Поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(t)dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{I}\frac{g(t)dt}{t-z}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p}{2\pi}\iint_{R_j}\frac{f(x_t)}{\overline{t}|t|^p}\frac{dx_tdy_t}{t-z}-\Psi(z),$$

причем первое и второе слагаемые правой части имеют в точке 0 особенности порядка p (для первого слагаемого этот результат можно найти в [1, 2], а для второго это нетрудно получить с помощью известных интегральных неравенств, см., напр., [4]), то интеграл типа Коши (3) имеет в этой точке особенность порядка не ниже $p+\delta$. Легко убедиться, что этот порядок может превосходить единицу, и в этом случае задача о скачке (1) не имеет решений в классе функций, удовлетворяющих условию (2). Тем самым доказана

Теорема 1. *Существует негладкая дуга Γ с началом в точке 0 и концом в точке 1 и заданная на ней функция $g(t)$ с особенностью порядка p в начальной точке кривой, удовлетворяющая условию Гёльдера в остальных её точках, для которых задача о скачке* (1) *не имеет решений в классе функций, удовлетворяющих условию* (2).

В связи с этим возникает потребность в достаточных условиях разрешимости этой задачи. Сейчас мы приведем одно такое условие. Опишем сначала класс кривых, к которому оно применимо.

Простую жорданову дугу Γ с началом в точке 0 и концом в точке 1 мы относим к классу Z_0, если существует гладкая дуга Γ' с теми же началом и концом такая, что симметрическая разность $\Gamma\triangle\Gamma'$ представляет собой счетное семейство замкнутых кусочно-гладких кривых, ограничивающих попарно не пересекающиеся области с единственной точкой сгущения в начале координат.

Кроме того, нам понадобится так называемая размерность Минковского (она же box dimension) кривой Γ. Её определение можно найти, например, в [5].

Теорема 2. *Пусть дуга Γ имеет размерность Минковского $d<2$ и принадлежит классу Z_0, а заданная на ней функция $g(t)$ представима в виде $g(t)=|t|^{-p}f(t)$, где $f\in H_\nu(\Gamma)$, $p<1$ и $\nu>d/2$. Тогда задача о скачке* (1) *имеет решение в классе функций, удовлетворяющих условию* (2).

Доказательство. Доказательство в целом аналогично доказательству разрешимости задачи о скачке на замкнутой неспрямляемой кривой в работе [3]. □

Библиографический список

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с. [*Gakhov F.* Boundary value problems. Oxford : Permagon Press, 1966.]

2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1962. 600 с. [*Muskhelishvili N. I.* Singular Integral Equations / ed. by J. R. M. Radok. Leyden : Noordhoff Intern. Publish., 1977.]

3. *Кац Б. А.* Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 68–80. [*Kats B. A.* The Riemann problem on a closed Jordan curve // Soviet Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1983. Vol. 27, № 4. P. 83–98.]

4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические фукции. М. : Наука, 1988. 509 с. [*Vekua I. N.* Generalized Analytic Functions. Oxford : Pergamon Press, 1962.]

5. *Федер Е.* Фракталы. М. : Мир, 1991. 282 с. [*Feder J.* Fractals. New York : Plenum Press, 1988.]

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет
E-mail: leni2006@mail.ru

Рассмотрена задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа. С помощью метода Римана построены управляющие функции, переводящие объект, описываемый системой, из заданного начального состояния в финальное.

Ключевые слова: граничное управление, система уравнений гиперболического типа, метод Римана.

Boundary Control Problem for the Hyperbolic System

E. A. Kozlova

A boundary control problem for the hyperbolic system was considered. The control functions transferring the object described by this system from the given initial state to the final state were constructed using the Riemann method.

Key words: boundary control, hyperbolic system, Riemann method.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач современной теории управления является задача управления поведением объектов, изменение состояния которых описывается с помощью уравнений с частными производными. Цель управления состоит в том, чтобы перевести изучаемый объект из одного известного состояния в другое, влияя на некоторые его параметры. Впервые подобные задачи были сформулированы в работах А. Г. Бутковского [1] и J.-L. Lions [2].

В качестве управляющей функции может быть использована правая часть уравнения или системы уравнений (см., например, [3]). Далее будем рассматривать граничное управление, т. е. управление посредством граничных условий. В последние годы появились работы В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, посвященные исследованию задач граничного управления для уравнения колебаний струны (в частности, [4–7]), в которых были получены в явном виде управляющие функции, переводящие струну из заданного начального состояния в заданное финальное состояние за определенное время. При этом рассматривались различные типы граничных управлений. Были исследованы задачи для уравнений колебаний неоднородной струны [8], радиально-симметричной мембраны [9], телеграфного уравнения [10].

Задачи, поставленные для уравнения колебаний струны, были обобщены на случай системы уравнений А. А. Андреевым и С. В. Лексиной в [11, 12].

Настоящая работа посвящена задаче граничного управления для системы уравнений с частными производными вида

$$u_{tt} - Au_{xx} + Cu = 0, \tag{1}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \dots, u_n(x,t))^T$ — вектор-функция, A, C — постоянные квадратные матрицы порядка n, для которых верно $AC = CA$. Рассмотрим случай, когда матрица A имеет различные положительные собственные значения $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ и выполняется условие $\lambda_1^2 > \dots > \lambda_n^2$.

Пусть в прямоугольнике $Q = [0,l] \times [0,T]$ при $T > l/\lambda_n$ задана система (1) и выполняются следующие начальные условия:

$$u(x,0) = \varphi^0(x), \qquad u_t(x,0) = \psi^0(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и финальные условия:

$$u(x,T) = \varphi^1(x), \qquad u_t(x,T) = \psi^1(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{3}$$

Найти граничные управления:

$$\mu(t) = u(0,t), \qquad \nu(t) = u(l,t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Здесь $\varphi^0(x)$, $\psi^0(x)$, $\varphi^1(x)$, $\psi^1(x)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ — вектор-функции размерности n, $\varphi_k^i(x) \in C^2[0,l]$, $\psi_k^i(x) \in C^1[0,l]$, $(i = 0,1)$; $\mu_k(t), \nu_k(t) \in C[0,T]$, $k = \overline{1,n}$.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Известно [13], что существует невырожденная матрица S такая, что

$$S^{-1}AS = J_A,$$

где $J_A = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\}$ — жорданова нормальная форма матрицы A. Матрица перехода S составляется из собственных векторов матрицы A.

Матрицы A и C коммутируют, собственные значения A различны, поэтому C является простой и имеет тот же набор собственных векторов, что и A [13]. Таким образом, обе рассматриваемые матрицы приводятся к жордановой нормальной форме с помощью одного преобразования подобия: $S^{-1}CS = J_C$. Отметим, что $J_C = \mathrm{diag}\,\{\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_n\}$.

Выполним замену $w(x,t) = S^{-1}u(x,t)$, которая приведет систему (1) к виду

$$w_{tt} - J_A w_{xx} + J_C w = 0, \tag{4}$$

начальные и финальные условия сведутся к

$$w(x,0) = S^{-1}\varphi^0(x) = \tilde{\varphi}^0(x), \qquad w_t(x,0) = S^{-1}\psi^0(x) = \tilde{\psi}^0(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

и

$$w(x,T) = S^{-1}\varphi^1(x) = \tilde{\varphi}^1(x), \qquad w_t(x,T) = S^{-1}\psi^1(x) = \tilde{\psi}^1(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

соответственно, а граничные управления примут вид

$$\tilde{\mu}(t) = w(0,t) = S^{-1}\mu(t), \qquad \tilde{\nu}(t) = w(l,t) = S^{-1}\nu(t), \qquad 0 \le t \le T.$$

Из (4)–(6) для k-й компоненты вектор-функции $w(x,t)$ получаем задачу управления в области Q, состоящую из уравнения

$$(w_k)_{tt} - \lambda_k^2 (w_k)_{xx} + c_k w_k = 0, \tag{7}$$

начальных условий:

$$w_k(x,0) = \tilde{\varphi}_k^0(x), \qquad (w_k)_t(x,0) = \tilde{\psi}_k^0(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{8}$$

и финальных условий:

$$w_k(x,T) = \tilde{\varphi}_k^1(x), \qquad (w_k)_t(x,T) = \tilde{\psi}_k^1(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{9}$$

Уравнение (7) является уравнением гиперболического типа второго порядка и имеет два семейства характеристик $x + \lambda_k t = C_1$ и $x - \lambda_k t = C_2$ [14].

Характеристики $x - \lambda_k t = l - \lambda_k T$ и $x + \lambda_k t = \lambda_k T$ разбивают прямоугольник Q на четыре области:

$$\Delta_k^1 = \Big\{ l - \lambda_k(T-t) \le x \le \lambda_k(T-t),\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T - \frac{l}{2\lambda_k} \Big\},$$

$$\Delta_k^2 = \Big\{ T + \frac{x-l}{\lambda_k} \le t \le T - \frac{x}{\lambda_k},\ 0 \le x \le l/2 \Big\},$$

$$\Delta_k^3 = \Big\{ \lambda_k(T-t) \le x \le l - \lambda_k(T-t),\ T - \frac{l}{2\lambda_k} \le t \le T \Big\},$$

$$\Delta_k^4 = \Big\{ T - \frac{x}{\lambda_k} \le t \le T + \frac{x-l}{\lambda_k},\ l/2 \le x \le l \Big\}.$$

Для построения решения задачи (7)–(9) расширим промежуток задания функций $\tilde{\varphi}_k^0(x)$, $\tilde{\psi}_k^0(x)$ до отрезка $[l - \lambda_k T, \lambda_k T]$ и положим $\Delta_k^1 = \{ l - \lambda_k(T-t) \le x \le \lambda_k(T-t), 0 \le t \le T - l/(2\lambda_k)\}$. Теперь в области Δ_k^1 функция $w_k(x,t)$, как решение задачи Коши, определена начальными условиями (8):

$$w_k(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}_k^0(x+\lambda_k t) + \tilde{\varphi}_k^0(x-\lambda_k t)}{2} - \frac{c_k t}{4\lambda_k} \int\limits_{x-\lambda_k t}^{x+\lambda_k t} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde{\varphi}_k^0(z)\,dz +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda_k} \int\limits_{x-\lambda_k t}^{x+\lambda_k t} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde{\psi}_k^0(z)\,dz, \tag{10}$$

а в области Δ_k^3 — финальными условиями (9):

$$w_k(x,t) = \frac{\tilde{\varphi}_k^1(x+\lambda_k(T-t)) + \tilde{\varphi}_k^1(x-\lambda_k(T-t))}{2} -$$

$$- \frac{c_k(T-t)}{4\lambda_k} \int\limits_{x-\lambda_k(T-t)}^{x+\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2 - \lambda_k^2 (T-t)^2\right)\right) \tilde{\varphi}_k^1(z)\,dz -$$

$$- \frac{1}{2\lambda_k} \int\limits_{x-\lambda_k(T-t)}^{x+\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((x-z)^2 - \lambda_k^2 (T-t)^2\right)\right) \tilde{\psi}_k^1(z)\,dz. \tag{11}$$

Здесь ${}_0F_1(\alpha;\sigma)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [15]. Решения построены методом Римана [14].

Поскольку точка $(l/2, T - l/(2\lambda_k))$ принадлежит одновременно Δ_k^1 и Δ_k^3, продолжения $\tilde{\varphi}_k^0(x)$, $\tilde{\psi}_k^0(x)$ необходимо выбирать таким образом, чтобы решения двух задач Коши в данной точке совпадали.

Введем константы $a_k^{00} = l - \lambda_k T$, $a_k^{10} = 0$, $a_k^{01} = \lambda_k T$, $a_k^{11} = l$ и функции

$$r_k^{ij}(x) = \frac{\tilde\varphi_k^i(2x - a_k^{ij}) + \tilde\varphi_k^i(a_k^{ij})}{2} - \frac{c_k(x - a_k^{ij})}{4\lambda_k^2} \int\limits_{a_k^{ij}}^{2x-a_k^{ij}} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - a_k^{ij})(z - 2x + a_k^{ij})\right) \tilde\varphi_k^i(z)\,dz +$$

$$+\frac{(-1)^{i+j}}{2\lambda_k} \int\limits_{a_k^{ij}}^{2x-a_k^{ij}} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - a_k^{ij})(z - 2x + a_k^{ij})\right) \tilde\psi_k^i(z)\,dz,$$

$$v_k^{ij}(x,\tau) = r_k^{ij}\left(\frac{x+\tau+l}{2}\right) + \frac{c_k(x-\tau-l)}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{x+\tau} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - x - \tau)(\tau - x + l)\right) r_k^{ij}\left(\frac{z+l}{2}\right) dz,$$

Обозначим $b_k(x,t) = {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(x - \lambda_k(T-t))(x + \lambda_k(T-t) - l)\right)$.

В областях Δ_k^2 и Δ_k^4 получаем две задачи с данными на характеристиках, решения которых имеют следующий вид:

$$w_k(x,t) = v_k^{00}(x, -\lambda_k(T-t)) + v_k^{10}(x, \lambda_k(T-t) - l) - b_k r_k^{00}(l/2) \qquad \text{для} \quad \Delta_k^2 \tag{12}$$

и

$$w_k(x,t) = v_k^{01}(x, \lambda_k(T-t) - l) + v_k^{11}(x, -\lambda_k(T-t)) - b_k r_k^{11}(l/2) \qquad \text{для} \quad \Delta_k^4. \tag{13}$$

Тогда управляющие функции $\tilde\mu_k(t) = w_k(0,t)$ и $\tilde\nu_k(t) = w_k(l,t)$ определяются из (10), (11)

$$\tilde\mu_k(t) = \frac{\tilde\varphi_k^0(\lambda_k t) + \tilde\varphi_k^0(-\lambda_k t)}{2} - \frac{c_k t}{4\lambda_k} \int\limits_{-\lambda_k t}^{\lambda_k t} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left(z^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde\varphi_k^0(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{2\lambda_k} \int\limits_{-\lambda_k t}^{\lambda_k t} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left(z^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde\psi_k^0(z)\,dz, \tag{14}$$

$$\tilde\nu_k(t) = \frac{\tilde\varphi_k^0(l + \lambda_k t) + \tilde\varphi_k^0(l - \lambda_k t)}{2} - \frac{c_k t}{4\lambda_k} \int\limits_{l-\lambda_k t}^{l+\lambda_k t} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((l-z)^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde\varphi_k^0(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{2\lambda_k} \int\limits_{l-\lambda_k t}^{l+\lambda_k t} {}_0F_1\left(1; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}\left((l-z)^2 - \lambda_k^2 t^2\right)\right) \tilde\psi_k^0(z)\,dz \tag{15}$$

при $0 \le t < T - l/\lambda_k$ и из (12), (13)

$$\tilde\mu_k(t) = r_k^{00}\left(\frac{l - \lambda_k(T-t)}{2}\right) + r_k^{10}\left(\frac{\lambda_k(T-t)}{2}\right) - b_k(0,t) r_k^{00}\left(\frac{l}{2}\right) +$$

$$+\frac{c_k(\lambda_k(T-t) - l)}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{-\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z + \lambda_k(T-t))(l - \lambda_k(T-t))\right) r_k^{00}\left(\frac{z+l}{2}\right) dz -$$

$$-\frac{c_k(\lambda_k(T-t))}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{\lambda_k(T-t)-l} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k}(z - \lambda_k(T-t) + l)(T-t)\right) r_k^{10}\left(\frac{z+l}{2}\right) dz, \tag{16}$$

$$\tilde\nu_k(t) = r_k^{01}\left(\frac{l + \lambda_k(T-t)}{2}\right) + r_k^{11}\left(\frac{2l - \lambda_k(T-t)}{2}\right) - b_k(l,t) r_k^{11}\left(\frac{l}{2}\right) -$$

$$-\frac{c_k(\lambda_k(T-t) - l)}{4\lambda_k^2} \int\limits_0^{\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(2; \frac{c_k}{4\lambda_k^2}(z - \lambda_k(T-t))(\lambda_k(T-t) - l)\right) r_k^{01}\left(\frac{z+l}{2}\right) dz -$$

$$-\frac{c_k(\lambda_k(T-t))}{4\lambda_k^2}\int\limits_0^{l-\lambda_k(T-t)} {}_0F_1\left(2;\frac{c_k}{4\lambda_k}(z+\lambda_k(T-t)-l)(t-T)\right) r_k^{11}\left(\frac{z+l}{2}\right)dz \tag{17}$$

при $T-l/\lambda_k\le t\le T$.

Пусть матрица перехода $S=(s_{ij})_{i,j=1}^n$. Тогда

$$u_k(x,t)=(s_{k1}\dots s_{kn})(w_1(x,t)\dots w_n(x,t))^T,$$
$$\mu_k(t)=(s_{k1}\dots s_{kn})(\tilde\mu_1(t)\dots\tilde\mu_n(t))^T,\qquad \nu_k(t)=(s_{k1}\dots s_{kn})(\tilde\nu_1(t)\dots\tilde\nu_n(t))^T. \tag{18}$$

Формулы (14)–(18) позволяют определить все компоненты искомых вектор-функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$.

В рассмотренном случае $T>l/\lambda_n$ задача (1)–(3) не имеет единственного решения, т. е. функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ определяются неоднозначно и зависят от выбора продолжений начальных условий (2) на отрезок $[l-\lambda_kT,\lambda_kT]$.

Для значений $n=1$, $\lambda_1=1$, $T=l$ полученное решение согласуется с результатами В. А. Ильина и Е. И. Моисеева.

Библиографический список

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М. : Наука, 1965. 476 с. [*Butkovskiy A. G.* Distributed Control Systems. New York : American Elsevier Pub. Co., 1969. 446 p.]

2. *Lions J.-L.* Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équalions aux dérivées partielles. Paris : Dunod Gauthier-Villars, 1968. 426 p.

3. *Агошков В. И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М. : Ин-т выч. мат. РАН, 2003. 256 с. [*Agoshkov V. I.* Optimal control methods and the method of adjoint equations in problems of mathematical physics. Moscow : Inst. Vych. Mat. RAN, 2003. 256 p.]

4. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528. [*Il'in V. A.* Two-endpoint boundary control of vibrations described by a finite-energy generalized solution of the wave equation // Differ. Equ. 2000. Vol. 36, № 11. P. 1659–1675.]

5. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний струны на двух концах при условии существования конечной энергии // Докл. АН. 2001. Т. 376, № 3. С. 295–299. [*Il'in V. A.* Boundary control of the string oscillation process at two ends under conditions of the existence of a finite energy // Dokl. Math. 2001. Vol. 63, № 1. P. 38–41.]

6. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1699–1711. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Optimization of the boundary control of string vibrations by an elastic force on an arbitrary sufficiently large time interval // Differ. Equ. 2006. Vol. 42, № 12. P. 1775–1786.]

7. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Оптимизация граничных управлений смещением на двух концах струны за произвольный достаточно большой промежуток времени // Докл. АН. 2007. Т. 417, № 2. С. 160–166. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Optimization of boundary controls by displacements at two ends of a string during an arbitrary sufficiently large time interval // Dokl. Math. 2007. Vol. 76, № 3. P. 828–834.]

8. *Боровских А. В.* Формулы граничного управления неоднородной струной. I // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 1. С. 64–89. [*Borovskikh A. V.* Formulas of boundary control of an inhomogeneous string. I // Differ. Equ. 2007. Vol. 43, № 1. P. 69–95.]

9. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление радиально-симметричными колебаниями круглой мембраны // Докл. АН 2003. Т. 393, № 6. С. 730–734. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* A boundary control of radially symmetric oscillations of a round membrane // Dokl. Math. 2003. Vol. 68, № 3. P. 421–425.]

10. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* A boundary control at two ends by a process described by the telegraph equation // Dokl. Math. 2004. Vol. 69, № 1. P. 33–37.]

11. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления для системы волновых уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. № 1(16) С. 5–10. [*Andreev A. A., Leksina S. V.* The boundary control problem for the system of wave equations // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki. 2008. № 1(16). P. 5–10.]

12. *Андреев А. А., Лексина С. В.* Задача граничного управления в условиях первой краевой задачи для системы гиперболического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения 2011. Т. 47, № 6. С. 843–849. [*Andreev A. A., Leksina S. V.* Boundary control problem for the first boundary value problem for a second-order system of hyperbolic type // Differ. Equ. 2011. Vol. 47, № 6. P. 848–854.]

13. *Lancaster P.* Theory of matrices. New York : Acad. Press, 1969. 316 p.

14. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some Classes of Partial Differential Equations. New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1988.]

15. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. *H. Bateman*. New York; Toronto; London : McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 p.

УДК 517.518.82

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНА

И. А. Козлова

Калужский государственный университет им. К.Э.Циолковского
E-mail: irena1983.83@mail.ru

В настоящей работе рассматривается функция Больцано $f(x)$, которая является непрерывной и недифференцируемой. Данная функция определяется как предел последовательности ломаных и для ее построения используются вспомогательные функции, представляющие собой ломаные. В работе получена оценка модуля непрерывности функции Больцано. Из полученной оценки следует, что данная функция принадлежит классу Липшица порядка $1/2$ с константой $M = 6$, т. е. $f(x) \in 6 \operatorname{Lip} 1/2$. Для функции Больцано при $a = 1$ и $h = 1$ построена последовательность многочленов Бернштейна и получена оценка погрешности приближения функции Больцано многочленами Бернштейна.

Ключевые слова: функция Больцано, модуль непрерывности, многочлены Бернштейна, оценка погрешности приближения.

Approximation of Boltsano Function by Means of Bernstein Polynomials

I. A. Kozlova

In given work is considered Boltsano function $f(x)$, which can be represented in rows. Boltsano function is continuous and not differentiable. It is received the estimation of the module of continuity of Boltsano function. From the estimation of the module of continuity follows that function $f(x)$ belongs to the Lipschitz class $\operatorname{Lip} 1/2$ with the constant 6, i. e. $f(x) \in 6 \operatorname{Lip} 1/2$. For the Boltsano function for $a = 1$ and $h = 1$ it is presented the sequence of Bernstein polynomials and it is proved the estimation of the error of approximation for Boltsano function by means of Bernstein polynomials.

Key words: Boltsano function, module of continuity, Bernstein polynomials, estimation the error of approximation.

1. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

Функция Больцано $f(x)$ строится следующим образом [1]. Определяются вспомогательные функции $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Графиком функции $f_0(x)$ является отрезок OA_4, где $O(0;0)$, $A_4(a;h)$. Заменим отрезок OA_4 ломаной $OA_1A_2A_3A_4$ так, что точки A_1, A_2, A_3 имеют координаты

$$A_1\,(a/4, -h/2)\,, \quad A_2\,(a/2, 0)\,, \quad A_3\,(3a/4, h/2)\,.$$

Функцию, имеющую график $OA_1A_2A_3A_4$, обозначим через $f_1(x)$. По функции $f_1(x)$ строим функцию $f_2(x)$, аналогично заменив каждый из отрезков OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 соответствующими ломаными (рис. 1).

Повторим эту операцию n раз, придем к функции $f_n(x)$. Определим функцию Больцано $f(x)$ вначале в точках вида

$$x = ka/4^n, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 4^n, \tag{1}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, k — целое, полагая $f(x) = f_n(x)$. Нам остается еще определить $f(x)$ для значений x, отличных от точек вида (1). Это можно сделать, полагая $f(x) = \lim\limits_{t \to x} f(t)$, где t — точки вида (1).

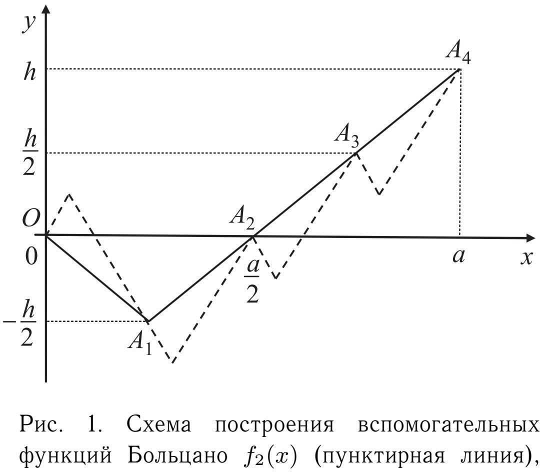

Рис. 1. Схема построения вспомогательных функций Больцано $f_2(x)$ (пунктирная линия), $f_0(x)$ (отрезок OA_4) и $f_1(x)$ (ломаная OA_1A_4)

Теперь $f(x)$ определена во всем отрезке $[0, a]$ и является непрерывной функцией в этом промежутке.

В дальнейшем будем рассматривать функцию Больцано при $h = 1$ и $a = 1$.

От геометрического способа задания функции Больцано перейдем к аналитическому. Для этого используем разложение аргумента x в 4-ичную дробь: $b/c = (0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots)_4$. Разряды этой дроби