеет компоненты (по α не суммировать) $E_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta}$.

Итак, конечный поворот пространственно-временного многообразия может быть задан псевдоортогональным тензором второго ранга[24] $X_\gamma \to \widetilde{X}_\gamma = \Lambda_{\gamma\nu}X_\nu$. Естественные компоненты псевдоортогонального тензора второго ранга в пространстве Минковского — отсчетные.

Повороты 4-пространства Минковского образуют группу по умножению[25], зависящую от шести независимых вещественных параметров.

Бесконечно малое вращение пространства Минковского можно задать линейными преобразованиями

$$\widetilde{X}_\beta = X_\beta + \Omega_{\beta\sigma}X_\sigma, \tag{3.22}$$

где $\Omega_{\beta\sigma} = -\Omega_{\sigma\beta}$ есть антисимметричный 4-тензор второго ранга, компоненты которого выступают как тензорные параметры группы малых вращений. Естественные компоненты этого тензора — отсчетные.

Двенадцать величин $\Omega_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) связаны соотношениями $\Omega_{\alpha\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}$, следовательно, среди них имеется лишь шесть независимых. В качестве независимых возьмем те $\Omega_{\beta\alpha}$, для которых $\beta < \alpha$.

Ясно, что вариации пространственно-временных координат вычисляются следующим образом:

$$\delta X_\beta = \frac{\partial \widetilde{X}_\beta}{\partial \Omega_{\gamma\sigma}}\Omega_{\gamma\sigma} = \Omega_{\beta\sigma}X_\sigma$$

или, поскольку $\delta X_\beta = \sum\limits_{\gamma<\sigma}\delta_{\beta\gamma}X_\sigma\Omega_{\gamma\sigma} + \sum\limits_{\gamma>\sigma}\delta_{\beta\gamma}X_\sigma\Omega_{\gamma\sigma}$,

$$\delta X_\beta = \sum_{\gamma<\alpha}\Omega_{\gamma\alpha}(\delta_{\beta\gamma}X_\alpha - \delta_{\beta\alpha}X_\gamma).$$

Здесь суммирование производится по всем парам индексов γ, α: $\gamma < \alpha$.

Будем считать, что группа Лоренца действует лишь на пространственно-временные координаты (которые мы трактуем как переменные, связанные с отсчетной конфигурацией) и не действует на

[24]Теория псевдоортогональных тензоров второго ранга в многомерном псевдоевклидовом пространстве изложена, например, в уже цитированной кн.: *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.

[25]Эта группа называется группой Лоренца.

физические поля φ^k (координатное представление которых осуществляется в эйлеровой системе координат). Поэтому можно заключить, что $\delta\varphi^k = 0$.

Производя необходимые вычисления, находим компоненты 4-вектора J^β в виде

$$J^{\beta(\gamma\alpha)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^s)}\left[(\partial_\alpha\varphi^s)X_\gamma - (\partial_\gamma\varphi^s)X_\alpha\right] + \mathcal{L}(X_\alpha\delta_{\gamma\beta} - X_\gamma\delta_{\alpha\beta}).$$

Определим далее тензор третьего ранга $M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha}$ следующим образом:

$$M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = J^{\beta(\gamma\alpha)}. \tag{3.23}$$

Тензор $M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha}$ называется тензором момента количества движения. Он антисимметричен по индексам γ, α. Заметим, что каноническое определение тензора момента количества движения указывает также и на его естественное координатное представление — 1-контравариантное и 2-ковариантное.

Следует отметить, что тензор момента количества движения поля (3.23) выражается через тензор энергии – импульса (3.2) поля по формуле

$$M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}X_\alpha - T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}X_\gamma. \tag{3.24}$$

Соответствующий группе вращений пространства – времени закон сохранения имеет вид

$$\partial_\beta M^{\beta\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha} = 0. \tag{3.25}$$

Интеграл (2.9), величина которого не зависит от времени, в рассматриваемом случае будет иметь вид $\int M^{4\cdot\cdot}_{\cdot\gamma\alpha}\,d^3X$. Поскольку $T^{4\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{P}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$, где $\mathcal{P}_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3)$ — канонический импульс (псевдоимпульс), то полный момент канонического импульса поля $\int (X_\alpha\mathcal{P}_\gamma - X_\gamma\mathcal{P}_\alpha)\,d^3X$ $(\alpha,\gamma = 1,2,3)$ будет сохраняющейся величиной.

4. ОБОБЩЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Как было отмечено, пространственно-временные координаты и физические поля входят в группу преобразований (1.12), определяющую трансформацию переменных $(X^\beta,\varphi^k) \to (\widetilde{X}^\beta,\widetilde{\varphi}^k)$, несимметрично. С целью восстановления симметрии расширим определение однопараметрической группы (1.12), допуская более общие геометрические преобразования пространственно-временных координат и полевых переменных

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \qquad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \tag{4.1}$$

где, по-прежнему, мы считаем выполненными «начальные условия»

$$\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \qquad \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Геометрические преобразования (4.1) трансформируют физические поля $\varphi^j(X^\alpha)$ в новые поля $\widetilde{\varphi}^j(\widetilde{X}^\alpha)$. В самом деле, подставляя в первую группу соотношений (4.1) зависимости поля от пространственно-временных координат $\varphi^s = \varphi^s(X^\alpha)$, выразим из указанных соотношений пространственно-временные координаты X^α через «новые» координаты $\widetilde{X}^\alpha$; далее с помощью второй группы соотношений (4.1) выразим «новые» полевые переменные $\widetilde{\varphi}^k$ как функции «новых» координат $\widetilde{X}^\alpha$. Ясно, что затем можно пересчитать по обычным правилам дифференциального исчисления частные производные $\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k$, $\widetilde{\partial}_\sigma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k$, ... и вести речь о преобразовании пространственно-временных переменных $X^\gamma \to \widetilde{X}^\gamma$ и всего дифференциального комплекса

$$\begin{array}{c} \varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \ldots \\ \downarrow \\ \widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_\sigma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^s, \ldots \end{array} \tag{4.2}$$

в результате замены переменных (4.1).

Пространственно-временные координаты X^β и полевые переменные φ^s совершенно симметрично входят в закон преобразования (4.1). Это позволяет в некоторых случаях менять ролями зависимые и независимые переменные (или в физической терминологии — пространственно-временные координаты и полевые переменные), не меняя вариационной природы всей полевой теории. Так, можно построить математическое представление нелинейно упругого поля с помощью так называемого обратного описания деформации тела, развитого в работах Маженна (G.A. Maugin), которые подытожены в монографии [5] (см. также обзорную статью [23]). Обратное описание деформации сплошной среды и соответствующая вариационная формулировка нелинейной теории упругости (когда действие для упругого тела представлено на основе эйлерова описания и варьированию подвергается обратное отображение $X^\beta = X^\beta(x^k, t)$) неожиданно оказываются удобными для исследования сингулярного упругого поля и позволяют, в частности, с иных позиций взглянуть на энергетические соотношения нелинейной механики разрушения. Сам автор этого подхода называет обратное описание деформации описанием Пиола (G. Piola) и отмечает, что обратная вариационная формулировка в сущности совпадает с использованной Пиола еще в XIX в. [24, 25] (затем забытой и никогда на деле не применявшейся). Ясно, что и два традиционных способа описания деформации сплошного тела (в духе Лагранжа и Эйлера), и возможность расширения понятия группы инвариантности функционала действия и обобщенного варьирования — следствия универсального принципа двойственности и полной равноправности отсчетной и актуальной конфигураций тела в состоянии его деформации, пронизывающих механику деформируемых тел как единую теорию.

Действие

$$\Im = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) d^4 X \tag{4.3}$$

в результате обобщенного геометрического преобразования (4.1), определяющего замену переменных

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\widetilde{X}^\beta, \widetilde{\varphi}^k),$$

трансформируется в «эквивалентное» действие

$$\widetilde{\Im} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) d^4 \widetilde{X},$$

где $\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta) \to \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta)$ есть преобразование «естественной» плотности лагранжиана в соответствии с заменой переменных (4.1).

Интеграл действия как объект физического измерения должен сохранять свою величину при преобразовании (4.1), т.е. функционалы $\Im$ и $\widetilde{\Im}$ эквивалентны: $\widetilde{\Im} = \Im$.

Эквивалентность функционалов $\Im$ и $\widetilde{\Im}$ означает, что это на самом деле один и тот же объект, только представленный с помощью разных наборов переменных.

Если данное ранее равенство выполняется[26] также и после замены в $\widetilde{\Im}$

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) \to \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta),$$

обеспечивающей неизменность *формы* функционала действия, то говорят, что функционал действия абсолютно инвариантен относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1).

Ясно, что первая вариация функционала действия, абсолютно или инфинитезимально инвариантного относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1), отвечающая преобразованиям (4.1), равна нулю.

Принцип наименьшего действия сводится к условию равенства нулю первой вариации функционала действия на реальном физическом поле при всех допустимых вариациях переменных поля и

[26] Указанное равенство может выполняться не точно, а с невязкой порядка $o(\varepsilon)$. В этом случае речь должна идти об инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1).

неварьируемых пространственно-временных координатах. Из этого условия получаются уравнения поля в форме уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0. \tag{4.4}$$

Заметим, что всякая группа обобщенных геометрических вариационных симметрий функционала (4.3) будет также группой симметрий уравнений Эйлера – Лагранжа (4.4) (см., например, [14, с. 330, 331]; обратное утверждение неверно), т.е. система уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \cdots = 0,$$

где вместо символа $\mathcal{L}$ следует подставить $\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta)$, будет *эквивалентна* системе, имеющей в новых переменных (т.е. после ее пересчета к новым переменным, переход к которым определяется обобщенной геометрической симметрией действия (4.1)) в точности такую же *форму*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \widetilde{\varphi}^k} - \widetilde{\partial}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\varphi}^k)} + \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\varphi}^k)} - \cdots = 0,$$

где вместо символа $\mathcal{L}$ следует выполнить подстановку $\mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta)$.

Уравнения Эйлера – Лагранжа ковариантны относительно обобщенной геометрической замены переменных (4.1) и в случае наиболее общей формы «естественной» плотности лагранжиана (т.е. когда он зависит от градиентов поля сколь угодно высокого порядка). Действительно, можно показать [14, с. 323–327], что справедливо соотношение

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \mathcal{A}_{jk}\, \widetilde{\mathcal{E}}_k(\widetilde{\mathcal{L}}), \tag{4.5}$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} + \partial_\gamma \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma \partial_\beta \varphi^k)} - \cdots,$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_k(\widetilde{\mathcal{L}}) \equiv \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \widetilde{\varphi}^k} - \widetilde{\partial}_\beta \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\varphi}^k)} + \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\beta \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\varphi}^k)} - \cdots,$$

$$\mathcal{A}_{jk} = \det \begin{pmatrix} \partial_1 \mathcal{X}^1 & \cdots & \partial_{\beta^*} \mathcal{X}^1 & \dfrac{\partial \mathcal{X}^1}{\partial \varphi^j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 \mathcal{X}^{\beta^*} & \cdots & \partial_{\beta^*} \mathcal{X}^{\beta^*} & \dfrac{\partial \mathcal{X}^{\beta^*}}{\partial \varphi^j} \\ \partial_1 \Phi^k & \cdots & \partial_{\beta^*} \Phi^k & \dfrac{\partial \Phi^k}{\partial \varphi^j} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

∂_β — оператор *полного* дифференцирования по пространственно-временной координате X^β, β^* — число пространственно-временных координат,

$$\det\left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta}{\partial X^\alpha}\right) \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k, \partial_\gamma \partial_\alpha \varphi^k, \ldots, X^\beta)$$

при условии, что переменные φ^k, X^β и $\widetilde{\varphi}^k$, $\widetilde{X}^\beta$ связаны формулами преобразования (4.1) или даже более общего геометрического преобразования, не являющегося, например, однопараметрической группой. Поэтому системы уравнений Эйлера – Лагранжа $\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = 0$ и $\widetilde{\mathcal{E}}_k(\widetilde{\mathcal{L}}) = 0$ обе выполняются, если выполняется хотя бы одна из них[27].

[27] Формула преобразования оператора Эйлера в том случае, когда в замене переменных фигурируют частные производные полевых переменных, имеется в работе [14, с. 468, 469].

Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (4.1) определяются равенствами

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \qquad \delta \varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \tag{4.7}$$

Частичную вариацию $\overline{\delta}\varphi^k$ полевой переменной φ^k мы определяем с помощью соотношения

$$\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha. \tag{4.8}$$

Условие инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1) имеет вид

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \tag{4.9}$$

где вариация лагранжиана $\delta\mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \dots, \widetilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta).$$

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, то вариация лагранжиана равна

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) \tag{4.10}$$

или в несколько преобразованной форме —

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right). \tag{4.11}$$

Полная вариация действия (при условии, что «естественная» плотность лагранжиана зависит от градиентов поля порядка не выше первого), отвечающая полному его варьированию по пространственно-временным координатам X^β и полевым переменным φ^k в соответствии с (4.1), вычисляется в виде

$$\begin{gathered}\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta}(\mathcal{L}\delta X^\beta)\right\}d^4X = \\ = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right\}\overline{\delta}\varphi^k d^4X + \int\partial_\beta\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta\right\}d^4X.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Если функционал действия $\Im$ абсолютно инвариантен[28] относительно группы преобразований (4.1), то его первая вариация (4.12), соответствующая варьированию координат и полей по закону (4.1), очевидно, будет равна нулю.

Инфинитезимальный критерий инвариантности функционала действия (4.9) относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1) может быть заменен более слабым условием ([21])

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\alpha)}{\partial X^\alpha} = \varepsilon\frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma} \tag{4.13}$$

так, что первая вариация действия будет вычисляться в виде $\delta\Im = \varepsilon\int(\partial_\gamma B^\gamma)d^4X$, где в правой части подынтегральное выражение представляет собой дивергенцию векторного поля B^γ, которое может зависеть от пространственно-временных координат и полевых переменных (включая и градиенты поля порядка равного, большего или меньшего, чем входящие в лагранжиан) $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta)$. Группа преобразований (4.1) в этом случае называется обобщенной инфинитезимальной дивергентной симметрией функционала действия.

[28]Или, делая тем самым более общее предположение, — инфинитезимально инвариантен.

Вводя четырехмерный вектор

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\left(\delta\varphi^k - \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha\right) + \mathcal{L}\delta X^\beta\right\}, \tag{4.14}$$

вариацию действия, отвечающую обобщенной геометрической группе преобразований (4.1), представим в форме

$$\delta\Im = \varepsilon\int \partial_\beta J^\beta d^4X. \tag{4.15}$$

Воспользуемся теперь предположением об абсолютной (инфинитезимальной) инвариантности функционала действия относительно обобщенной геометрической группы преобразований (4.1). Ясно, что тогда в (4.15) следует полагать $\delta\Im = 0$ и соответствующий закон сохранения имеет следующую четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \tag{4.16}$$

где компоненты 4-вектора J^β вычисляются по формуле (4.14), если группа обобщенных геометрических симметрий (4.1) известна:

$$J^\beta = \mathcal{L}\left(\frac{\partial\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\left[\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial\mathcal{X}^\alpha(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\right]. \tag{4.17}$$

Каждой обобщенной инфинитезимальной дивергентной симметрии действия, которая определяется условием (4.13), соответствует закон сохранения:

$$\partial_\beta(J^\beta - B^\beta) = 0. \tag{4.18}$$

Далее мы рассмотрим ряд различных форм первой вариации функционала действия, отвечающих полному его варьированию по пространственно-временным координатам X^β и полевым переменным φ^k в соответствии с (4.1), отличных от (4.12). Однако сначала необходимо получить ряд необходимых для дальнейшего изложения формул.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$-(\partial_\alpha\varphi^k)\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\right)_{\text{expl}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha} + \frac{\partial}{\partial X^\beta}\left((\partial_\alpha\varphi^s)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^s)}\right),$$

откуда сразу же следует

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\right)_{\text{expl}}\delta X^\alpha + \left[\frac{\partial}{\partial X^\beta}\left((\partial_\alpha\varphi^s)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^s)}\right)\right]\delta X^\alpha + (\partial_\alpha\varphi^k)\mathcal{E}_k(\mathcal{L})\delta X^\alpha$$

и, таким образом,

$$\begin{gathered}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\alpha}\right)_{\text{expl}}\delta X^\alpha - (\partial_\alpha\varphi^s)(\partial_\beta(\delta X^\alpha))\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^s)} + (\partial_\alpha\varphi^k)\mathcal{E}_k(\mathcal{L})\delta X^\alpha + \\ + \frac{\partial}{\partial X^\beta}\left((\partial_\alpha\varphi^s)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^s)}\delta X^\alpha\right).\end{gathered} \tag{4.19}$$

Вычисляя первую вариацию действия (считаем, что лагранжиан зависит от градиентов поля не выше первого порядка) согласно (4.12) и учитывая (4.19), находим

$$\begin{gathered}\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + (\partial_\beta\varphi^k)\mathcal{E}_k(\mathcal{L})\delta X^\beta + \frac{\partial}{\partial X^\gamma}\left((\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\delta X^\beta\right) + \right.\\ \left. + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}}\delta X^\beta + \left(\mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}\right)\partial_\alpha(\delta X^\beta)\right\}d^4X,\end{gathered} \tag{4.20}$$

где $\delta X^\beta = \varepsilon\left(\dfrac{\partial\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$, $\delta\varphi^k = \varepsilon\left(\dfrac{\partial\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ — по-прежнему полные вариации[29] пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k, а частичные вариации полевых переменных определяются соотношением

$$\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\gamma}\delta X^\gamma.$$

Если предположить, что полные вариации полей φ^k и полные вариации пространственно-временных координат X^β исчезают на границе рассматриваемой 4-области, то, очевидно, частичные вариации $\overline{\delta}\varphi^k$ также обращаются в нуль на границе ∂ и, следовательно, формулу для вариации действия (4.20) можно также представить в виде

$$\delta\Im = \int\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\right)\delta\varphi^k + \left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}} - \partial_\alpha\left(\mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}\right)\right)\delta X^\beta\right\}d^4X$$

или в следующей замечательной симметричной форме:

$$\delta\Im = \int\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k})\right)\delta\varphi^k + \left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta})\right)\delta X^\beta\right\}d^4X, \tag{4.21}$$

где

$$-S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}, \tag{4.22}$$

$$-P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}. \tag{4.23}$$

Таким образом, можно ввести еще два канонических тензора с естественными 1-контравариантными и 1-ковариантными компонентами[30].

Следует еще раз подчеркнуть, что при выводе формулы (4.21) для вариации действия полные вариации пространственно-временных координат X^β и полей φ^k считались нулевыми на границе ∂, откуда, в свою очередь, в силу соотношения (4.8) следует, что частичные вариации полей φ^k исчезают на границе ∂. Если снять эти требования, то в правую часть формулы (4.21) необходимо добавить слагаемое

$$\int\left\{-\partial_\alpha(P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\delta X^\beta) + \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right) + \partial_\gamma\left((\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\delta X^\beta\right)\right\}d^4X.$$

Ясно также, что в применении к классической механике сплошных сред

$$S^{4\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} = -\rho_{\mathrm{R}}v_k \qquad (v^k = \partial_4\varphi^k),$$

$$P^{4\cdot}_{\cdot\beta} = (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} = \rho_{\mathrm{R}}v_k\partial_\beta\varphi^k \quad (\beta = 1, 2, 3), \qquad P^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathcal{H},$$

где v^k — контравариантные компоненты эйлеровой скорости, ρ_{R} — плотность среды в отсчетном состоянии, $\mathcal{H}$ — «естественная» плотность гамильтониана, определенная согласно (3.10).

Заметим, что тензор $S^{\beta\cdot}_{\cdot k}$ $(\beta = 1, 2, 3)$ аналогичен[31] отсчетному тензору напряжений (первому тензору напряжений Пиола – Кирхгофа) $\mathbf{S} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{F}}$, а тензор $P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ — тензору напряжений Эшелби[32] $\mathbf{P} = -(\mathcal{L}\mathbf{I} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}})$.

[29] Иногда используется несколько другая терминология: например, в монографии [5] эти вариации называются соответственно лагранжевой и эйлеровой элементарными вариациями.

[30] Следует отметить, что канонический тензор $S^{\beta\cdot}_{\cdot k}$ 1-контравариантен по «отсчетному» индексу и 1-ковариантен по «пространственному».

[31] Под аналогией мы понимаем соответствие того или иного объекта традиционным определениям, известным из механики континуума.

[32] Дополнительно заметим также, что $-P^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$, где $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ — тензор энергии – импульса.

Для удобства приведем здесь известные из рациональной механики сплошных сред определения и соотношения: $\mathbf{F}$ — градиент деформации,[33] $\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T}$ — первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, $J = \det \mathbf{F}$, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши.

5. СТАНДАРТНЫЕ, ВНУТРЕННИЕ И ВНЕШНИЕ ВАРИАЦИИ

Обобщенное геометрическое преобразование пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s

$$(X^\beta, \varphi^k) \to (\widetilde{X}^\beta, \widetilde{\varphi}^k)$$

естественно порождает три различных класса преобразований и три класса вариаций, к обсуждению которых мы и переходим.

Класс так называемых стандартных однопараметрических преобразований $(X^\beta, \varphi^k) \to (X^\beta, \widetilde{\varphi}^k)$, где $\widetilde{\varphi}^k = \varphi^k + \varepsilon\psi^k(X^\gamma)$ и функции ψ^k исчезают на границе ∂ 4-области интегрирования $\mathcal{D}$, позволяет ввести стандартные вариации $\delta X^\beta = 0$, $\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k = \varepsilon\psi^k$.

Опираясь на формулу вариации действия (4.21), нетрудно заметить, что

$$\delta\Im = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) \right) \delta\varphi^k d^4X, \tag{5.1}$$

и на основании стационарности действия в силу произвольности стандартных вариаций — получить уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) = 0,$$

которые, по-существу, выражают баланс импульса при отсчетном (т.е. в пространственно-временных координатах X^β) описании физических полей.

Рассмотрим далее преобразования вида $(X^\beta, \varphi^k) \to (X^\beta, \widetilde{\varphi}^k)$ $(k = 1, 2, 3)$, где $\widetilde{\varphi}^k = \varphi^k + \varepsilon\omega^k(\varphi^s, t)$.

Мы, по-прежнему, предполагаем, что функции $\omega^k(\varphi^s, t)$ исчезают на границе ∂ 4-области интегрирования $\mathcal{D}$.

Вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k принято в этом случае называть внешними вариациями $\delta X^\beta = 0$, $\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k = \varepsilon\omega^k(\varphi^s, t)$ и рассматривать их как функции эйлеровых переменных и времени.

Введем обозначения $x^k = \varphi^k$, $x^4 = t$ и будем трактовать x^k по аналогии с переменными Эйлера (пространственно-временные координаты X^β — переменные Лагранжа).

Подсчитывая первую вариацию действия, находим[34]

$$\delta\Im = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) - \partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \delta\varphi^k d^4X \quad (k = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2, 3),$$

или

$$\begin{aligned}
\delta\Im &= \varepsilon \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) - \partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \omega^k(\varphi^s, x^4) d^4X = \\
&= \varepsilon \int \left(J^{-1}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k}) - J^{-1}\partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \omega^k(x^s, x^4) d^4x = \\
&= \int \left(J^{-1}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} + (\partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k}) - J^{-1}\partial_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} \right) \delta\varphi^k d^4x \quad (l, k, s = 1, 2, 3;\ \beta = 1, 2, 3),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

---

[33] Градиент деформации в рамках классической теории поля определяется каноническим соотношением: $F^{\cdot k}_{\beta\cdot} = \partial_\beta\varphi^k$ и имеет 1-контравариантные пространственные и 1-ковариантные отсчетные естественные компоненты.

[34] В приводимых далее формулах следует различать операторы ∂_β и ∂_l: первый обозначает дифференцирование по пространственно-временным координатам X^β $(\beta = 1, 2, 3)$, второй — по эйлеровой координате x^l $(l = 1, 2, 3)$. Греческий индекс всегда ассоциируется с пространственно-временными координатами и отсчетным представлением векторных и тензорных полей, латинский — с эйлеровыми координатами и актуальным (пространственным) представлением. В рамках формализма группового анализа дифференциальных уравнений (см. разд. 9) частное дифференцирование ∂_l будет обозначаться через $\underset{0}{\partial_l}$.

где J — якобиан преобразования от переменных Лагранжа к переменным Эйлера

$$J = \det(\partial_\beta x^s) \qquad (\beta = 1,2,3;\ s = 1,2,3),$$

$$T^{l\cdot}_{\cdot k} = J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l) S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = -J^{-1}(\partial_\beta \varphi^l)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \quad (\beta = 1,2,3;\ k,l = 1,2,3). \tag{5.3}$$

При преобразованиях в (5.2) тензор $T^{l\cdot}_{\cdot k}$ вводится так, чтобы $J^{-1}\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = \partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k}$ ($\beta = 1,2,3;\ k,l = 1,2,3$). Ясно, что $S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = J(\partial_i X^\beta) T^{i\cdot}_{\cdot k}$, поэтому $J^{-1}\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k} = J^{-1} T^{i\cdot}_{\cdot k}\partial_\beta(J\partial_i X^\beta) + (\partial_i X^\beta)\partial_\beta T^{i\cdot}_{\cdot k} = \partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k}$ в силу того, что $\partial_\beta(J\partial_i X^\beta) = 0$ ($\beta = 1,2,3;\ i = 1,2,3$). Последнее равенство является следствием равенств $2J\partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)$ и перестановочности дифференцирований $\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k = \partial_\beta\partial_\gamma\varphi^k$, которая влечет $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k) = 0$.

Таким образом, может быть получено каноническое определение еще одного тензора — $T^{l\cdot}_{\cdot k}$. Далее будет показано, что 1-контравариантный и 1-ковариантный пространственный канонический тензор $T^{l\cdot}_{\cdot k}$ есть тензор истинных напряжений (тензор напряжений Коши).

В силу произвольности выбора внешних вариаций $\delta\varphi^k$ внутри соответствующей 4-области интегрирования по эйлеровым переменным получим уравнение

$$-J^{-1}\partial_4\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} + J^{-1}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k} + \partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k} = 0 \qquad (k,l = 1,2,3), \tag{5.4}$$

выражающее баланс импульса в форме Эйлера. Действительно, так как (или просто считая, что вводятся обозначения) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\varphi^k)} = \rho_{\mathrm{R}} v_k$, $\rho_{\mathrm{R}} = \rho J$, то уравнение (5.4) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\rho\partial_t v_k = \partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k} + \det(\partial_s X^\beta)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k}, \tag{5.5}$$

где дифференцирование по времени ∂_t производится при фиксированных лагранжевых координатах X^β, т.е. эйлерово поле скоростей $v_k(x^1,x^2,x^3,t)$ в (5.5) дифференцируется по времени следующим образом:

$$\partial_t v_k = \left.\partial_t\right|_{x^j} v_k + (\partial_s v_k)v^s.$$

Следует также отметить, что в уравнении баланса импульса в форме Эйлера (5.5) не следует пренебрегать слагаемым $\det(\partial_s X^\beta)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^k}$, поскольку как только пространственное описание ведется в криволинейной координатной сетке x^k, то, в частности, кинетическая энергия будет явным образом зависеть от пространственных переменных x^k, так как метрический тензор g_{ks} явно от них зависит. Напомним также, что в выражение для «естественной» плотности лагранжиана может также входить потенциальная энергия внешнего силового поля, которая в явной форме зависит от пространственных переменных. Если исключить влияние внешнего потенциального силового поля и ввести в пространстве декартовы координаты, то лагранжиан не должен явно от них зависеть (галилеева инвариантность), следовательно, уравнение баланса импульса будет иметь вид

$$\rho(\left.\partial_t\right|_{x^j} v_k + (\partial_s v_k)v^s) = \partial_l T^{l\cdot}_{\cdot k} \qquad (k,s = 1,2,3).$$

Принимая во внимание уравнение неразрывности

$$\left.\partial_t\right|_{x^j}\rho + \partial_s(\rho v^s) = 0 \qquad (s = 1,2,3), \tag{5.6}$$

уравнение баланса импульса можно преобразовать к дивергентной (в эйлеровых переменных) форме

$$\left.\partial_t\right|_{x^j}(\rho v_k) + \partial_s(\rho v^s v_k - T^{s\cdot}_{\cdot k}) = 0 \qquad (k,s = 1,2,3). \tag{5.7}$$

Уравнения (5.6), (5.7) составляет единое 4-тензорное уравнение:

$$\partial_s J^{s\cdot}_{\cdot k} = 0 \qquad (s,k = 1,2,3,4), \tag{5.8}$$

где три первых координаты — пространственные эйлеровы, четвертая координата — время, тензор кинетических напряжений $J^{s\cdot}_{\cdot k}$ $(s,k=1,2,3,4)$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \rho v^1 v_1 - T^{1\cdot}_{\cdot 1} & \rho v^1 v_2 - T^{1\cdot}_{\cdot 2} & \rho v^1 v_3 - T^{1\cdot}_{\cdot 3} & \rho v^1 \\ \rho v^2 v_1 - T^{2\cdot}_{\cdot 1} & \rho v^2 v_2 - T^{2\cdot}_{\cdot 2} & \rho v^2 v_3 - T^{2\cdot}_{\cdot 3} & \rho v^2 \\ \rho v^3 v_1 - T^{3\cdot}_{\cdot 1} & \rho v^3 v_2 - T^{3\cdot}_{\cdot 2} & \rho v^3 v_3 - T^{3\cdot}_{\cdot 3} & \rho v^3 \\ \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 & \rho \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Пространственный 4-тензор $J^{s\cdot}_{\cdot k}$ имеет 1-контравариантные и 1-ковариантные пространственные компоненты $J^{s\cdot}_{\cdot k}$ $(s,k=1,2,3,4)$ в качестве естественных.

Заметим, что 1-ковариантный пространственный вектор $p_k=\rho v_k$ $(k=1,2,3)$ представляет собой плотность классического импульса поля (в расчете на единицу объема в актуальной конфигурации).

Чисто «пространственная» часть тензора кинетических напряжений в прямой тензорной записи имеет вид

$$\boldsymbol{J}=\mathbf{v}\otimes\mathbf{p}-\mathbf{T},$$

а уравнение баланса (5.7) —

$$\partial_t|_{\mathbf{x}}\,\mathbf{p}+\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\otimes\mathbf{p}-\mathbf{T})=\mathbf{0}. \tag{5.10}$$

Здесь символом $\partial_t|_{\mathbf{x}}$ обозначается частное дифференцирование по времени при фиксированном эйлеровом положении $\mathbf{x}$.

Формулировка вариационного принципа стационарности действия для нелинейно упругого тела в переменных Эйлера и вывод уравнения баланса импульса из него на основе канонического определения тензора напряжений Коши приводятся в [6, с. 190–195].

На основании (5.5) нетрудно заключить, что тензор $T^{l\cdot}_{\cdot k}$ вполне аналогичен тензору истинных напряжений Коши[35] $\mathbf{T}=J^{-1}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{S}$.

Наконец, рассмотрим однопараметрическую группу преобразований $(X^\beta,\varphi^k)\to(\widetilde{X}^\beta,\varphi^k)$, где $\widetilde{X}^\beta=X^\beta+\psi^\beta(X^\gamma)$ и функции ψ^β исчезают на границе 4-области интегрирования $\mathcal{D}$.

Вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^s принято в этом случае называть внутренними вариациями: $\delta X^\beta=\varepsilon\psi^\beta$, $\delta\varphi^k=0$.

Заметим, что для внутренних вариаций будет справедливо соотношение

$$\bar{\delta}\varphi^k=-\frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\gamma}\delta X^\gamma.$$

Варьируя действие согласно (4.21), находим

$$\delta\Im=\int\left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}}+(\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta})\right)\delta X^\beta d^4X.$$

Пользуясь произвольностью выбора внутренних вариаций внутри 4-области интегрирования, приходим к уравнениям Эйлера – Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}}+(\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta})=0, \tag{5.11}$$

которые представляют собой по сути закон, найденный Эшелби [26].

[35]Не следует отождествлять тензоры $T^{l\cdot}_{\cdot k}$ и $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$, поскольку это разные тензоры. Первый из них имеет естественное пространственное представление, а второй — отсчетное

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}=T^\beta_\alpha=\mathcal{L}\delta^\beta_\alpha-(\partial_\alpha\varphi^k)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)},\quad T^{l\cdot}_{\cdot k}=-J^{-1}(\partial_\beta\varphi^l)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}.$$

В приведенных естественных выражениях «естественная» плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ включает множитель $\sqrt{\ }$.

6. ОБОБЩЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЕЙСТВИЯ

Расширение класса однопараметрических геометрических преобразований до (4.1) позволяет установить уравнения поля и законы сохранения сразу в канонических формах.

Мы, по-прежнему, будем рассматривать обобщенные геометрические группы преобразований:

$$\widetilde{X}^{\beta} = \mathcal{X}^{\beta}(\varphi^s, X^{\gamma}, \varepsilon), \quad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^{\gamma}, \varepsilon).$$

Если функционал действия (для любой 4-области пространственно-временного многообразия) абсолютно инвариантен относительно обобщенной геометрической однопараметрической группы преобразований (4.1), т.е. при сохранении формы функционала действия не изменяется его величина $\widetilde{\Im} = \Im$, то такая группа, как указывалось, называется обобщенной геометрической группой инвариантности действия (или обобщенной геометрической вариационной симметрией действия)[36].

Мы будем считать, что лагранжиан зависит от градиентов полевых переменных порядка не выше первого. В этом случае абсолютная инвариантность функционала действия означает, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\beta \varphi^k, X^\beta) d^4X = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\varphi}^k, \widetilde{X}^\beta) d^4\widetilde{X},$$

где преобразование пространственно-временных координат и полевых переменных осуществляется в соответствии с (4.1).

Покажем, что каждая обобщенная геометрическая группа инвариантности действия позволяет, при условии выполнения уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k}) = 0, \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}) = 0, \tag{6.1}$$

сформулировать дивергентный закон сохранения:

$$\partial_\beta I^\beta = 0, \tag{6.2}$$

где ток I^β определяется следующей формулой:

$$I^\beta = \frac{1}{\varepsilon}\left(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\delta\varphi^k + P^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\delta X^\gamma\right). \tag{6.3}$$

Действительно, варьируя действие, находим (см. (4.20))

$$\begin{aligned}
\delta\Im = \int \Bigg\{ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}}\delta X^\beta + (\partial_\beta\varphi^k)\mathcal{E}_k(\mathcal{L})\delta X^\beta + \\
& + \partial_\gamma\left((\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\delta X^\beta\right) + \left(\mathcal{L}\delta^\alpha_\beta - (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\varphi^k)}\right)\partial_\alpha(\delta X^\beta)\Bigg\} d^4X = \\
= \int \Bigg\{ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k - S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\,\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}}\delta X^\beta - P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\partial_\alpha(\delta X^\beta) + \\
& + (\partial_\beta\varphi^k)\mathcal{E}_k(\mathcal{L})\delta X^\beta + \partial_\gamma\left((\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\delta X^\beta\right)\Bigg\} d^4X = 0.
\end{aligned}$$

В силу произвольности 4-области интегрирования необходимо

$$\begin{aligned}
(\partial_\beta\varphi^k)\mathcal{E}_k(\mathcal{L})\delta X^\beta - \partial_\gamma((\partial_\beta\varphi^k)S^{\gamma\cdot}_{\cdot k}\delta X^\beta) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k}\bar{\delta}\varphi^k - S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\partial_\beta(\bar{\delta}\varphi^k) + \\
+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\text{expl}}\delta X^\beta - P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\partial_\alpha(\delta X^\beta) = 0.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

---

[36]Достаточно, как всегда, предположить, что при неизменной форме действия изменение величины действия имеет порядок более высокий, чем ε: $\widetilde{\Im} - \Im = o(\varepsilon)$.

Учитывая, что $\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\beta\varphi^k)\delta X^\beta$, $S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) = \partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\overline{\delta}\varphi^k) - (\overline{\delta}\varphi^k)(\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k})$, $P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\partial_\alpha(\delta X^\beta) = \partial_\alpha(P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\delta X^\beta) - (\delta X^\beta)(\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta})$, уравнение (6.4) представим в виде

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} + (\partial_\beta S^{\beta\cdot}_{\cdot k})\right)\delta\varphi^k + \left(\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X^\beta}\right)_{\mathrm{expl}} + (\partial_\alpha P^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta})\right)\delta X^\beta -$$
$$-\partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\overline{\delta}\varphi^k + P^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\delta X^\gamma) - \partial_\beta((\partial_\gamma\varphi^k)S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\delta X^\gamma) = 0.$$

Таким образом, если уравнения Эйлера – Лагранжа (6.1) удовлетворяются, то можно сформулировать дивергентный закон сохранения:

$$\partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot k}\delta\varphi^k + P^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\delta X^\gamma) = 0. \tag{6.5}$$

Полученный результат[37], кроме всего прочего, ясно указывает на то, что тензор напряжений Пиола – Кирхгофа и тензор напряжений Эшелби — основные конструктивные элементы, необходимые для построения законов сохранения, соответствующих вариационным симметриям действия.

7. ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИ – БЭКЛУНДА). ОБОБЩЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ СИММЕТРИИ ДЕЙСТВИЯ

Можно еще более расширить класс однопараметрических геометрических преобразований (4.1), допуская их зависимость также и от градиентов первого порядка (или более высоких порядков) полевых переменных φ^k. Такие (уже *не* геометрические) однопараметрические преобразования пространственно-временных координат и полевых переменных называются обобщенными (или преобразованиями Ли – Бэклунда) и имеют вид

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \ldots, X^\gamma, \varepsilon), \qquad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \ldots, X^\gamma, \varepsilon). \tag{7.1}$$

По-прежнему считаются выполненными «начальные условия»:

$$\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \ldots, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta, \qquad \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \ldots, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k.$$

Обобщенные однопараметрические группы преобразований (7.1) фигурировали уже в оригинальной работе Нетер [3] (имеется перевод этой статьи на русский язык: *Нетер Э.* Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 611–630.) и в настоящее время рассматриваются как наиболее перспективный инструмент изучения нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных и поэтому привлекают все более пристальное внимание математиков, механиков и физиков. В 5-й главе монографии [13] приводится теория обобщенных симметрий и законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Новый вариант изложения этого круга вопросов читатель может найти в монографии [15].

Обобщенные преобразования, допускающие зависимости от градиентов полевых переменных порядка не выше первого, являются простейшими представителями (7.1). Их общая форма есть

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon), \qquad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon). \tag{7.2}$$

Обобщенные преобразования, так же как и геометрические, можно продолжить, следуя стандартной процедуре, многократно описанной ранее, на частные производные от полевых переменных.

[37] Приведем также квазистатический аналог $\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\cdot(\mathbf{S}\cdot\delta\mathbf{x} + \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{X}) = 0$, где, по-прежнему, $\mathbf{S}$ — первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа, $\mathbf{P}$ — тензор напряжений Эшелби и соответствующий инвариантный интеграл $\oint\limits_{\mathcal{S}}(\mathbf{S}\cdot\delta\mathbf{x} + \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{X})\cdot d\boldsymbol{\mathcal{S}} = 0$ для любой замкнутой в отсчетной конфигурации поверхности $\mathcal{S}$, внутри которой поле регулярно.

Нетрудно заметить, что, задавшись полевыми функциями $\varphi^j(X^\alpha)$, можно на основании формул обобщенного преобразования (7.1) получить «новые» функциональные представления поля $\widetilde{\varphi}^j(\widetilde{X}^\alpha)$. Действительно, подставляя в первую группу соотношений (7.1) поля $\varphi^s = \varphi^s(X^\alpha)$, выразим из указанных соотношений пространственно-временные координаты X^α через «новые» координаты $\widetilde{X}^\alpha$, а затем с помощью второй группы соотношений (7.1) выразим «новые» полевые переменные $\widetilde{\varphi}^k$ через «новые» координаты $\widetilde{X}^\alpha$. Ясно, что затем можно вычислить частные производные $\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k$, $\widetilde{\partial}_\sigma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k$, ..., и вести речь о преобразовании пространственно-временных переменных $X^\gamma \to \widetilde{X}^\gamma$ и всего дифференциального комплекса полей и их градиентов

$$\begin{gathered} \varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^s, \ldots \\ \downarrow \\ \widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_\sigma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^s, \ldots \end{gathered} \tag{7.3}$$

в результате действия обобщенной замены переменных (7.1).

Уравнения поля в результате обобщенного преобразования (7.1) также трансформируются. Формула преобразования оператора Эйлера при замене переменных (7.1), в которой фигурируют частные производные сколь угодно высокого порядка от полевых переменных, имеется в [14, с. 468, 469].

Действие по Гамильтону

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta) d^4X \tag{7.4}$$

в результате обобщенного преобразования (7.1), определяющего также замену $X^\gamma \to \widetilde{X}^\gamma$, полей и их градиентов согласно (7.3), трансформируется в «эквивалентное» (т.е. представленное в новых переменных) действие

$$\widetilde{\mathfrak{I}} = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) d^4\widetilde{X},$$

где $\mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta) \to \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta)$ есть преобразование «естественной» плотности лагранжиана в соответствии с заменой переменных (7.3). «Эквивалентность» действий $\mathfrak{I}$ и $\widetilde{\mathfrak{I}}$ означает $\widetilde{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}$ и, как следствие, то что «естественная» плотность лагранжиана преобразуется в результате замены переменных (7.3) как обычная скалярная плотность.

Если в условии «эквивалентности» (приводимое далее равенство может выполняться не точно, а с невязкой порядка $o(\varepsilon)$; в этом случае следует говорить об инфинитезимальной инвариантности функционала действия) $\widetilde{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}$, положить $\widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) = \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta)$, то говорят, что функционал действия абсолютно инвариантен относительно обобщенной группы преобразований (7.1).

Теория обобщенных симметрий для интегральных функционалов дается в книге [13, с. 368–470].

Теория вариационных симметрий типа (7.2) довольно детально изложена в монографии [9, с. 167–188]. Она, в целом, повторяет (с небольшими отклонениями) то, что уже было изложено в предыдущих разделах работы, поэтому далее приводятся только основные формулы, относящиеся к вариационным симметриям действия указанного типа. Лагранжиан при этом предполагается зависящим от градиентов поля порядка не выше первого.

Функционал действия будет инвариантен относительно обобщенных преобразований (7.2), если

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, X^\beta) d^4X = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{X}^\beta) d^4\widetilde{X}.$$

Полные вариации пространственно-временных координат X^β и физических полей φ^k при их преобразовании согласно (7.2) определяются равенствами

$$\delta X^\beta = \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \qquad \delta\varphi^k = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi^k(\varphi^s, \partial_\alpha\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}. \tag{7.5}$$

Частичную вариацию $\overline{\delta}\varphi^k$ полевой переменной φ^k мы определяем с помощью соотношения

$$\delta\varphi^k = \overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha. \tag{7.6}$$

Критерий инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной группы преобразований (7.2) имеет вид

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0, \tag{7.7}$$

где вариация лагранжиана $\delta\mathcal{L}$ — линейная по ε часть приращения

$$\mathcal{L}(\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \widetilde{\partial}_\gamma\widetilde{\partial}_\alpha\widetilde{\varphi}^k, \ldots, \widetilde{X}^\beta) - \mathcal{L}(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta).$$

Этот критерий, как известно, обобщается до

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = \varepsilon\frac{\partial B^\gamma}{\partial X^\gamma}, \tag{7.8}$$

где $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\beta)$.

Если лагранжиан зависит от градиентов поля порядка не выше первого, то вариация лагранжиана равна:

$$\delta\mathcal{L} = (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) \tag{7.9}$$

или

$$\delta\mathcal{L} = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\overline{\delta}\varphi^k + (\partial_\gamma\mathcal{L})\delta X^\gamma + \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right), \tag{7.10}$$

следовательно,

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = \mathcal{E}_j(\mathcal{L})\overline{\delta}\varphi^j + \partial_\beta\left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right). \tag{7.11}$$

Полная вариация действия (при условии, что «естественная» плотность лагранжиана зависит от градиентов поля порядка не выше первого), отвечающая полному его варьированию по пространственно-временным координатам X^β и полевым переменным φ^k в соответствии с формулами преобразования (7.2), вычисляется в виде

$$\begin{gathered}\delta\Im = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k}\overline{\delta}\varphi^k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\partial_\beta(\overline{\delta}\varphi^k) + \frac{\partial}{\partial X^\beta}(\mathcal{L}\delta X^\beta)\right\}d^4X = \\ = \int\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right\}\overline{\delta}\varphi^k d^4X + \int\partial_\beta\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k + \mathcal{L}\delta X^\beta\right\}d^4X.\end{gathered} \tag{7.12}$$

Вводя 4-вектор тока

$$J^\beta = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\left(\delta\varphi^k - \frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\delta X^\alpha\right) + \mathcal{L}\delta X^\beta\right\}, \tag{7.13}$$

вариацию действия, отвечающую группе преобразований (7.2), представить в форме

$$\delta\Im = \varepsilon\int(\partial_\beta J^\beta)d^4X. \tag{7.14}$$

Если действие абсолютно (инфинитезимально) инвариантно относительно группы преобразований (7.2), тогда в (7.14) следует полагать $\delta\Im = 0$ и соответствующий закон сохранения имеет обычную четырехмерную дивергентную форму:

$$\partial_\beta J^\beta = 0, \tag{7.15}$$

где компоненты 4-вектора тока J^β вычисляются по формуле (7.13), если обобщенная симметрия (7.2) известна

$$\begin{gathered}J^\beta = \mathcal{L}\left(\frac{\partial\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, \partial_\sigma\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \\ + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\left[\left(\frac{\partial\Phi^k(\varphi^s, \partial_\sigma\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} - \left(\frac{\partial\mathcal{X}^\alpha(\varphi^s, \partial_\sigma\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial\varphi^k}{\partial X^\alpha}\right].\end{gathered} \tag{7.16}$$

8. ЛАГРАНЖИАН ПУСТОГО ПРОСТРАНСТВА

Еще одно обобщение теории вариационных симметрий достигается путем аддитивной трансформации «естественной» плотности лагранжиана $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \mathcal{L}'$ так, чтобы добавочное слагаемое $\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta)$ не нарушал выполнения уравнений Эйлера – Лагранжа. Другими словами, добавление $\mathcal{L}'$ к лагранжиану $\mathcal{L}$ не оказывает влияния на условия стационарности действия, хотя, возможно, и приводит к изменению граничных условий для поля и, самое главное, — к изменению условия инфинитезимальной инвариантности действия. Эта процедура часто называется калибровкой лагранжиана. Лагранжианы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L} + \mathcal{L}'$ оказываются физически эквивалентными.

Вообще всякая функция

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta), \tag{8.1}$$

для которой уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}') \equiv \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} + \partial_\gamma\partial_\beta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)} - \dots = 0 \tag{8.2}$$

тождественно удовлетворяются для любого набора физических полевых величин φ^k, называется лагранжианом «пустого пространства»[38], поскольку любой подобный аддитивный добавок формально не изменяет вариационного представления физических полей и поэтому может быть ассоциирован с пространством, «вмещающим» поля.

В качестве примера (см. [7, с. 241–243]) рассмотрим скалярное двумерное поле с лагранжианом, представляющим собой Гессиан поля, т.е.

$$\mathcal{L} = (\partial_1\partial_1\varphi)(\partial_2\partial_2\varphi) - (\partial_1\partial_2\varphi)^2. \tag{8.3}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что для любого поля φ уравнения поля $\mathcal{E}(\mathcal{L}) = 0$ удовлетворяются тождественно, следовательно, лагранжиан (8.3) нулевой. Нетрудно заметить, что он представляет собой дивергенцию $\mathcal{L} = \partial_1 P^1 + \partial_2 P^2$, вектора $P^1 = (\partial_1\varphi)(\partial_2\partial_2\varphi)$, $P^2 = -(\partial_1\varphi)(\partial_1\partial_2\varphi)$.

Если $\mathcal{L}'$ — нулевой лагранжиан, то действие с нулевым лагранжианом

$$\Im' = \int \mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \dots, X^\lambda)d^4X \tag{8.4}$$

называется нейтральным действием. Принцип наименьшего действия в случае нейтрального действия заведомо выполнен, поскольку оно стационарно на произвольных физических полях, и поэтому вообще никак не связано со свойствами каких бы то ни было физических полей, что, собственно, и позволяет ассоциировать такое действие не с физическими полями, а с пространством их «вмещающим».

Понятие о лагранжиане пустого пространства совершенно необходимо для установления степени определенности канонических тензорных полей, входящих в формулировку как классических, так и дополнительных существенных законов сохранения. Теория лагранжиана пустого пространства излагается, например, в монографии [20, р. 224–226]. Наше изложение следует статье [4].

Лагранжианы пустого пространства выступают в качестве основы решения задачи вариационного исчисления об «интегрирующем множителе». Суть проблемы состоит в поиске таких функций $\mathcal{Q}^j(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \dots, X^\alpha)$, которые позволяли бы для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных $F_j(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \dots, X^\alpha) = 0$, которая не вытекает из принципа наименьшего действия, гарантировать выполнение равенства $\partial_\beta J^\beta = \mathcal{Q}^j F_j$ с некоторым вектором J^β для произвольных полей φ^k и тем самым сформулировать на решениях указанной системы дивергентный закон сохранения

$$\partial_\beta J^\beta = 0.$$

[38]Или нулевым лагранжианом (null Lagrangian). Часто употребляется также термин «калибровочный лагранжиан».

8.1. Дивергентное представление нулевого лагранжиана, регулярного в звездообразной области

Основной результат развиваемой теории состоит в том, что лагранжиан пустого пространства (8.1) всегда представляется (при предположении о «звездообразности» области[39] изменения его аргументов) в форме полной дивергенции

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\lambda) = \frac{\partial\Phi^\alpha(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\lambda)}{\partial X^\alpha}. \tag{8.5}$$

Представимость лагранжиана в форме полной дивергенции (8.5) является необходимым и достаточным условием того, чтобы он был нулевым. Достаточность проверяется прямым вычислением оператора Эйлера в применении к (8.5): $\mathcal{E}_k(\partial_\alpha\Phi^\alpha) = 0$. Необходимость также без труда обосновывается. Мы приведем доказательство, существенно использующее звездообразную геометрию области определения лагранжиана в продолженном пространстве, следуя [14, с. 322, 323; 15, p. 225, 226].

Предположим, что лагранжиан $\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\lambda)$ есть лагранжиан пустого пространства, определенный и регулярный в некоторой области изменения аргументов φ^k, $\partial_\gamma\varphi^k$, $\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k$, $\ldots$, звездообразной относительно нулевой точки.

Рассмотрим значения лагранжиана на лучах, исходящих из нулевой точки. Для этого введем параметр ε, изменяющийся на отрезке $[0, 1]$. Пользуясь звездообразной геометрией области, можно заключить, что функция от ε

$$\mathcal{L}'(\varepsilon\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\lambda)$$

корректно определена и регулярна на отрезке $[0, 1]$.

Дифференцирование по параметру ε приводит к

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}'(\varepsilon\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\lambda) = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi^k}\varphi^k + \left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\right)(\partial_\gamma\varphi^k) + \\ + \left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right)(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k) + \ldots\ .\end{aligned} \tag{8.6}$$

Замечая, что

$$(\partial_\gamma\varphi^k)\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\right) = \partial_\gamma\left(\varphi^k\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\right) - \varphi^k\partial_\gamma\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\varphi^k)}\right),$$

$$\begin{aligned}(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right) = \partial_\gamma\partial_\beta\left(\varphi^k\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right) - \varphi^k\partial_\gamma\partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right) - \\ -2(\partial_\beta\varphi^k)\partial_\gamma\left(\varphi^k\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right),\end{aligned}$$

а также

$$(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right) = \partial_\beta\partial_\gamma\left(\varphi^k\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\beta\partial_\gamma\varphi^k)}\right) - \partial_\beta\left(2\varphi^k\partial_\gamma\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right) + \varphi^k\partial_\gamma\partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right),$$

находим формулу (см. символические обозначения (1.29))

$$\sum_l\sum_{s\geq 0}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)\left(\underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}'\right) = \sum_l\varphi^l\sum_{s\geq 0}(-1)^s\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\left(\underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}'\right) + \partial_\beta\Psi^\beta =$$

[39] Область многомерного пространства называется звездообразной (или звездной [27, с. 271; 28, с. 222]) относительно некоторой своей точки, если любую точку области можно соединить с этой точкой отрезком прямой, целиком расположенным внутри области. Выпуклая область звездообразна относительно любой своей точки. Понятие звездообразности области — обобщение на многомерный случай требования односвязности плоской области так, чтобы по-прежнему для поля P_γ, удовлетворяющего условиям совместности $\partial_\beta P_\gamma = \partial_\gamma P_\beta$, было справедливо заключение о том, что его циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю: $\oint P_\gamma dX^\gamma = 0$. Требование о звездообразной форме области может быть несколько ослаблено (см., например, [27, с. 144–150]). В частности, речь может идти об областях, каждая точка которой достижима из некоторой фиксированной точки области по двузвенной ломаной, целиком расположенной внутри области: одно из звеньев ломаной всегда располагается в некоторой фиксированной гиперплоскости, а второе — перпендикулярно этой гиперплоскости. Вопрос о форме нулевого лагранжиана в областях, отличающихся от звездообразной, нуждается в дополнительном исследовании.

$$= \varphi^l \mathcal{E}_l(\mathcal{L}') + \partial_\beta \Psi^\beta,$$

где Ψ^β — некоторое векторное поле, также зависящее от полевых переменных φ^k, их градиентов и пространственно-временных координат X^β, явное выражение которого нам в дальнейшем не потребуется.

Для производной (8.6), следовательно, находим формулу

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}'(\varepsilon\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\lambda) = \varphi^k \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi^k} - \partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right) + \partial_\gamma\partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k)}\right) - \ldots \right\} + \partial_\beta\Psi^\beta.$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{L}'$ есть лагранжиан пустого пространства, т.е. для любого поля φ^k выполняются уравнения поля $\mathcal{E}_k(\mathcal{L}') = 0$, получим, интегрируя по ε на отрезке $[0, 1]$,

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\lambda) - \mathcal{L}'(0, 0, 0, \ldots, X^\lambda) = \partial_\beta\overline{\Psi}^\beta,$$

где $\overline{\Psi}^\beta = \int\limits_0^1 \Psi^\beta(\varepsilon\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\varphi^k, \varepsilon\partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\lambda)d\varepsilon$.

Выбирая далее поле $\widehat{\Psi}^\beta$ так, чтобы $\mathcal{L}'(0, 0, 0, \ldots, X^\alpha) = \partial_\beta\widehat{\Psi}^\beta$, что заведомо возможно и многими способами[40], и обозначая $\Phi^\beta = \widehat{\Psi}^\beta + \overline{\Psi}^\beta$, приходим к дивергентному представлению лагранжиана пустого пространства: $\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\gamma\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\lambda) = \partial_\beta\Phi^\beta(\varphi^k, \partial_\gamma\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\alpha\varphi^k, \ldots, X^\lambda)$.

Плотность лагранжиана в 4-пространстве – времени, таким образом, всегда определяется с точностью до аддитивной полной дивергенции 4-вектора, зависящего от переменных поля, включая и градиенты поля[41]. Поэтому приходится также учитывать то обстоятельство, что в результате подсчета указанная дивергенция на самом деле может зависеть от градиентов поля порядка более высокого, чем сам 4-вектор Φ^γ.

8.2. Вычисление нулевого лагранжиана статического трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве

Вычисление нулевого лагранжиана, зависящего лишь от градиентов первого порядка статического трехкомпонентного поля в трехмерном пространстве, представляет интерес в связи с исследованием нелинейно упругого поля в деформируемом твердом теле.

Если размерность пространства X^β равна трем и $k = 1, 2, 3$, то лагранжиан пустого пространства, зависящий от градиентов поля порядка не выше первого, всегда можно разложить в сумму

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, X^\lambda) = A(\varphi^k, X^\beta) + B_{k\cdot}^{\cdot\beta}(\varphi^k, X^\beta)\partial_\beta\varphi^k + C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(\varphi^k, X^\beta)J\partial_k X^\beta + D(\varphi^k, X^\beta)J, \tag{8.7}$$

где $A(\varphi^k, X^\beta)$, $B_{k\cdot}^{\cdot\beta}(\varphi^k, X^\beta)$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(\varphi^k, X^\beta)$, $D(\varphi^k, X^\beta)$ — некоторые поля, зависящие от пространственно-временных координат X^α и физических полей φ^k[42], J — якобиан отображения $X^\beta \to x^k = \varphi^k$:

$$J = \det(\partial_\beta\varphi^k).$$

Приведенное только что соотношение может быть переписано в прямую тензорную запись

$$\mathcal{L}' = A + \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\otimes\mathbf{x})) + J\mathrm{tr}(\mathbf{C}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\otimes\mathbf{x})^{-1}) + JD, \tag{8.8}$$

где $(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}}\otimes\mathbf{x})_{\beta\cdot}^{\cdot k} = \partial_\beta x^k$.

Непосредственный расчет показывает, что полная дивергенция трехмерного векторного поля Φ^γ, зависящего от трех координат X^β, трех компонент поля φ^k и их градиентов порядка не выше первого, также будет зависеть от градиентов поля порядка не выше первого, только если

$$\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, X^\lambda) = L^\gamma(\varphi^s, X^\beta) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)K_{k\lambda}(\varphi^s, X^\beta) + J(\partial_k X^\gamma)M^k(\varphi^s, X^\beta), \tag{8.9}$$

[40]Действительно, поле $\widehat{\Psi}^\alpha$ по заданной дивергенции можно разыскивать в безвихревом виде $\widehat{\Psi}^\beta = \partial_\beta\psi$. Для определения потенциала ψ (ψ есть функция только пространственно-временных координат) тогда имеется уравнение Пуассона, разрешимость которого гарантирована, если правая часть этого уравнения — непрерывная функция пространственно-временных координат X^β.

[41]Как следует из (8.5), естественное представление вектора Φ^γ — 1-контравариантное отсчетное.

[42]Выражения для A, $B_{k\cdot}^{\cdot\beta}$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}$, D, как будет показано далее, не могут быть выбраны произвольно.

где $L^\gamma = L^\gamma(\varphi^k, X^\beta)$, $K_{k\beta} = K_{k\beta}(\varphi^k, X^\alpha)$, $M^s = M^s(\varphi^k, X^\beta)$ — произвольные поля.

Прямая запись уравнения (8.9) есть:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{L} + ((\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \otimes \mathbf{x}) \cdot \mathbf{K})^\times + J(\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \otimes \mathbf{x})^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{M},$$

где крестом (крест Гиббса (Gibbsian cross)) обозначается векторный инвариант тензора второго ранга: $(\mathbf{A}^\times)^\gamma = \varepsilon^{\gamma\beta\lambda} A_{\beta\lambda}$[43].

С целью обоснования (8.9) вычислим полную дивергенцию поля $\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, X^\beta)$ как

$$\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = \left(\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial X^\gamma}\right)_{\mathrm{expl}} + \left(\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial\varphi^k}\right)(\partial_\gamma\varphi^k) + \left(\frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\right)\partial_\gamma(\partial_\beta\varphi^k). \tag{8.10}$$

Полная дивергенция не зависит от частных производных $\dfrac{\partial^2\varphi^k}{(\partial X^1)^2}$, $\dfrac{\partial^2\varphi^k}{(\partial X^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2\varphi^k}{(\partial X^3)^2}$, только если

$$\frac{\partial\Phi^1}{\partial(\partial_1\varphi^k)} = 0, \quad \frac{\partial\Phi^2}{\partial(\partial_2\varphi^k)} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi^3}{\partial(\partial_3\varphi^k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \tag{8.11}$$

Но это означает, что компонента Φ^β не зависит от $\partial_\beta\varphi^k$ $(k = 1, 2, 3)$.

Аналогично должны выполняться условия

$$\frac{\partial\Phi^1}{\partial(\partial_2\varphi^k)} + \frac{\partial\Phi^2}{\partial(\partial_1\varphi^k)} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi^1}{\partial(\partial_3\varphi^k)} + \frac{\partial\Phi^3}{\partial(\partial_1\varphi^k)} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi^2}{\partial(\partial_3\varphi^k)} + \frac{\partial\Phi^3}{\partial(\partial_2\varphi^k)} = 0, \tag{8.12}$$

чтобы была исключена зависимость от смешанных частных производных $\dfrac{\partial^2\varphi^k}{\partial X^1\partial X^2}$, $\dfrac{\partial^2\varphi^k}{\partial X^1\partial X^3}$, $\dfrac{\partial^2\varphi^k}{\partial X^2\partial X^3}$.

На основании (8.11), (8.12) можно заключить, что компоненты Φ^β выражаются через первые градиенты поля как

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2\varphi^{k'})(\partial_3\varphi^{k''}) + b_k(\partial_2\varphi^k) + c_k(\partial_3\varphi^k) + h^1,\\
\Phi^2 &= e_{k'k''}(\partial_1\varphi^{k'})(\partial_3\varphi^{k''}) + f_k(\partial_1\varphi^k) + g_k(\partial_3\varphi^k) + h^2,\\
\Phi^3 &= p_{k'k''}(\partial_1\varphi^{k'})(\partial_2\varphi^{k''}) + q_k(\partial_1\varphi^k) + s_k(\partial_2\varphi^k) + h^3,
\end{aligned} \tag{8.13}$$

где $a_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta)$, $e_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta)$, $p_{k'k''}(\varphi^k, X^\beta)$, $b_k(\varphi^k, X^\beta)$, $f_k(\varphi^k, X^\beta)$, $q_k(\varphi^k, X^\beta)$, $c_k(\varphi^k, X^\beta)$, $g_k(\varphi^k, X^\beta)$, $s_k(\varphi^k, X^\beta)$, $h^k(\varphi^k, X^\beta)$.

Действительно, поскольку, например, компонента Φ^2 не зависит от частных производных $\partial_2\varphi^k$, а Φ^3 — от $\partial_3\varphi^k$, то два первых уравнения в (8.12) устанавливают, что Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_2\varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_3\varphi^k$, и, наоборот, Φ^1 может зависеть от градиента $\partial_3\varphi^k$ только линейно с коэффициентом, линейно зависящим от $\partial_2\varphi^k$. Учитывая еще, что компонента Φ^1 не зависит от градиентов $\partial_1\varphi^k$, сразу же приходим к представлению (8.13) для Φ^1.

Подставляя (8.13) в (8.12), находим, что для любых градиентов поля должны удовлетворяться соотношения

$$\begin{aligned}
&(e_{kk''} + a_{kk''})(\partial_3\varphi^{k''}) + f_k + b_k = 0,\\
&(a_{k''k} + p_{kk''})(\partial_2\varphi^{k''}) + c_k + q_k = 0,\\
&(e_{k'k} + p_{k'k})(\partial_1\varphi^{k'}) + g_k + s_k = 0,
\end{aligned} \tag{8.14}$$

откуда следуют равенства $e_{kk'} = -a_{kk'}$, $p_{kk'} = -a_{k'k}$, $a_{kk'} = -a_{k'k}$; $f_k = -b_k$, $q_k = -c_k$, $s_k = -g_k$, пользуясь которыми формулы (8.13) представим в виде

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= a_{k'k''}(\partial_2\varphi^{k'})(\partial_3\varphi^{k''}) + b_k(\partial_2\varphi^k) + c_k(\partial_3\varphi^k) + h^1,\\
\Phi^2 &= -a_{k'k''}(\partial_1\varphi^{k'})(\partial_3\varphi^{k''}) - b_k(\partial_1\varphi^k) + g_k(\partial_3\varphi^k) + h^2,\\
\Phi^3 &= a_{k'k''}(\partial_1\varphi^{k'})(\partial_2\varphi^{k''}) - c_k(\partial_1\varphi^k) - g_k(\partial_2\varphi^k) + h^3.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

[43] Заметим, что векторный инвариант диадного произведения двух векторов трехмерного пространства есть векторное произведение векторов, составляющих диаду: $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Вводя затем аксиальный вектор a^s, соответствующий антисимметричному тензору второго ранга a_{kj} согласно $2a^s = \varepsilon^{skj}a_{kj}$, получим

$$\begin{aligned}
\Phi^1 =& a^3((\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^1)) - a^2((\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^1)) + \\
&+ a^1((\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^2)) + b_k(\partial_2\varphi^k) + c_k(\partial_3\varphi^k) + h^1, \\
\Phi^2 =& -a^3((\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^1)) + a^2((\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^1)) - \\
&- a^1((\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^2)) - b_k(\partial_1\varphi^k) + g_k(\partial_3\varphi^k) + h^2, \\
\Phi^3 =& a^3((\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^1)) - a^2((\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^1)) + \\
&+ a^1((\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^2)) - c_k(\partial_1\varphi^k) - g_k(\partial_2\varphi^k) + h^3.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Наконец, учитывая, что

$$\left\| \begin{matrix} \partial_1\varphi^1 & \partial_2\varphi^1 & \partial_3\varphi^1 \\ \partial_1\varphi^2 & \partial_2\varphi^2 & \partial_3\varphi^2 \\ \partial_1\varphi^3 & \partial_2\varphi^3 & \partial_3\varphi^3 \end{matrix} \right\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} \partial_1 X^1 & \partial_2 X^1 & \partial_3 X^1 \\ \partial_1 X^2 & \partial_2 X^2 & \partial_3 X^2 \\ \partial_1 X^3 & \partial_2 X^3 & \partial_3 X^3 \end{matrix} \right\|,$$

т.е. $2J\partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)$, или в развернутой записи

$$\begin{aligned}
J\partial_1 X^1 &= (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\
-J\partial_2 X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_2\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\
J\partial_3 X^1 &= (\partial_2\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_2\varphi^2)(\partial_3\varphi^1); \\
-J\partial_1 X^2 &= (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^2), \\
J\partial_2 X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_3\varphi^1), \\
-J\partial_3 X^2 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_3\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_3\varphi^1); \\
J\partial_1 X^3 &= (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^2), \\
-J\partial_2 X^3 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^3) - (\partial_1\varphi^3)(\partial_2\varphi^1), \\
J\partial_3 X^3 &= (\partial_1\varphi^1)(\partial_2\varphi^2) - (\partial_1\varphi^2)(\partial_2\varphi^1),
\end{aligned}$$

и обозначая $h^\gamma = L^\gamma$, $a^s = M^s$, $b_k = K_{k3}$, $c_k = -K_{k2}$, $g_k = K_{k1}$, формулы (8.16) сразу же приводятся к (8.9).

Как следует из проведенных рассуждений, L^γ — контравариантный отсчетный вектор, M^s — аксиальный пространственный вектор, $K_{k\alpha}$ — 1-ковариантный пространственный и 1-ковариантный отсчетный тензор второго ранга.

Вычислим далее полную дивергенцию поля Φ^γ, определенного согласно (8.9). Прежде всего находим

$$\begin{aligned}
\partial_\gamma\Phi^\gamma = (\partial_\gamma L^\gamma)_{\mathrm{expl}} + (\partial_k L^\gamma)(\partial_\gamma\varphi^k) + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma K_{k\lambda})_{\mathrm{expl}} + \varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) + \\
+ J(\partial_k X^\gamma)(\partial_\gamma M^k)_{\mathrm{expl}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_n M^k)(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)(\partial_\gamma\varphi^n).
\end{aligned}$$

Здесь уже учтено, что $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k) = 0$, и в силу $2J\partial_k X^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)$ также равенство $\partial_\gamma(J\partial_k X^\gamma) = 0$.

Замечая далее, что $\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}(\partial_\gamma\varphi^n)(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m) = J\varepsilon^{nlm}$, $\varepsilon^{nlm}\varepsilon_{klm} = 2\delta^n_k$, получим[44]

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\varepsilon_{klm}(\partial_n M^k)(\partial_\alpha\varphi^l)(\partial_\beta\varphi^m)(\partial_\gamma\varphi^n) = \frac{1}{2}\varepsilon^{nlm}\varepsilon_{klm}J(\partial_n M^k) = J(\partial_k M^k).$$

[44] Приводимые формулы читатель может найти, например, в [29, с. 23, 24].

На основании (см., например, [29, с. 28]) $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l) = \varepsilon^{rlk}\Delta_r^\lambda$, где Δ_r^λ — алгебраическое дополнение элемента $\partial_\lambda\varphi^r$ в определителе

$$\begin{vmatrix} \partial_1\varphi^1 & \partial_2\varphi^1 & \partial_3\varphi^1 \\ \partial_1\varphi^2 & \partial_2\varphi^2 & \partial_3\varphi^2 \\ \partial_1\varphi^3 & \partial_2\varphi^3 & \partial_3\varphi^3 \end{vmatrix},$$

и учитывая $\Delta_r^\lambda = J(\partial_r X^\lambda)$, имеем $\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l) = \varepsilon^{rlk}J(\partial_r X^\lambda)$, следовательно,

$$\varepsilon^{\gamma\beta\lambda}(\partial_\beta\varphi^k)(\partial_\gamma\varphi^l)(\partial_l K_{k\lambda}) = \varepsilon^{klp}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta) = -\varepsilon^{kpl}(\partial_l K_{p\beta})(\partial_k X^\beta),$$

что сразу же позволяет найти выражение (8.7) для лагранжиана пустого пространства, причем поля A, $B_{k\cdot}^{\cdot\beta}$, $C_{\cdot\beta}^{k\cdot}$, D, фигурирующие в этом представлении, определяются в следующем виде:

$$A(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial L^\gamma(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}, \tag{8.17}$$

$$D(x^k, X^\beta) = \left(\frac{\partial M^s(x^k, X^\beta)}{\partial x^s}\right)_{\text{expl}}, \tag{8.18}$$

$$B_{k\cdot}^{\cdot\beta}(x^s, X^\beta) = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}} + \left(\partial_k L^\beta(x^s, X^\beta)\right)_{\text{expl}}, \tag{8.19}$$

$$C_{\cdot\beta}^{k\cdot}(x^s, X^\beta) = \left(\partial_\beta M^k(x^s, X^\gamma)\right)_{\text{expl}} - \varepsilon^{kpl}\left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial x^l}\right)_{\text{expl}}. \tag{8.20}$$

Приведем также прямую запись соотношений (8.17)–(8.20):

$$A = \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L}, \quad D = \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K} + (\text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L})^{\text{T}}, \quad \mathbf{C} = \text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M} - (\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^{\text{T}})^{\text{T}}$$

и необходимые для понимания формул определения дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L} &= (\boldsymbol{\nabla}_{\text{R}}\cdot\mathbf{L})_{\text{expl}}, & \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M} &= (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{M})_{\text{expl}}, \\ \text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K} &= (\mathbf{K}\times\boldsymbol{\nabla}_{\text{R}})_{\text{expl}}, & (\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^{\text{T}})^{\text{T}} &= (\mathbf{K}^{\text{T}}\times\boldsymbol{\nabla})^{\text{T}}_{\text{expl}}, \\ \text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L} &= (\mathbf{L}\otimes\boldsymbol{\nabla})_{\text{expl}}, & \text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M} &= (\mathbf{M}\otimes\boldsymbol{\nabla}_{\text{R}})_{\text{expl}}, \end{aligned}$$

или в координатной записи:

$$\text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L} = (\partial_\gamma L^\gamma)_{\text{expl}}, \qquad \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M} = \left(\partial_k M^k\right)_{\text{expl}},$$

$$(\text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K})_{k\cdot}^{\cdot\beta} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\left(\frac{\partial K_{k\alpha}(x^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}, \qquad ((\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^{\text{T}})^{\text{T}})_{\cdot\beta}^{k\cdot} = \varepsilon^{kpl}\left(\frac{\partial K_{p\beta}(x^s, X^\gamma)}{\partial x^l}\right)_{\text{expl}},$$

$$((\text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L})^{\text{T}})_{k\cdot}^{\cdot\gamma} = (\partial_k L^\gamma)_{\text{expl}}, \qquad (\text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M})_{\cdot\gamma}^{s\cdot} = (\partial_\gamma M^s)_{\text{expl}}.$$

В силу тождеств $\partial_k\partial_\gamma L^\gamma = \partial_\gamma\partial_k L^\gamma$, $\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\varepsilon^{jks}\partial_s\partial_\gamma K_{k\alpha} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\varepsilon^{jks}\partial_\gamma\partial_s K_{k\alpha}$, $\partial_\gamma\partial_k M^k = \partial_s\partial_\gamma M^s$ находим

$$\text{grad}_{\text{expl}}\text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{L} = \text{Div}_{\text{expl}}(\text{grad}_{\text{expl}}\mathbf{L})^{\text{T}},$$

$$\text{rot}_{\text{expl}}(\text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{K})^{\text{T}} = (\text{Rot}_{\text{expl}}(\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{K}^{\text{T}})^{\text{T}})^{\text{T}},$$

$$\text{Grad}_{\text{expl}}\text{div}_{\text{expl}}\mathbf{M} = \text{div}_{\text{expl}}(\text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{M})^{\text{T}},$$

что приводит к соотношениям совместности[45]

$$\text{grad}_{\text{expl}}A = \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{B}, \qquad (\text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{C})^{\text{T}} = -\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{B}^{\text{T}}, \qquad \text{Grad}_{\text{expl}}D = \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{C}^{\text{T}}, \tag{8.21}$$

[45] Соотношениям совместности необходимо должны удовлетворять поля A, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, D в выражении (8.7) для лагранжиана пустого трехмерного пространства.

где $\mathrm{Div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{B} = (\boldsymbol{\nabla}_{\mathrm{R}} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}})_{\mathrm{expl}}$, $\mathrm{div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{C})_{\mathrm{expl}}$, или для компонент $(\mathrm{Div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{B})_k = (\partial_\alpha B_{k\cdot}^{\cdot\alpha})_{\mathrm{expl}}$, $(\mathrm{div}_{\mathrm{expl}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}})_\beta = (\partial_k C_{\cdot\beta}^{k\cdot})_{\mathrm{expl}}$.

Условия совместности (8.21) могут быть получены прямой подстановкой (8.7) в уравнения Эйлера – Лагранжа (8.2) и приравниванием к нулю сумм коэффициентов при одинаковых степенях градиентов $\partial_\beta\varphi^k$.

8.3. Вычисление нулевого лагранжиана 4-мерного пространства – времени

Найдем выражение для лагранжиана пустого пространства для случая, когда пространство – время четырехмерно, а число m физических полевых величин φ^k может быть произвольным. При этом будем считать, что лагранжиан $\mathcal{L}'$ и векторное поле Φ^γ в самом общем представлении лагранжиана пустого пространства (8.5) зависят от градиентов полей φ^k порядка не выше первого.

Поскольку

$$\mathcal{L}'(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, X^\beta) = \frac{\partial\Phi^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, X^\beta)}{\partial X^\gamma}, \tag{8.22}$$

то, как и в трехмерном случае, необходимо исследовать условия, когда дивергенция в правой части не будет зависеть от вторых производных $(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^k)$.

Учитывая, во-первых, что в выражении для лагранжиана пустого пространства $\mathcal{L}'$ коэффициент при второй частной производной $(\partial_\beta\partial_\beta\varphi^k)$ (по β не суммировать) должен быть нулевым, можно заключить, что должны выполняться условия:

$$\frac{\partial\Phi^\beta}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)} = 0 \qquad (\text{по } \beta \text{ не суммировать}),$$

т.е. компонента Φ^γ не зависит от $(\partial_\gamma\varphi^k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Во-вторых, лагранжиан пустого пространства $\mathcal{L}'$ не зависит от смешанных частных производных $(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^k)$ $(\alpha \neq \beta)$ только при условии

$$\frac{\partial\Phi^\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi^k)} + \frac{\partial\Phi^\mu}{\partial(\partial_\lambda\varphi^k)} = 0 \qquad (\mu \neq \lambda). \tag{8.23}$$

Положим $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_2$ и, используя то обстоятельство, что Φ^{α_2} от производной $(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})$ не зависит, получим, что Φ^{α_1} линейно зависит от производной $\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}$, т.е.

$$\Phi^{\alpha_1} = a_{k_2}^{\alpha_1\alpha_2}\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2} + b^{\alpha_1} \quad (\text{по } \alpha_2,\ k_2 \text{ не суммировать}), \tag{8.24}$$

где коэффициенты $a_{k_2}^{\alpha_1\alpha_2}$ и b^{α_1} не зависят от производной $\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}$.

Затем, подставляя выражение (8.24) для Φ^{α_1} в соотношение (8.23) при $\lambda = \alpha_1$, $\mu = \alpha_3$, $\alpha_1 \neq \alpha_3$, получим, что $a_{k_2}^{\alpha_1\alpha_2}$ и b^{α_1} линейно зависят от производной $(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})$.

Продолжая рассуждения дальше, заключаем, что поле Φ^γ можно представить в виде многочлена по возрастающим степеням градиентов $\partial_\alpha\varphi^k$

$$\begin{aligned}\Phi^\gamma = A^\gamma + B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) +\\ + D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}) + \ldots\ ,\end{aligned} \tag{8.25}$$

где коэффициенты A^γ, $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$, $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$, $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ могут зависеть от X^β, φ^k, и не выписаны полиномиальные по градиентам слагаемые более высоких степеней.

Подставляя (8.25) в (8.23), получим $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot} = -B_{\cdot\cdot k_1}^{\alpha_1\gamma\cdot}$, т.е. коэффициенты $B_{\cdot\cdot k_1}^{\gamma\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по индексам γ, α_1; аналогично заключаем, что коэффициенты $C_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ, α_1 и γ, α_2; коэффициенты $D_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}$ антисимметричны по парам индексов γ, α_1; γ, α_2; γ, α_3; и т.д. для всех невыписанных в (8.25) коэффициентов.

Из антисимметричности коэффициентов $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$ по индексам γ, α_1 и γ, α_2 получаются следующие равенства: переставляя γ, α_1: $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1} = -C^{\alpha_1\alpha_2\cdot\gamma\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$; переставляя α_1, α_2: $C^{\alpha_1\alpha_2\cdot\gamma\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1} = -C^{\alpha_2\alpha_1\cdot\gamma\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$; переставляя γ, α_2: $C^{\alpha_2\alpha_1\cdot\gamma\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1} = -C^{\gamma\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$.

Откуда следует, что коэффициенты $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по паре греческих индексов α_1, α_2.

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по любой паре греческих индексов[46] и все остальные коэффициенты в (8.25) также антисимметричны по любой паре греческих индексов.

Таким образом, для любого, отличного от нуля, коэффициента в (8.25) все греческие индексы должны быть различны, но у греческих индексов может быть всего четыре различных значения $1, 2, 3, 4$, и поэтому более четырех различных верхних индексов у коэффициентов в (8.25) быть не может, т.е. в разложении (8.25) невыписанные слагаемые на самом деле отсутствуют:

$$\Phi^\gamma = A^\gamma + B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}). \quad (8.26)$$

Рассмотрим теперь индивидуальные суммы в (8.26). Переставляя в сумме $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})$ у коэффициентов $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$ индексы α_1, α_2, находим:

$$C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) = -C^{\gamma\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}),$$

и переименовывая по схеме $\alpha_1 \to \alpha_2$, $\alpha_2 \to \alpha_1$, $k_1 \to k_2$, $k_2 \to k_1$ немые латинские и греческие индексы, приходим к следующим равенствам:

$$C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) = -C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_2}) = -C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1\cdot k_2}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}).$$

Следовательно, коэффициенты $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по паре латинских индексов k_1, k_2.

Аналогично доказывается, что коэффициенты $D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Резюмируя сказанное, имеем, что коэффициенты $B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}$ антисимметричны по греческим индексам, коэффициенты $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$, $D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по любой паре греческих и любой паре латинских индексов.

Вычисляя дивергенцию Φ^γ, после ряда преобразований получим выражение для лагранжиана пустого пространства в случае 4-мерного пространственно-временного многообразия:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' = \frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\right)(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) +{}\\
+\left(\frac{\partial B^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\right)(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) +{}\\
+\left(\frac{\partial C^{\alpha_3\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\right)(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}) +{}\\
+\frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_4}}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_\gamma\varphi^{k_4}).\end{aligned} \quad (8.27)$$

Последнее слагаемое в (8.27) в силу $D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = D_{k_3k_2k_1}\varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1}$ и при условии, что число физических полевых величин также равно четырем, приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_4}}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_\gamma\varphi^{k_4}) =$$

[46] Последнее означает, что для коэффициентов $D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ справедливо также следующее представление:

$$D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = D_{k_3k_2k_1}\varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1},$$

где $D_{k_3k_2k_1}$ — антисимметричный 3-ковариантный пространственный тензор.

$$= (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_{\gamma}\varphi^{k_4})\varepsilon^{\gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1}\frac{\partial D_{k_3k_2k_1}}{\partial x^{k_4}} = J\varepsilon^{k_4k_3k_2k_1}\frac{\partial D_{k_3k_2k_1}}{\partial x^{k_4}},$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, X^3, X^4) \to (x^1, x^2, x^3, x^4)$.

С целью оптимизации записи дальнейших рассуждений введем обозначения

$$A = \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}, \qquad L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1} = \frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}, \qquad L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2\cdot k_1} = \frac{\partial B^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}},$$

$$L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = \frac{\partial C^{\alpha_3\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_3}} + \left(\frac{\partial D^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}, \qquad L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = \frac{\partial D^{\alpha_4\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial x^{k_4}}$$

и представим лагранжиан пустого 4-мерного пространственно-временного многообразия в форме

$$\mathcal{L}' = A + L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}) +$$
$$+ L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_{\alpha_4}\varphi^{k_4}). \tag{8.28}$$

Заметим, что в этом представлении нулевого лагранжиана все коэффициенты могут быть антисимметризованы по нижним латинским индексам, поскольку, как нетрудно проверить, все они $L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2\cdot k_1}$, $L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$, $L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричны по любой паре латинских индексов.

Формула (8.28), следовательно, может быть также записана в форме

$$\mathcal{L}' = A + L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) + L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot [k_2\cdot k_1]}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot [k_3\cdot k_2\cdot k_1]}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3}) +$$
$$+ L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot [k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1]}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})(\partial_{\alpha_3}\varphi^{k_3})(\partial_{\alpha_4}\varphi^{k_4}), \tag{8.29}$$

где квадратные скобки применяются для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам.

В дальнейшем можно считать, что

$$L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2\cdot k_1} = L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot [k_2\cdot k_1]}, \qquad L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot [k_3\cdot k_2\cdot k_1]}, \qquad L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot [k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1]}.$$

Подставляя (8.28) в уравнение Эйлера – Лагранжа (8.2) и приравнивая нулю последовательно суммы коэффициентов при одинаковых степенях градиентов полевых величин φ^k, можно получить условия совместности для коэффициентов в разложении (8.28).

Так, условие равенства нулю суммы коэффициентов при нулевой степени градиентов есть

$$\frac{\partial A}{\partial x^{k_1}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}} L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1}\right)_{\text{expl}} = 0, \tag{8.30}$$

или также

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}} - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}}\left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\right)_{\text{expl}} = 0. \tag{8.31}$$

Ясно, что это условие совместности тождественно удовлетворяется в силу

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}}\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}}\right)_{\text{expl}}$$

и, поскольку тензор $B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}$ антисимметричен по верхним индексам,

$$\left(\frac{\partial^2 B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^{\alpha_1}\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}} = 0.$$

Следующим в ряду условий совместности будет

$$\frac{\partial L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} - \frac{\partial L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1\cdot k_2}\right)_{\text{expl}} - \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}} L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2\cdot k_1}\right)_{\text{expl}} = 0, \tag{8.32}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x^{k_2}}\left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}}+\left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^{\gamma}}\right)_{\mathrm{expl}}\right)-\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}}\left(\frac{\partial B^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}}+\left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^{\gamma}}\right)_{\mathrm{expl}}\right)_{\mathrm{expl}}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}}\left(\frac{\partial B^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2}}{\partial x^{k_1}}+\left(\frac{\partial C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1\cdot k_2}}{\partial X^{\gamma}}\right)_{\mathrm{expl}}\right)_{\mathrm{expl}}-\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_2}}+\left(\frac{\partial B^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2}}{\partial X^{\gamma}}\right)_{\mathrm{expl}}\right)_{\mathrm{expl}}=0.$$

Это условие тождественно удовлетворяется в силу перестановочности частного дифференцирования и антисимметрии тензора $C^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1\cdot k_2}$ по любой паре греческих индексов.

Используя, по-прежнему, квадратные скобки для обозначения операции альтернирования по заключенным в них индексам, условие совместности (8.32) представим в форме

$$\frac{\partial L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_1}}{\partial x^{k_2]}}=\left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}}L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_2\cdot k_1]}\right)_{\mathrm{expl}}. \tag{8.33}$$

Аналогично могут быть найдены еще два условия совместности:

$$-\frac{\partial L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_1\cdot k_2}}{\partial x^{k_3]}}=\left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}}L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_3\cdot k_2\cdot k_1]}\right)_{\mathrm{expl}}, \tag{8.34}$$

$$-\frac{\partial L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_1\cdot k_2\cdot k_3}}{\partial x^{k_4]}}=\left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}}L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1]}\right)_{\mathrm{expl}}. \tag{8.35}$$

Приведем также необходимые для понимания формул (8.33)–(8.35) соотношения:

$$P^{\alpha_1}_{k_1k_2}=\frac{\partial L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}},\quad \frac{\partial L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_1}}{\partial x^{k_2]}}=P^{\alpha_1}_{[k_1k_2]}=\frac{1}{2}(P^{\alpha_1}_{k_1k_2}-P^{\alpha_1}_{k_2k_1});$$

$$P^{\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_2k_3}=\frac{\partial L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1\cdot k_2}}{\partial x^{k_3}},\quad \frac{\partial L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_1\cdot k_2}}{\partial x^{k_3]}}=P^{\alpha_2\alpha_1}_{[k_1k_2k_3]},$$

$$P^{\alpha_2\alpha_1}_{[k_1k_2k_3]}=\frac{1}{3!}(P^{\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_2k_3}-P^{\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_1k_3}-P^{\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_2k_1}-P^{\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_3k_2}+P^{\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_3k_1}+P^{\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_1k_2});$$

$$P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_2k_3k_4}=\frac{\partial L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1\cdot k_2\cdot k_3}}{\partial x^{k_4}},\quad \frac{\partial L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_1\cdot k_2\cdot k_3}}{\partial x^{k_4]}}=P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{[k_1k_2k_3k_4]},$$

$$P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{[k_1k_2k_3k_4]}=\frac{1}{4!}\Big(P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_2k_3k_4}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_2k_1k_4}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_3k_2k_4}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_1k_3k_4}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_3k_1k_4}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_1k_2k_4}+$$
$$+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_4k_2k_1k_3}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_4k_2k_3}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_1k_4k_3}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_4k_1k_2k_3}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_2k_4k_3}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_4k_1k_3}-$$
$$-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_4k_3k_1k_2}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_4k_3k_2}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_1k_4k_2}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_4k_1k_2}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_1k_3k_4k_2}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_4k_1k_3k_2}+$$
$$+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_4k_3k_2k_1}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_4k_3k_1}+P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_2k_4k_1}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_3k_4k_2k_1}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_2k_3k_4k_1}-P^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}_{k_4k_2k_3k_1}\Big).$$

8.4. Вычисление нулевого лагранжиана пространства произвольной размерности

Приведенные рассуждения о форме лагранжиана пустого пространства без труда обобщаются на случай произвольного числа пространственно-временных координат X^{β} ($\beta=1,2,\ldots,n{+}1$): векторное поле Φ^{γ} определяется в виде

$$\Phi^{\gamma}=A^{\gamma}+A^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})+A^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2})+\ \ldots\ + \tag{8.36}$$

$$+A^{\gamma\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_n\cdot k_{n-1}\cdot\ldots\cdot k_1}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})\ldots(\partial_{\alpha_{n-1}}\varphi^{k_{n-1}})(\partial_{\alpha_n}\varphi^{k_n}), \tag{8.37}$$

где тензоры $A^{\gamma}(X^{\beta},x^s)$, $A^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}(X^{\beta},x^s)$, $A^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}(X^{\beta},x^s)$, $\ldots$, $A^{\gamma\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_n\cdot k_{n-1}\cdot\ldots\cdot k_1}(X^{\beta},x^s)$ антисимметричны по любой паре латинских и любой паре греческих индексов[47].

[47] Применительно к тензору $A^{\gamma\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_n\cdot k_{n-1}\cdot\ldots\cdot k_1}$ антисимметричность по любой паре греческих индексов означает, что $A^{\gamma\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_n\cdot k_{n-1}\cdot\ldots\cdot k_1}=A_{k_nk_{n-1}\ldots k_1}\varepsilon^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1}$, где $A_{k_nk_{n-1}\ldots k_1}$ — антисимметричный n-ковариантный пространственный тензор.

Вычисляя дивергенцию поля Φ^γ, определенного согласно (8.37), находим выражение для лагранжиана пустого пространства в случае $(n+1)$-мерного пространственно-временного многообразия:

$$\mathcal{L}' = \frac{\partial\Phi^\gamma}{\partial X^\gamma} = \left(\frac{\partial A^\gamma}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}} + \left(\frac{\partial A^{\alpha_1}}{\partial x^{k_1}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\right)(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1}) +$$
$$+\left(\frac{\partial A^{\alpha_2\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}}{\partial x^{k_2}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\right)(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})(\partial_{\alpha_2}\varphi^{k_2}) + \ldots +$$
$$+\left(\frac{\partial A^{\alpha_n\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_{n-1}\ldots\cdot k_1}}{\partial x^{k_n}} + \left(\frac{\partial A^{\gamma\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_n\cdot k_{n-1}\ldots\cdot k_1}}{\partial X^\gamma}\right)_{\text{expl}}\right)(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})\ldots(\partial_{\alpha_{n-1}}\varphi^{k_{n-1}})(\partial_{\alpha_n}\varphi^{k_n}) +$$
$$+\frac{\partial A^{\gamma\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_n\cdot k_{n-1}\ldots\cdot k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})\ldots(\partial_{\alpha_{n-1}}\varphi^{k_{n-1}})(\partial_{\alpha_n}\varphi^{k_n})(\partial_\gamma\varphi^{k_{n+1}}). \qquad (8.38)$$

Здесь последнее слагаемое при условии, что число физических полевых величин в точности равно $n+1$, может быть представлено в форме

$$\frac{\partial A^{\gamma\alpha_n\cdot\alpha_{n-1}\cdot\ldots\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_n\cdot k_{n-1}\ldots\cdot k_1}}{\partial x^{k_{n+1}}}(\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})\ldots(\partial_{\alpha_{n-1}}\varphi^{k_{n-1}})(\partial_{\alpha_n}\varphi^{k_n})(\partial_\gamma\varphi^{k_{n+1}}) =$$
$$= (\partial_{\alpha_1}\varphi^{k_1})\ldots(\partial_{\alpha_{n-1}}\varphi^{k_{n-1}})(\partial_{\alpha_n}\varphi^{k_n})(\partial_\gamma\varphi^{k_{n+1}})\varepsilon^{\gamma\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1}\frac{\partial A_{k_nk_{n-1}1}}{\partial x^{k_{n+1}}} = J\varepsilon^{k_{n+1}k_nk_{n-1}1}\frac{\partial A_{k_nk_{n-1}1}}{\partial x^{k_{n+1}}},$$

где J — якобиан отображения $(X^1, X^2, \ldots, X^{n+1}) \to (x^1, x^2, \ldots, x^{n+1})$.

8.5. Нулевые лагранжианы, инвариантные относительно сдвигов полевых переменных

Поставим далее задачу о разыскании наиболее общей формы лагранжиана пустого пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых переменных φ^s. Эта проблема особенно интересна в связи, например, с возможностью представления нелинейно упругого поля лагранжианом, который заведомо явно не будет зависеть от эйлеровых переменных.

Сформулированная проблема сразу же решается в случае, когда число пространственно-временных координат X^β равно трем и имеется три полевых величины φ^s, которые в применении к нелинейной теории упругости мы, как обычно, отождествим с переменными Эйлера x^s.

Действительно, скалярные и тензорные поля A, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, D в выражении (8.7) для лагранжиана пустого трехмерного пространства необходимо должны удовлетворять соотношениям совместности (8.21)

$$\text{grad}_{\text{expl}}A = \text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{B}, \qquad (\text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{C})^{\text{T}} = -\text{rot}_{\text{expl}}\mathbf{B}^{\text{T}}, \qquad \text{Grad}_{\text{expl}}D = \text{div}_{\text{expl}}\mathbf{C}^{\text{T}}.$$

Учитывая, что A, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ не зависят от переменных x^s, приходим к уравнениям

$$\text{Div}_{\text{expl}}\mathbf{B} = \mathbf{0}, \qquad \text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{C} = \mathbf{0}, \qquad \text{Grad}_{\text{expl}}D = \mathbf{0},$$

из которых следует, что лагранжиан пустого трехмерного пространства будет инвариантен относительно сдвигов эйлеровых переменных x^s, только если $A = A(X^\beta)$, D есть некоторая постоянная, и найдутся 1-ковариантное пространственное 1-ковариантное отсчетное тензорное поле $E_{k\alpha} = E_{k\alpha}(X^\beta)$ и контравариантное пространственное векторное поле $A^k = A^k(X^\beta)$ такие, что

$$\mathbf{B} = \text{Rot}_{\text{expl}}\mathbf{E} = (\mathbf{E}\times\boldsymbol{\nabla}_{\text{R}})_{\text{expl}}, \qquad \mathbf{C} = \text{Grad}_{\text{expl}}\mathbf{A} = (\mathbf{A}\otimes\boldsymbol{\nabla}_{\text{R}})_{\text{expl}}, \qquad (8.39)$$

или в координатной записи —

$$B^{\cdot\beta}_{k\cdot} = \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\partial_\gamma E_{k\alpha}, \qquad C^{k\cdot}_{\cdot\beta} = \partial_\beta A^k. \qquad (8.40)$$

Таким образом, наиболее общая форма лагранжиана пустого трехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов эйлеровых переменных x^s, есть[48]

$$\mathcal{L}'(\partial_\alpha\varphi^k, X^\beta) = A(X^\lambda) + \varepsilon^{\beta\alpha\gamma}(\partial_\beta\varphi^k)\partial_\gamma E_{k\alpha}(X^\lambda) + J(\partial_k X^\beta)\partial_\beta A^k(X^\lambda) + D_0 J. \tag{8.41}$$

Переходим к нахождению наиболее общей формы лагранжиана пустого четырехмерного пространства, инвариантного относительно сдвигов полевых переменных φ^s.

Исходя из представления лагранжиана (8.28) и учитывая условия совместности[49]

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1}}L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1}\right)_{\text{expl}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2}}L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_2\cdot k_1]}\right)_{\text{expl}} = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3}}L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_3\cdot k_2\cdot k_1]}\right)_{\text{expl}} = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha_4}}L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot[k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1]}\right)_{\text{expl}} = 0,\end{gathered} \tag{8.42}$$

сразу же заключаем относительно коэффициентов в разложении (8.28), что

$$\begin{gathered}L^{\alpha_1\cdot}_{\cdot k_1} = \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma}M^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}\right)_{\text{expl}}, \qquad L^{\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_2\cdot k_1} = \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma}M^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}\right)_{\text{expl}},\\ L^{\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = \left(\frac{\partial}{\partial X^\gamma}M^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}\right)_{\text{expl}}, \qquad L^{\alpha_4\cdot\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot k_4\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1} = \varepsilon^{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1}M_{k_4k_3k_2k_1},\end{gathered} \tag{8.43}$$

где все тензоры не зависят от полевых переменных φ^k; $M^{\gamma\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_1}$ антисимметричен по верхним индексам; $M^{\gamma\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричен по парам верхних индексов γ и α_2, α_1 и α_2[50], и по паре нижних латинских индексов; $M^{\gamma\alpha_3\cdot\alpha_2\cdot\alpha_1\cdot}_{\cdot\cdot k_3\cdot k_2\cdot k_1}$ антисимметричен по паре верхних индексов γ и α_3 и любой паре верхних индексов, не содержащей индекс γ[51], и по любой паре нижних латинских индексов; $M_{k_4k_3k_2k_1}$ — постоянные величины, антисимметричные по любой паре нижних латинских индексов.

8.6. Построение законов сохранения для систем дифференциальных уравнений в частных производных, не следующих из вариационного принципа

Как уже было отмечено, лагранжианы пустого пространства выступают в качестве основы решения задачи вариационного исчисления об «интегрирующем множителе». Эта проблема состоит в поиске таких функций $\mathcal{Q}^j(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\alpha)$, которые позволяли бы для данной системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$F_j(\varphi^k, \partial_\beta\varphi^k, \partial_\gamma\partial_\beta\varphi^k, \ldots, X^\alpha) = 0, \tag{8.44}$$

которая не вытекает из вариационного принципа, гарантировать выполнение равенства

$$\partial_\beta J^\beta = \mathcal{Q}^j F_j \tag{8.45}$$

с некоторым вектором J^β для произвольных полей φ^k и тем самым сформулировать на решениях системы (8.44) дивергентный закон сохранения

$$\partial_\beta J^\beta = 0. \tag{8.46}$$

«Множители» $\mathcal{Q}^j$ называются характеристиками закона сохранения.

Равенство (8.45), которое должно выполняться для произвольных физических полей φ^k, устанавливает, что $\mathcal{Q}^j F_j$ есть нулевой лагранжиан, т.е. действие

$$\Im = \int \mathcal{Q}^j F_j\, d^4X \tag{8.47}$$

нейтрально.

[48] Заметим, что тензор $E_{k\alpha}$, по существу, совпадает с тензором $K_{k\alpha}$ в формуле (8.19).

[49] Коэффициент A в (8.28) может, очевидно, зависеть лишь от пространственно-временных координат X^β.

[50] И, следовательно, антисимметричен по индексам γ и α_1.

[51] И, следовательно, антисимметричен по парам индексов γ и α_2, γ и α_1.

Метод «интегрирующего множителя» является обобщением классического метода поиска законов сохранения с помощью вариационных симметрий действия. Критерий инфинитезимальной инвариантности функционала действия относительно обобщенной группы преобразований (7.2) имеет вид

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = 0;$$

он, как известно, обобщается до

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^\gamma)}{\partial X^\gamma} = \varepsilon\frac{\partial(B^\gamma)}{\partial X^\gamma},$$

где $B^\gamma = B^\gamma(\varphi^k, \partial_\alpha\varphi^k, \partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^k, \dots, X^\beta)$. На основании (7.11) заключаем, что в случае, когда вариационная симметрия действия известна, то

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\overline{\delta}\varphi^j + \partial_\beta\left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right) = 0, \tag{8.48}$$

либо

$$\mathcal{E}_j(\mathcal{L})\overline{\delta}\varphi^j + \partial_\beta\left(\mathcal{L}\delta X^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\overline{\delta}\varphi^k\right) = \varepsilon\frac{\partial(B^\gamma)}{\partial X^\gamma}. \tag{8.49}$$

Разделив левые и правые части (8.48) и (8.49) на ε и обозначая $\mathcal{Q}^j = \frac{\overline{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}$, $J^\beta = \mathcal{L}\frac{\delta X^\beta}{\varepsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\varphi^k)}\frac{\overline{\delta}\varphi^k}{\varepsilon}$, приходим к равенству

$$\mathcal{Q}^j\mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(-J^\beta) \tag{8.50}$$

или соответственно —

$$\mathcal{Q}^j\mathcal{E}_j(\mathcal{L}) = \partial_\beta(B^\beta - J^\beta). \tag{8.51}$$

Сравнивая с (8.45) убеждаемся, что метод Нетер поиска законов сохранения на основе вариационных симметрий есть частный случай метода «интегрирующего множителя», а «интегрирующий множитель» сразу же находится, если известна вариационная симметрия действия, в виде

$$\mathcal{Q}^j = \frac{\overline{\delta}\varphi^j}{\varepsilon}. \tag{8.52}$$

Формулы (8.50) и (8.51) показывают, что $\mathcal{Q}^j\mathcal{E}_j(\mathcal{L})$ есть лагранжиан пустого пространства, следовательно, для произвольных полей φ^k выполняется равенство

$$\mathcal{E}_l(\mathcal{Q}^j\mathcal{E}_j(\mathcal{L})) = 0. \tag{8.53}$$

9. ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ОБОБЩЕННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ В ТЕРМИНАХ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мы будем следовать терминологии и обозначениям, принятым в монографии [11].

9.1. Формализм геометрических (точечных) групп Ли

Введем непрерывную однопараметрическую группу геометрических преобразований зависимых и независимых переменных (группу Ли) в форме разложения по степеням ε

$$\widetilde{X}^\beta = \mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = X^\beta + \varepsilon\xi^\beta(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \quad \widetilde{\varphi}^k = \Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon) = \varphi^k + \varepsilon h^k(\varphi^s, X^\gamma) + \dots, \tag{9.1}$$

где при $\varepsilon = 0$ выполняются условия $\mathcal{X}^\beta(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = X^\beta$, $\Phi^k(\varphi^s, X^\gamma, \varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \varphi^k$.

Явно выписанные члены определяют инфинитезимальное преобразование (9.1); ξ^β, h^k — инфинитезимальные образующие группы Ли (9.1).

Полные вариации переменных φ^s, X^γ пропорциональны инфинитезимальным образующим:

$$\xi^\gamma = \frac{\delta X^\gamma}{\varepsilon}, \qquad h^s = \frac{\delta\varphi^s}{\varepsilon}. \tag{9.2}$$

Следуя Ли, введем символ инфинитезимального преобразования (9.1), представляющий собой дифференциальный оператор первого порядка

$$\varsigma\cdot\partial = \xi^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} + h^{j}\frac{\partial}{\partial\varphi^{j}}, \tag{9.3}$$

действие которого на дифференцируемую функцию $F(\varphi^k, X^\beta)$ дается формулой

$$(\varsigma\cdot\partial)F = \xi^{\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} + h^{j}\frac{\partial F}{\partial\varphi^{j}}.$$

Здесь частные дифференцирования по независимым переменным X^α производятся лишь по их *явным* вхождениям, что как обычно мы будем отмечать символом expl при соответствующей частной производной. В противном случае дифференцирование по координате X^α будет считаться полным. Мы будем пользоваться компактными символами ∂_α, $\partial_\alpha^{\text{expl}}$ для указания на полное или частное (по явным вхождениям переменной X^α) дифференцирование.

Действие однопараметрической группы преобразований (9.1) распространить (продолжить) также и на частные производные произвольного сколь угодно высокого порядка, считая их *дополнительными* к φ^j, X^α координатами в продолженном пространстве. Оно вычисляется как результат замены переменных согласно (9.1). Действительно, преобразования вида (9.1) трансформируют функции $\varphi^j(X^\alpha)$ в новые функции $\widetilde{\varphi}^j(\widetilde{X}^\alpha)$, поскольку, подставляя в первую группу соотношений (9.1) зависимости $\varphi^s=\varphi^s(X^\alpha)$, можно выразить из указанных соотношений «старые» независимые переменные X^α через «новые» независимые переменные $\widetilde{X}^\alpha$, а затем с помощью второй группы соотношений (9.1) — «новые» полевые переменные $\widetilde{\varphi}^k$ через «новые» независимые переменные $\widetilde{X}^\alpha$. После этого можно, используя «новый» набор зависимых и независимых переменных, вычислить частные производные $\widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^k$, $\widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^k$, $\ldots$. Все это позволяет ввести один, два, три и т.д. раза продолженные однопараметрические группы преобразований и говорить о преобразовании как независимых переменных $X^\gamma\to\widetilde{X}^\gamma$, так и всего дифференциального комплекса

$$\begin{array}{c}\varphi^s,\ \partial_{\alpha_1}\varphi^s,\ \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s,\ldots\\ \downarrow\\ \widetilde{\varphi}^s,\ \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^s,\ \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^s,\ldots\end{array} \tag{9.4}$$

под действием группового преобразования (9.1).

Инфинитезимальный оператор один раз продолженной группы (первое продолжение инфинитезимального оператора (9.3)) имеет вид

$$\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial = \xi^{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial X^{\gamma}}\right)_{\text{expl}} + h^{j}\frac{\partial}{\partial\varphi^{j}} + h^{k}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\varphi^{k})}, \tag{9.5}$$

где дополнительные координаты h^k_α зависят от координат продолженного пространства и выражаются согласно формулам первого продолжения [11, с. 58]:

$$h^{l}_{\alpha} = \left(\frac{\partial h^{l}}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha\varphi^{s})\frac{\partial h^{l}}{\partial\varphi^{s}} - (\partial_\sigma\varphi^{l})\left(\left(\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha\varphi^{k})\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial\varphi^{k}}\right). \tag{9.6}$$

Можно придать формулам для вычисления дополнительных координат инфинитезимального оператора h^k_α несколько иную форму, отражающую их рекуррентный характер, если ввести *усеченный* оператор $\underset{1}{D}_\alpha$ «полного» дифференцирования по независимой переменной с номером α:

$$h^{l}_{\alpha} = \underset{1}{D}_{\alpha}(h^{l}) - (\partial_\sigma\varphi^{l})\underset{1}{D}_{\alpha}(\xi^{\sigma}), \tag{9.7}$$

где

$$\underset{1}{D}_{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial X^{\alpha}}\right)_{\text{expl}} + (\partial_\alpha\varphi^{k})\frac{\partial}{\partial\varphi^{k}}. \tag{9.8}$$

Ясно, что можно также вести речь о втором продолжении однопараметрической группы преобразований (9.1) и ее инфинитезимальном операторе $\underset{2}{\varsigma}\cdot\partial$, который имеет вид

$$\underset{2}{\varsigma}\cdot\partial = \underset{1}{\varsigma}\cdot\partial + h^l_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\partial_\beta\varphi^l)}, \tag{9.9}$$

где

$$h^l_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial h^l_\alpha}{\partial X^\beta}\right)_{\mathrm{expl}} + (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial h^l_\alpha}{\partial\varphi^k} + (\partial_\sigma\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial h^l_\alpha}{\partial(\partial_\sigma\varphi^k)} - (\partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^l)\left(\left(\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial X^\beta}\right)_{\mathrm{expl}} + (\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial\varphi^k}\right). \tag{9.10}$$

Эта же формула с использованием оператора $\underset{2}{D}_\beta$ представляется как

$$h^l_{\alpha\beta} = \underset{2}{D}_\beta(h^l_\alpha) - (\partial_\sigma\partial_\alpha\varphi^l)\underset{1}{D}_\beta(\xi^\sigma), \tag{9.11}$$

где

$$\underset{2}{D}_\beta = \underset{1}{D}_\beta + (\partial_\sigma\partial_\beta\varphi^k)\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma\varphi^k)}. \tag{9.12}$$

Приведем также формулы для n раз продолженной однопараметрической группы преобразований (9.1):

$$\underset{n}{\varsigma}\cdot\partial = \underset{n-1}{\varsigma}\cdot\partial + h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\varphi^l)}, \tag{9.13}$$

где

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \underset{n}{D}_\beta(h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}) - (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)\underset{1}{D}_\beta(\xi^\sigma), \tag{9.14}$$

$$\underset{n}{D}_\beta = \underset{n-1}{D}_\beta + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\beta\varphi^l)\frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\varphi^l)}. \tag{9.15}$$

Заметим, что в некоторых случаях удобно использовать обозначения

$$\left(\frac{\partial}{\partial X^\beta}\right)_{\mathrm{expl}} = \partial^{\mathrm{expl}}_\beta, \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi^l} = \underset{0}{\partial}_l, \qquad \frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)} = \underset{s}{\partial}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}_l \tag{9.16}$$

с целью наиболее обозримого представления формул. Так, весь комплекс формул продолжения приобретает тогда следующий наиболее компактный вид:

$$\underset{n}{\varsigma}\cdot\partial = \underset{n-1}{\varsigma}\cdot\partial + h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\underset{n}{\partial}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}_l, \tag{9.17}$$

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \underset{n}{D}_\beta(h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}) - (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)\underset{1}{D}_\beta(\xi^\sigma), \tag{9.18}$$

$$\underset{n}{D}_\beta = \underset{n-1}{D}_\beta + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\beta\varphi^l)\underset{n-1}{\partial}{}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}_l. \tag{9.19}$$

Для координат продолженных операторов имеем развернутую формулу

$$\begin{gathered} h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \left(\partial^{\mathrm{expl}}_\beta + \sum_{s=0}^{n-1}(\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}\ldots\partial_{\beta_s}\partial_\beta\varphi^k)\underset{s}{\partial}{}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_s}_k\right)h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}} - \\ -(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)(\partial^{\mathrm{expl}}_\beta + (\partial_\beta\varphi^k)\underset{0}{\partial}_k)\xi^\sigma. \end{gathered} \tag{9.20}$$

Поскольку координаты продолженных операторов $h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}$ зависят от градиентов переменных φ^k порядка не выше, чем $n-1$, то последнюю формулу можно переписать, используя операторы полного дифференцирования, в следующем виде:

$$h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\beta} = \partial_\beta h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}} - (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{n-1}}\partial_\sigma\varphi^l)\partial_\beta\xi^\sigma, \tag{9.21}$$

откуда последовательно имеем

$$
\begin{gathered}
h^l_{\alpha_1} = \partial_{\alpha_1} h^l - (\partial_\sigma \varphi^l)\partial_{\alpha_1}\xi^\sigma = \partial_{\alpha_1}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma,\\
h^l_{\alpha_1\alpha_2} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma,\\
h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma.
\end{gathered}
\tag{9.22}
$$

Вводя обозначение (характеристика инфинитезимального оператора $\varsigma\cdot\partial$)

$$
\mathcal{Q}^l = h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma, \tag{9.23}
$$

для координат продолженных операторов находим

$$
h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\mathcal{Q}^l + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \tag{9.24}
$$

Знание координат продолжений инфинитезимального оператора позволяет вычислить инфинитезимальную часть преобразований частных производных (9.4) как

$$
\widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\ldots\widetilde{\partial}_{\alpha_n}\widetilde{\varphi}^k = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_n}\varphi^k + \varepsilon h^k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + \ldots . \tag{9.25}
$$

Изменение функции $F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \ldots, X^\beta)$, которая зависит от градиентов φ^k порядка не выше, чем m, вследствии преобразования ее аргументов согласно (9.1) определяется формулой

$$
F(\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\varphi^s, \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\varphi^s, \ldots, X^\beta) - F(\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\varphi}^s, \widetilde{\partial}_{\alpha_1}\widetilde{\partial}_{\alpha_2}\widetilde{\varphi}^s, \ldots, \widetilde{X}^\beta) = \varepsilon(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)F + \ldots . \tag{9.26}
$$

Следовательно, вариация функции F, обусловленная вариацией ее аргументов согласно (9.1), есть

$$
\frac{\delta F}{\varepsilon} = (\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)F, \tag{9.27}
$$

где

$$
\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial = \varsigma\cdot\partial + \sum_{s=1}^{m} h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\frac{\partial}{\partial(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\varphi^l)}, \tag{9.28}
$$

или в сокращенных обозначениях

$$
\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial = \varsigma\cdot\partial + \sum_{s=1}^{m} h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}, \tag{9.29}
$$

$$
h^l_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}(h^l - (\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma. \tag{9.30}
$$

Еще одно важное представление m раз продолженного инфинитезимального оператора будет дано далее (см. (9.45)):

$$
\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial = \sum_{s=0}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} + \xi^\sigma\partial_\sigma. \tag{9.31}
$$

Начиная с этого места мы будем использовать еще более компактную форму записи, вводя «прямые» аналоги D, $\underset{s}{\partial}$ дифференциальных операторов ∂_α, $\underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}$. В результате вместо (9.31) имеем

$$
\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial = \sum_{s=0}^{m}(D^s\mathcal{Q})\cdot\underset{s}{\partial} + \xi\cdot D. \tag{9.32}
$$

Из формулы (9.31), опираясь на доказываемый далее результат (см. (9.50)):

$$
\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{Q}^l\underset{0}{\partial}{}_l\mathcal{L}, \tag{9.33}
$$

можно получить

$$
(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \xi^\sigma\partial_\sigma\mathcal{L}. \tag{9.34}
$$

9.2. Теоретико-групповой формализм в теории геометрических вариационных симметрий

Снова рассмотрим группу Ли геометрических преобразований (9.1) и ее инфинитезимальный оператор

$$\varsigma \cdot \partial = \xi^{\alpha} \partial_{\alpha}^{\text{expl}} + h^{j} \underset{0}{\partial}_{j}. \tag{9.35}$$

Критерий инфинитезимальной инвариантности действия относительно однопараметрической группы преобразований (9.1) в терминах исчисления вариаций имеет вид (см. (4.9))

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^{\gamma})}{\partial X^{\gamma}} = 0, \tag{9.36}$$

а его обобщенный вариант (см. (4.13)) —

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial(\delta X^{\alpha})}{\partial X^{\alpha}} = \varepsilon\frac{\partial B^{\gamma}}{\partial X^{\gamma}}. \tag{9.37}$$

В терминах теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных они могут быть с помощью (9.27) записаны в форме

$$(\underset{m}{\varsigma} \cdot\partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial \xi^{\gamma}}{\partial X^{\gamma}} = 0, \tag{9.38}$$

$$(\underset{m}{\varsigma} \cdot\partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial X^{\alpha}} = \frac{\partial B^{\gamma}}{\partial X^{\gamma}}, \tag{9.39}$$

пригодной для лагранжианов, зависящих от градиентов полевых переменных порядка, не превышающего m.

Здесь действие оператора $\underset{m}{\varsigma} \cdot\partial$ на лагранжиан определяется формулами продолжения:

$$\underset{m}{\varsigma} \cdot\partial = \varsigma \cdot \partial + \sum_{s=1}^{m} h^{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} \underset{s}{\partial}_{l}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}, \tag{9.40}$$

$$h^{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} = \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}(h^{l} - (\partial_{\sigma}\varphi^{l})\xi^{\sigma}) + (\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\partial_{\sigma}\varphi^{l})\xi^{\sigma}. \tag{9.41}$$

На основании (9.39) заключаем, что

$$\mathcal{E}_{l}((\underset{m}{\varsigma} \cdot\partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_{\alpha}\xi^{\alpha}) = 0.$$

Оператор Эйлера в символике теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных имеет форму

$$\mathcal{E}_{l} = \sum_{s\geq 0} (-1)^{s} \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s} \underset{s}{\partial}_{l}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}, \tag{9.42}$$

где нулевое слагаемое суммы есть $\underset{0}{\partial}_{l}$.

Вводя «прямые» аналоги D, $\underset{s}{\partial}$ вместо дифференциальных операторов ∂_{α}, $\underset{s}{\partial}_{l}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}$, формулу (9.42) можно переписать как

$$\mathcal{E} = \sum_{s\geq 0} (-1)^{s} D^{s} \cdot \underset{s}{\partial}. \tag{9.43}$$

Левая часть (9.39) допускает преобразование, которое позволяет быстро найти дивергентный закон сохранения в случае лагранжианов, которые зависят от градиентов полевых переменных выше первого порядка.

Прежде всего, нетрудно заметить, что

$$(\underset{m}{\varsigma} \cdot\partial)\mathcal{L} = (\varsigma \cdot \partial)\mathcal{L} + \sum_{s=1}^{m} h^{l}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} \underset{s}{\partial}_{l}^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L},$$

$$(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)\mathcal{L}=\xi^\sigma\partial_\sigma^{\mathrm{expl}}\mathcal{L}+h^l\underset{0}{\partial}_l\mathcal{L}+\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\partial_\sigma\varphi^l)\xi^\sigma\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}+\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L},$$

$$(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)\mathcal{L}=\xi^\sigma\partial_\sigma^{\mathrm{expl}}\mathcal{L}+h^l\underset{0}{\partial}_l\mathcal{L}+\xi^\sigma\partial_\sigma\mathcal{L}-(\xi^\sigma\partial_\sigma^{\mathrm{expl}}\mathcal{L}+\xi^\sigma(\partial_\sigma\varphi^l)\underset{0}{\partial}_l\mathcal{L})+\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}.$$

Из последнего равенства находим

$$(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)\mathcal{L}=\partial_\sigma(\xi^\sigma\mathcal{L})-\mathcal{L}(\partial_\sigma\xi^\sigma)+\mathcal{Q}^l\underset{0}{\partial}_l\mathcal{L}+\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}. \tag{9.44}$$

Заметим, что полученная формула допускает более компактную запись, если включить третье по счету слагаемое в правой части в сумму:

$$\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial=\sum_{s=0}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}+\xi^\sigma\partial_\sigma, \tag{9.45}$$

или

$$\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial=\sum_{s=0}^{m}(D^s\mathcal{Q})\cdot\underset{s}{\partial}+\xi\cdot D, \tag{9.46}$$

понимая при этом нулевое по счету слагаемое в этой сумме как $\mathcal{Q}^l\underset{0}{\partial}_l$.

Рассмотрим далее сумму

$$\sum_{s=1}^{m}(D^s\mathcal{Q})\cdot\underset{s}{\partial}\mathcal{L}=\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L},$$

и наряду с ней суммы ($i=1,2,\ldots,m$)

$$S_i=\sum_{s=i}^{m}(\partial_{\alpha_i}\partial_{\alpha_{i+1}}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{i-1}}\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}=\sum_{s=i}^{m}(D^{s-i+1}\mathcal{Q})\cdot D^{i-1}\cdot\underset{s}{\partial}\mathcal{L}.$$

Выполняя «дифференцирование по частям», последовательно находим

$$\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}=\partial_{\alpha_1}\sum_{s=2}^{m}(\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_3}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}-$$
$$-\sum_{s=2}^{m}(\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_3}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}-\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\underset{1}{\partial}_l^{\alpha_1}\mathcal{L}+\partial_{\alpha_1}(\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}_l^{\alpha_1}\mathcal{L}),$$

$$\sum_{s=i}^{m}(\partial_{\alpha_i}\partial_{\alpha_{i+1}}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{i-1}}\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}=$$
$$=\partial_{\alpha_i}\sum_{s=i+1}^{m}(\partial_{\alpha_{i+1}}\partial_{\alpha_{i+2}}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{i-1}}\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}-$$
$$-\sum_{s=i+1}^{m}(\partial_{\alpha_{i+1}}\partial_{\alpha_{i+2}}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_i}\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}-$$
$$-\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_i}\underset{i}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}\mathcal{L}+\partial_{\alpha_i}(\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{i-1}}\underset{i}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}\mathcal{L})\qquad(i=2,3,\ldots,m-1),$$

$$\sum_{s=m}^{m}(\partial_{\alpha_m}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{m-1}}\underset{m}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\mathcal{L}=\partial_{\alpha_m}\sum_{s=m}^{m}\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{m-1}}\underset{m}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\mathcal{L}-$$
$$-\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_m}\underset{m}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\mathcal{L}.$$

Вводя обозначения

$$\mathcal{J}_1^{\alpha_1}=\sum_{s=2}^{m}(\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_3}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}_l^{\alpha_1}\mathcal{L},$$

$$\mathcal{J}_i^{\alpha_i} = \sum_{s=i+1}^{m} (\partial_{\alpha_{i+1}}\partial_{\alpha_{i+2}}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{i-1}}\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L} + \mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{i-1}}\underset{i}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}\mathcal{L} \tag{9.47}$$

$$(i = 2, 3, \ldots, m-1),$$

$$\mathcal{J}_m^{\alpha_m} = \mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_{m-1}}\underset{m}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\mathcal{L},$$

$$\Gamma_i = \mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_i}\underset{i}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i}\mathcal{L} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{9.48}$$

или в прямой записи $\mathcal{J}_i = \sum\limits_{s=i}^{m}(D^{s-i}\mathcal{Q})\cdot D^{i-1}\cdot\underset{s}{\partial}\mathcal{L}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\Gamma_i = \mathcal{Q}\cdot(D^i\cdot\underset{i}{\partial})$ (по i не суммировать, $i = 1, 2, \ldots, m$), полученные ранее соотношения можно представить в форме

$$\begin{array}{ll}
S_1 = \sum\limits_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L} = \partial_{\alpha_1}\mathcal{J}_1^{\alpha_1} - S_2 - \Gamma_1 & (i=1), \\
\vdots & \vdots \\
S_i = \partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i} - S_{i+1} - \Gamma_i & (i), \\
\vdots & \vdots \\
S_m = \partial_{\alpha_m}\mathcal{J}_m^{\alpha_m} - \Gamma_m & (i=m).
\end{array} \tag{9.49}$$

Заменим затем в (9.49) последовательно, начиная с первой строки, в строке с номером j сумму S_{j+1} ее значением, указываемым строкой с номером $j+1$. В результате получим:

$$\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\Gamma_i.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^i\Gamma_i = \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{Q}^l\underset{0}{\partial}_l\mathcal{L}$, то окончательно имеем фундаментальную для теории вариационных симметрий формулу

$$\sum_{s=1}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) - \mathcal{Q}^l\underset{0}{\partial}_l\mathcal{L}, \tag{9.50}$$

или

$$\sum_{s=0}^{m}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\ldots\partial_{\alpha_s}\mathcal{Q}^l)\underset{s}{\partial}_l^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i} + \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}). \tag{9.51}$$

На основании (9.44) и (9.50) имеем

$$(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}\partial_\sigma\xi^\sigma = \partial_\sigma(\xi^\sigma\mathcal{L}) + \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i}. \tag{9.52}$$

Последнее соотношение в прямой записи будет иметь вид

$$(\underset{m}{\varsigma}\cdot\partial)\mathcal{L} + \mathcal{L}D\cdot\xi = D\cdot(\xi\mathcal{L}) + \mathcal{Q}\cdot\mathcal{E}(\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}D\cdot\mathcal{J}_i. \tag{9.53}$$

Таким образом, обобщенный критерий инфинитезимальной инвариантности действия (9.37) окончательно представляется в виде

$$\partial_\sigma(B^\sigma - \xi^\sigma\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^{m}(-1)^i\partial_{\alpha_i}\mathcal{J}_i^{\alpha_i} = \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}), \tag{9.54}$$

который позволяет быстро определить вектор J^σ в каноническом представлении

$$\partial_\sigma(B^\sigma - J^\sigma) = \mathcal{Q}^l\mathcal{E}_l(\mathcal{L}). \tag{9.55}$$

Уравнение (9.54) в прямой записи есть

$$D\cdot(B-\xi\mathcal{L}-A)=\mathcal{Q}\cdot\mathcal{E}(\mathcal{L}), \tag{9.56}$$

где $-A=\sum\limits_{i=1}^{m}(-1)^i\mathcal{J}_i$.

Сейчас мы проведем необходимые вычисления для случаев $m=1,2,3$.

Случай $m=1$. $\mathcal{J}_1^{\alpha_1}=\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^{\alpha_1}\mathcal{L}$, $\mathrm{J}^\sigma=\xi^\sigma\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^{\sigma}\mathcal{L}$.

Случай $m=2$. $\mathcal{J}_1^{\alpha_1}=(\partial_{\alpha_2}\mathcal{Q}^l)\underset{2}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2}\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^{\alpha_1}\mathcal{L}$, $\mathcal{J}_2^{\alpha_2}=\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\underset{2}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2}\mathcal{L}$,

$$J^\sigma=\xi^\sigma\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^{\sigma}\mathcal{L}+(\partial_\beta\mathcal{Q}^l)\underset{2}{\partial}{}_l^{\sigma\beta}\mathcal{L}-\mathcal{Q}^l\partial_\beta\underset{2}{\partial}{}_l^{\sigma\beta}\mathcal{L}.$$

Случай $m=3$. $\mathcal{J}_1^{\alpha_1}=(\partial_{\alpha_2}\mathcal{Q}^l)\underset{2}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2}\mathcal{L}+(\partial_{\alpha_2}\partial_{\alpha_3}\mathcal{Q}^l)\underset{3}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^{\alpha_1}\mathcal{L}$,

$$\mathcal{J}_2^{\alpha_2}=(\partial_{\alpha_3}\mathcal{Q}^l)\partial_{\alpha_1}\underset{3}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\underset{2}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2}\mathcal{L},\qquad \mathcal{J}_3^{\alpha_3}=\mathcal{Q}^l\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\underset{3}{\partial}{}_l^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\mathcal{L},$$

$$J^\sigma=\xi^\sigma\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\underset{1}{\partial}{}_l^{\sigma}\mathcal{L}+(\partial_\beta\mathcal{Q}^l)\underset{2}{\partial}{}_l^{\sigma\beta}\mathcal{L}-\mathcal{Q}^l\partial_\beta\underset{2}{\partial}{}_l^{\sigma\beta}\mathcal{L}+(\partial_\alpha\partial_\beta\mathcal{Q}^l)\underset{3}{\partial}{}_l^{\sigma\alpha\beta}\mathcal{L}-(\partial_\beta\mathcal{Q}^l)\partial_\alpha\underset{3}{\partial}{}_l^{\sigma\alpha\beta}\mathcal{L}+\mathcal{Q}^l\partial_\alpha\partial_\beta\underset{3}{\partial}{}_l^{\sigma\alpha\beta}\mathcal{L}.$$

Библиографический список

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: В 2 т. Т. I. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: В 2 т. Т. II. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.

3. *Noether E.* Invariante Variationsprobleme // Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Gottingen. Math.-Physik. Kl. 2. 1918. S. 235–257.

4. *Радаев Ю.Н., Гудков В.А.* О вычислении нулевых Лагранжианов нелинейно упругого поля // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественно-науч. сер. 2002. Спец. вып. С. 39–56.

5. *Maugin G.A.* Material Inhomogeneities in Elasticity. L.: Chapman & Hall, 1993. 276 p.

6. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.

7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: В 2 т. Т. 1. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1933. 528 с.

8. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. N.Y.: Interscience Publishers, 1953. 562 p. (Пер. на рус. яз. см. [6]).

9. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.

10. *Gelfand I.M., Fomin S.V.* Calculus of Variations. (Revised English ed. Translated and edited by R.A. Silverman.) Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1963. 232 p. (Оригинальное издание см. [9]).

11. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

12. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

13. *Olver P.J.* Application of Lie Groups to Differential Equations. N.Y.: Springer, 1986. (Пер. на рус. яз. см. [14]).

14. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М: Мир, 1989. 639 с.

15. *Olver P.J.* Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge; N.Y.; Melbourne: Cambridge University Press, 1995. 526 p.

16. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов: В 4 т. Т. 1. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1965. 700 с.

17. *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. М.: Атомиздат, 1978. 64 с.

18. *Truesdell C., Toupin R.A.* The Classical Field Theories/ Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics, V.III/1 (ed. S. Flugge). Berlin: Springer, 1960. P. 226–793.

19. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

20. *Silhavy M.* The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1997. 506 p.

21. *Bessel-Hagen E.* Uber die Erhaultungssatze der Elektrodynamik // Math. Ann. 1921. V. 84. P. 258–276.

22. *Меллер К.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.

23. *Maugin G.A.* Material forces: Concepts and applications// Applied Mechanics Reviews. 1995. V. 48. P. 213–245.

24. *Piola G.* Nuovo analisi per tutti le questioni della meccanica moleculare// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1835. V. 21. P. 155–321.

25. *Piola G.* Intorno alle equazioni fondamentali del

movimento di corpi qualsivoglioni considerati secondo la naturale loro forma e costituva// Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena. 1848. V. 24(1). P. 1–186.
26. *Eshelby J.D.* The Force on an Elastic Singularity// Phil. Trans. Roy. Soc. L., 1951. V. A244. P. 87–112.
27. *Шварц Л.* Анализ: В 2 т. М.: Мир, 1972. Т. II. 528 с.
28. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
29. *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 412 с.

УДК 539.374

СВЯЗАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев*, Д.А. Семенов*
Московский городской университет управления Правительства Москвы,
кафедра прикладной математики;
*Самарский государственный университет,
кафедра механики сплошных сред
E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru, semenow@ssu.samara.ru

В представляемой работе в рамках линейной теории недиссипативной термоупругости Грина – Нахди (GNII, гиперболическая термоупругость), рассматривающей термоупругую деформацию среды как волновой недиссипативный процесс, с помощью связанных гиперболических уравнений движения и теплопроводности дается анализ гармонических волн, распространяющихся вдоль оси свободного теплоизолированного цилиндрического волновода. Проведен анализ частотного уравнения и форм гармонических волн в бесконечном цилиндрическом термоупругом волноводе. Численно определена зависимость волнового числа от частоты. Особое внимание уделяется волнам второго азимутального порядка. Исследованию предшествует изучение (с помощью геометрических и кинематических условий совместности Адамара – Томаса) слабых разрывов решений связанных уравнений гиперболической термоупругости, а также полный анализ вопросов распространения плоских гармонических связанных незатухающих термоупругих волн.

Ключевые слова: гиперболическая термоупругость, термоупругая деформация, недиссипативный процесс, гармоническая волна, волновое число, цилиндрический волновод.

Coupled Dynamic Problems of Hyperbolic Thermoelasticity

V.A. Kovalev, Yu.N. Radayev*, D.A. Semenov*
Moscow City Government University of Management,
Chair of Applied Mathematics
*Samara State University,
Chair of Continuum Mechanics
E-mail: vlad_koval@mail.ru, radayev@ssu.samara.ru, semenow@ssu.samara.ru

In the present paper in the framework of the linear non-dissipative coupled thermoelasticity (GNII, hyperbolic thermoelasticity), treating the heat transport as propagation with finite speed of undamped waves of second sound, harmonic coupled thermoelastic waves propagating in an infinite free from tractions thermoisolated cylinder are studied. Dispersion relation is derived for this type of thermoelastic waves for an arbitrary azimuthal order. Numerical results for wave numbers depending on frequency are obtained. Special attention is paid to the waves of the second azimuthal order. The study follows investigation of weak discontinuities propagation in GNII media by the Thomas – Hadamard technique and analysis of plane harmonic thermoelastic coupled waves.

Key words: hyperbolic thermoelasticity, thermoelastic strain, non-dissipative process, harmonic wave, wave number, cylindrical waveguide.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория термоупругости (см., например, [1, 2]) основывается на законе теплопроводности Фурье, который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла $\mathbf{h}$ и отрицательного градиента температуры θ:

$$\mathbf{h} = -\Lambda_* \boldsymbol{\nabla}\theta,$$

где Λ_* — коэффициент теплопроводности (thermal conductivity). Соответствующее уравнение теплопроводности, как известно, принадлежит к параболическому типу. Поэтому температурное возмущение, локализованное в определенном месте термоупругого тела, должно немедленно ощущаться и в любом другом месте, а это, вообще говоря, противоречит принципу причинности. Классическая теория термоупругости предсказывает, таким образом, бесконечно большую скорость распространения любого термического сигнала.