14. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some Classes of Partial Differential Equations. New York : Gordon and Breach Science Publishers, 1988.]

15. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. *H. Bateman*. New York; Toronto; London : McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 p.

УДК 517.518.82

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО МНОГОЧЛЕНАМИ БЕРНШТЕЙНА

И. А. Козлова

Калужский государственный университет им. К.Э.Циолковского
E-mail: irena1983.83@mail.ru

В настоящей работе рассматривается функция Больцано $f(x)$, которая является непрерывной и недифференцируемой. Данная функция определяется как предел последовательности ломаных и для ее построения используются вспомогательные функции, представляющие собой ломаные. В работе получена оценка модуля непрерывности функции Больцано. Из полученной оценки следует, что данная функция принадлежит классу Липшица порядка $1/2$ с константой $M = 6$, т. е. $f(x) \in 6 \operatorname{Lip} 1/2$. Для функции Больцано при $a = 1$ и $h = 1$ построена последовательность многочленов Бернштейна и получена оценка погрешности приближения функции Больцано многочленами Бернштейна.

Ключевые слова: функция Больцано, модуль непрерывности, многочлены Бернштейна, оценка погрешности приближения.

Approximation of Boltsano Function by Means of Bernstein Polynomials

I. A. Kozlova

In given work is considered Boltsano function $f(x)$, which can be represented in rows. Boltsano function is continuous and not differentiable. It is received the estimation of the module of continuity of Boltsano function. From the estimation of the module of continuity follows that function $f(x)$ belongs to the Lipschitz class $\operatorname{Lip} 1/2$ with the constant 6, i. e. $f(x) \in 6 \operatorname{Lip} 1/2$. For the Boltsano function for $a = 1$ and $h = 1$ it is presented the sequence of Bernstein polynomials and it is proved the estimation of the error of approximation for Boltsano function by means of Bernstein polynomials.

Key words: Boltsano function, module of continuity, Bernstein polynomials, estimation the error of approximation.

1. МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

Функция Больцано $f(x)$ строится следующим образом [1]. Определяются вспомогательные функции $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Графиком функции $f_0(x)$ является отрезок OA_4, где $O(0;0)$, $A_4(a;h)$. Заменим отрезок OA_4 ломаной $OA_1A_2A_3A_4$ так, что точки A_1, A_2, A_3 имеют координаты

$$A_1\,(a/4, -h/2)\,, \quad A_2\,(a/2, 0)\,, \quad A_3\,(3a/4, h/2)\,.$$

Функцию, имеющую график $OA_1A_2A_3A_4$, обозначим через $f_1(x)$. По функции $f_1(x)$ строим функцию $f_2(x)$, аналогично заменив каждый из отрезков OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 соответствующими ломаными (рис. 1).

Повторим эту операцию n раз, придем к функции $f_n(x)$. Определим функцию Больцано $f(x)$ вначале в точках вида

$$x = ka/4^n, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 4^n, \tag{1}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, k — целое, полагая $f(x) = f_n(x)$. Нам остается еще определить $f(x)$ для значений x, отличных от точек вида (1). Это можно сделать, полагая $f(x) = \lim\limits_{t \to x} f(t)$, где t — точки вида (1).

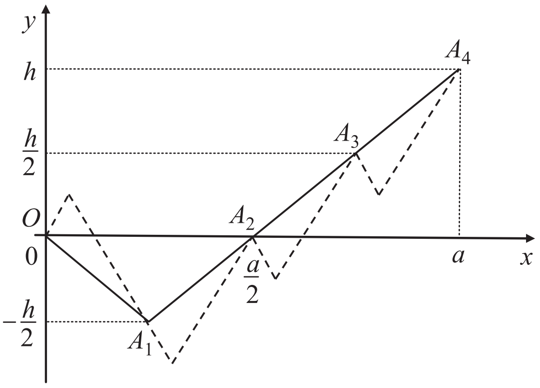

Рис. 1. Схема построения вспомогательных функций Больцано $f_2(x)$ (пунктирная линия), $f_0(x)$ (отрезок OA_4) и $f_1(x)$ (ломаная OA_1A_4)

Теперь $f(x)$ определена во всем отрезке $[0, a]$ и является непрерывной функцией в этом промежутке.

В дальнейшем будем рассматривать функцию Больцано при $h = 1$ и $a = 1$.

От геометрического способа задания функции Больцано перейдем к аналитическому. Для этого используем разложение аргумента x в 4-ичную дробь: $b/c = (0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots)_4$. Разряды этой дроби находятся по известному алгоритму теории чисел:

$$a_n = \left[\frac{4^n \cdot b}{c}\right] - 4 \cdot \left[\frac{4^{n-1} \cdot b}{c}\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x. Для $x = (0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots)_4$ находим значение функции $f(x)$ по формуле

$$f(x) = \frac{a_1'}{2} + \frac{a_2'}{2^2} + \ldots + \frac{a_n'}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{2^n},$$

где

$$a_n' = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n - \text{четное}, \\ (-1)^{k_n}(a_k - 2), & \text{если } a_n - \text{нечетное}, \end{cases}$$

k_n — число нулей среди предыдущих разрядов $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$.

Теорема 1. *Модуль непрерывности функции Больцано удовлетворяет неравенству:*

$$\frac{3}{2}\sqrt{\delta} \leqslant \omega(f;\delta) \leqslant 6\sqrt{\delta}.$$

Доказательство. Из аналитического способа задания функции Больцано находим, что

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f((0,111\ldots1\ldots)_4) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2^n} - \ldots = -1,$$

$f(x) = -1$ — является абсолютным минимумом функции Больцано,

$$f\left(\frac{1}{12}\right) = f((0,011\ldots1\ldots)_4) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2},$$

$f(x) = 1/2$ — максимум функции Больцано на отрезке $[0;3/4]$. Тогда получаем, что для $\delta = 1/3 - 1/12 = 1/4$ модуль непрерывности $\omega\left(f;1/4\right) = 1/2 - (-1) = 3/2$, как наибольшее колебание функции на отрезке длины $1/4$. Аналогично, можно получить, что $f(1/48) = -1/4$ и, следовательно, $\omega\left(f;1/4^2\right) = 3/2^2$. Тогда $\omega\left(f;1/4^k\right) = 3/2^k$. Таким образом, получаем, что для $1/4^{n+1} \leqslant \delta < 1/4^n$ модуль непрерывности будет

$$\omega(f;\delta) \leqslant \omega\left(f;\frac{1}{4^n}\right) = \frac{3}{2^n} = 6\sqrt{\frac{1}{4^{n+1}}} \leqslant 6\sqrt{\delta}, \tag{2}$$

и мы получили оценку сверху модуля непрерывности функции $f(x)$. Оценка снизу модуля непрерывности для данной функции имеет следующий вид:

$$\omega(f;\delta) \geqslant \omega\left(f;\frac{1}{4^{n+1}}\right) = \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{4^n}} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{\delta}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что модуль непрерывности функции Больцано находится в следующих пределах:

$$\frac{3}{2}\sqrt{\delta} \leqslant \omega(f;\delta) \leqslant 6\sqrt{\delta}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Функция Больцано $f(x)$ принадлежит классу Липшица порядка $1/2$ с константой $M = 6$, т. е. $f(x) \in 6\,\mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$.*

По результатам оценки модуля непрерывности с помощью теоремы Джексона может быть определен порядок наилучшего равномерного приближения функции Больцано алгебраическими полиномами.

Теорема Джексона. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ многочленами степени не выше n удовлетворяет неравенству* [2]:

$$E_n(x) \leqslant 2\omega\left(f,\frac{b-a}{n+1}\right).$$

Если функция $f(x) \in M \operatorname{Lip} \alpha$ на отрезке $[0;1]$, то из теоремы Джексона следует:

$$E_n(x) \leqslant \frac{2M}{(n+1)^\alpha}.$$

Следствие 2. *Наилучшее равномерное приближение функции Больцано многочленами степени не выше n удовлетворяет неравенству*

$$E_n(x) \leqslant \frac{12}{\sqrt{n+1}}.$$

2. МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

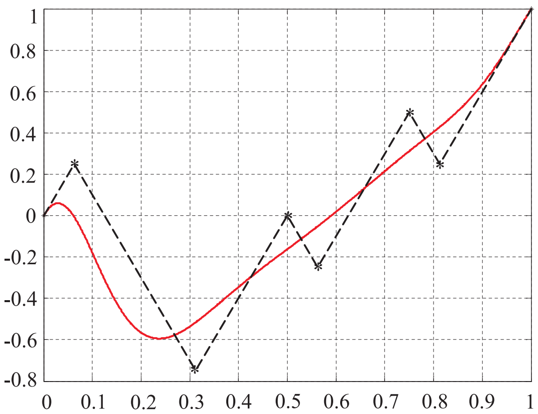

Рис. 2. Функция Больцано $f_2(x)$ (пунктирная линия), многочлен Бернштейна $B_{16}(f;x)$

Для функции Больцано $f(x)$ (рис. 2) при $a=1$ и $h=1$ строятся многочлены Бернштейна

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\,(k/n)\, C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В результате получается следующая последовательность многочленов Бернштейна:

$$B_2(f;x) = x^2,$$
$$B_3(f;x) = -2x^3 + 6x^2 - 3x,$$
$$B_4(f;x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 2x,$$
$$B_5(f;x) = \frac{4x^5}{3} - \frac{22x^4}{3} + \frac{32x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} - x,$$
$$B_6(f;x) = 60x^5 - 14x^6 - 90x^4 + 60x^3 - 15x^2,$$
$$B_7(f;x) = \frac{44x^7}{9} - \frac{56x^6}{3} + \frac{124x^5}{3} - \frac{170x^4}{3} + \frac{130x^3}{3} - 14x^2 + \frac{7x}{9},$$
$$B_8(f;x) = 25x^8 - 80x^7 + 84x^6 - 70x^4 + 56x^3 - 14x^2,$$
$$B_9(f;x) = 320x^8 - 44x^9 - 848x^7 + 1120x^6 - 784x^5 + 252x^4 - 16x^2 + x,$$
$$B_{10}(f;x) = \frac{2272x^9}{3} - \frac{476x^{10}}{3} - 1434x^8 + 1368x^7 - 700x^6 + 252x^5 - 168x^4 + 120x^3 - 39x^2 + \frac{10x}{3}, \ldots$$

Теорема 2. *Если $f(x) \in M \operatorname{Lip} \frac{1}{2}$ на отрезке $[0;1]$, то*

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

Доказательство. Используем тождества

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, f(x) \not\equiv 1,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n},$$
$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Если $f(x) \in M \operatorname{Lip} \frac{1}{2}$ на отрезке $[0;1]$, то

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\left|\frac{k}{n} - x\right|} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

В силу неравенства Коши $\sum\limits_{k=0}^{n}|a_k b_k| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k^2}$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}.$$

Применяя второй раз неравенство Коши, получим:

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant M\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/4}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/4} =$$
$$= M\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/4} = M\left(\frac{x(1-x)}{n}\right)^{1/4} \leqslant M\left(\frac{1}{4n}\right)^{1/4} = \frac{M}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Для функции Больцано при всех $x \in [0;1]$ имеет место неравенство*

$$|B_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{6}{\sqrt{2}n^{1/4}}.$$

Библиографический список

1. *Бржечка Б. Ф.* О функции Больцано // УМН. 1949. Т. 4, № 2. С. 15–20. [*Brzhechka B. F.* About the function of Bolzano // Russ. Math. Surv. 1949. Vol. 4, № 2. P. 329–346.]

2. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций, книга 1. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 231 с. [*Privalov A. A.* Theory interpolate functions, book 1. Saratov : Izd-vo Saratov. un-ta, 1990. 231 p.]

УДК 517.984

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМ ЯДРОМ

В. В. Корнев

Саратовский государственный университет
E-mail: KornevVV@info.sgu.ru

Для интегральных операторов со скачком ядра на диагонали найдены необходимые и достаточные условия их обратимости. Установлено условие, обеспечивающее равносходимость рядов Фурье по собственным функциям этих операторов и тригонометрических рядов Фурье.

Ключевые слова: интегральный оператор, собственные функции, ряды Фурье, равносходимость.

On Convergence of Expansions in Eigen Functions of Integral Operators with Discontinuous Kernel

V. V. Kornev

For integral operators with a jump of its kernel on the diagonal it will be found necessary and sufficient conditions of invertibility. Conditions providing equiconvergence of expansions in eigen functions of these operators and trigonometric Fourier series are established.

Key words: integral operator, eigen functions, Fourier series, equiconvergence.

Рассмотрим в пространстве $L[0,1]$ интегральный оператор:

$$Af = \int\limits_0^{1-x} A_1(1-x,t)f(t)\,dt + \int\limits_{1-x}^{1} A_2(1-x,t)f(t)\,dt, \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

где функции $A_1(x,t)$ и $A_2(x,t)$ непрерывны вместе с частными производными до 2-го порядка включительно в треугольниках $x \ge t$ и $x \le t$ соответственно, причем выполняется тождество

$$A_1(x,x) - A_2(x,x) \equiv 1.$$