блема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. 1988. Т. 43, вып. 4 (262). С. 203–204.
5. *Гриценко С.А.* Три аддитивные задачи // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, № 6. С. 1198–1216.
6. *Balog A., Friedlander K.J.* A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski–Shapiro // Pacific. J. Math. 1992. V. 156. P. 45–62.
7. *Tolev D.I.* On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set // Acta Arithmetica. 1997. V. 81, № 1. P. 57–68.
8. *Зинченко Н.А.* Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида // Чебышевский сборник. 2005. Т. VI, вып. 2(14). С. 145–162.
9. *Хооли К.* Применения методов решета в теории чисел. М.: Наука, 1987.
10. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971.
11. *Линник Ю.В.* Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.

УДК 511.3

О РЯДАХ ДИРИХЛЕ С КОНЕЧНОЗНАЧНЫМИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ РИМАНОВСКОГО ТИПА

В.В. Кривобок

Саратовский государственный университет,
кафедра компьютерной алгебры и теории чисел
E-mail: KrivobokVV@info.sgu.ru

В данной работе доказывается утверждение о том, что в классе рядов Дирихле, абсолютно сходящихся в полуплоскости $\sigma > 1$, имеющих конечнозначные мультипликативные коэффициенты, только L-функции Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению римановского типа.

About Dirichle's Rows whith Finite-Valued Multiplicative Coefficients, Satisfy the Riman's Type Functional Equation

V.V. Krivobok

In this paper the class of absolutely convergent on the half-plane $\sigma > 1$ Dirichlet series with multiplicative finite-valued coefficients is considered. We prove that only Dirichlet L-functions are solutions of a functional Riemann type equation.

Известная теорема Гамбургера [1] говорит о том, что ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящийся в полуплоскости $\sigma > 1$ и удовлетворяющий функциональному уравнению Римана

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) f(1-s),$$

с точностью до константы является ζ-функцией Римана.

Известно также [2], что функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) f(1-s), \tag{2}$$

где k — натуральное, кроме L-функций Дирихле удовлетворяют и другие функции, определяемые рядами Дирихле (1), и даже рядами Дирихле (1) с периодическими коэффициентами.

В данной работе будет показано, что в классе рядов Дирихле вида (1) с конечнозначными мультипликативными коэффициентами только L-функции Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению вида (2).

1. О РЯДАХ ДИРИХЛЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПОРЯДКОМ РОСТА МОДУЛЯ В ЛЕВОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В работе [3] было получено условие, при котором ряд Дирихле (1) определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости растет следующим образом:

$$|f(s)| < Ce^{|s|\ln|s| + A|s|}, \tag{3}$$

где A — некоторая положительная константа.

Это условие получено в терминах граничного поведения соответствующего степенного ряда

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \tag{4}$$

т.е. степенного ряда с теми же коэффициентами, что и ряд Дирихле (1). А именно в [3] доказана

Теорема 1. *Ряд Дирихле вида (1) тогда и только тогда определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости удовлетворяет условию (3), когда соответствующий степенной ряд $g(z)$ определяет функцию, регулярную в точке $z = 1$.*

В силу известной теоремы Сёге (см.[4]), которая утверждает, что в случае конечнозначных коэффициентов, условие регулярности ряда $g(z)$ (4) в точке $z = 1$ эквивалентно периодичности, начиная с некоторого номера, коэффициентов этого ряда.

Из теоремы 1 следует следующее утверждение.

Теорема 2. *Ряд Дирихле вида (1) с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяет целую функцию, модуль которой в левой полуплоскости удовлетворяет условию (3), когда коэффициенты этого ряда периодичны, начиная с некоторого номера.*

2. ОБ ЭЙЛЕРОВСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ РИМАНОВСКОГО ТИПА

Рассмотрим ряд Дирихле, определенный произведением Эйлера:

$$f(s) = \prod_p \left(1 - \frac{h(p)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{5}$$

где $h(n)$ — мультипликативная конечнозначная функция натурального переменного.

Для рядов Дирихле вида (5) докажем следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть ряд Дирихле вида (5) удовлетворяет функциональному уравнению вида (2) и определяет целую функцию. Тогда $h(n)$ — периодическая функция.*

Замечание. Легко показать, что если ряд Дирихле (5) определяет функцию $f(s)$, удовлетворяющую функциональному уравнению (2), и коэффициенты этого ряда удовлетворяют условию $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} h(n) = O(1)$, то функция $f(s)$ является целой.

Доказательству теоремы 3 предпошлем доказательство двух лемм.

Лемма 1. *Пусть ряд Дирихле вида (5) удовлетворяет функциональному уравнению (2) и определяет целую функцию. Тогда в левой полуплоскости имеет место неравенство (3).*

Доказательство. В силу функционального уравнения (2) для $\sigma < 0$ имеет место равенство:

$$f(s) = \frac{\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right) f(1-s)}{\left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Осталось воспользоваться известной оценкой для Γ-функции (формула Стирлинга) [5].

В каждой области $|\arg s| \leqslant \pi - \delta$, $\delta > 0$, из которой исключены точки $s = 0$ и полюсы $\Gamma(s)$ с некоторыми окрестностями равномерно имеет место оценка: $|\Gamma(s)| \leqslant ce^{|s|\ln|s| + B|s|}, \quad B > 0$.

Лемма 2. *Пусть $h(n)$ — мультипликативная функция натурального аргумента, периодическая, начиная с некоторого номера n_0. Тогда $h(n)$ — периодическая функция.*

Доказательство. Пусть d_0 — период функции $h(n)$ при $n \geqslant n_0$. Допустим, что $h(n_1 + d_0) \neq \neq h(n_1)$, где $n_1 < n_0$. Пусть k — такое натуральное, что $kn_1 \geqslant n_0$. Тогда, с одной стороны, $h(kn_1 + kd_0) = h(kn_1) = h(k)h(n_1)$. С другой стороны, $h(kn_1 + kd_0) = h(k)h(n_1 + d_0)$. Отсюда следует, что если $h(k) \neq 0$, то $h(n_1) = h(n_1 + d_0)$, что противоречит нашему предположению.

Доказательство теоремы 3. В силу леммы 1 и теоремы 2 функция $h(n)$ должна быть периодической функцией, начиная с некоторого номера. Но в силу леммы 2 функция $h(n)$ должна быть периодической функцией, что и доказывает утверждение теоремы 3.

Библиографический список

1. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975. 272 с.
2. *Воронин С.И., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматгиз, 1994. 376 с.
3. *Кузнецов В.Н., Сецинская Е.В., Кривобок В.В.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 3. С. 47–58.
4. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967. 239 с.
5. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 511 с.

УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

О.А. Лукъяненко

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: olgalukyanenko@mail.ru

Пусть $\Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ есть пространства Лоренца, близкие к $L^\infty[0,1)^d$. В статье найдена функция $\tilde{\psi}$, для которой кратный ряд Фурье–Виленкина функции $f \in \Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ сходится к f по норме пространства Лоренца $\Lambda_{\tilde{\psi},p}[0,1)^d$.

Convergence of Multiple Vilenkin–Fourier Series in Lorentz Spaces

O.A. Lukyanenko

Let $\Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ be a near to $L^\infty[0,1)^d$ Lorentz space. We find the function $\tilde{\psi}$ for which the multiple Vilenkin–Fourier of any $f \in \Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ converge to f in the norm of Lorentz space $\Lambda_{\tilde{\psi},p}[0,1)^d$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] были рассмотрены пространства Лоренца $\Lambda_{\Psi,q}$ измеримых на $[0,1]$ функций f, для которых конечна норма

$$||f||_{\Psi,q} = \left(\int\limits_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \qquad (p \geq 1),$$

и были получены теоремы о сходимости рядов Фурье–Уолша в этих пространствах в зависимости от свойств последовательности $\{n_k\}$, которую пробегают индексы n в частичных суммах $S_n(f)$.

В данной работе будем рассматривать аналогичные вопросы для кратных рядов Виленкина.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ — последовательность целых чисел $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1}p_{k-1}$. Будем рассматривать функции Виленкина $V_n(t)$ [2], $n \in \mathbb{N}_0$ на отрезке $[0,1)$. Каждую точку $t \in [0,1)$ можно представить в виде $t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{m_{k+1}}$, $0 \leq t_k \leq p_k - 1$, $t_k \in \mathbb{N}_0$ (если исключить точки, для которых $t_k = p_k - 1$, при $k > k_0$, то это представление единственно).

Далее, если $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k m_k \quad (a_k = 0, 1, \ldots, p_k - 1,\ k \in \mathbb{N}_0)$ является p-ичным представлением числа $n \in \mathbb{N}_0$, функции Виленкина определяются следующим образом:

$$V_n(t) = \exp\bigl(\pi i \sum_{k=0}^{\infty} a_k t_k\bigr) \quad (t_k = 0, 1, \ldots, p_k - 1).$$

Если $\mathbf{n} = (n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(m)}) \in \mathbb{N}^m$ и $\mathbf{t} = (t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(m)}) \in [0,1)$, то кратная система Виленкина состоит из функций $V_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = V_{n^{(1)}}(t^{(1)}) V_{n^{(2)}}(t^{(2)}) \cdots V_{n^{(m)}}(t^{(m)})$.

Пусть $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k(t)$ — одномерное ядро Дирихле и $D_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \prod\limits_{i=0}^{m} D_{n^{(i)}}(t^{(i)})$ — m-мерное ядро