Доказательство. Необходимость очевидна, так как $J_r(f, x)$ состоит из с.п.ф. оператора A, которые принадлежат области значений оператора A. Достаточность следует из теоремы 4 и леммы 4.

Следствие. $\overline{\Delta}_A$ *состоит из функций, удовлетворяющих условиям а) и б) из теоремы* 5.

Библиографический список

1. *Хромов А. П.* Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142. [*Khromov A. P.* Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines // Sb. Math.. 2006. Vol. 197, № 11. P. 1669–1696.]

2. *Королева О.А., Хромов А.П.* Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 33–50. [*Koroleva O. A., Khromov A. P.* Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines (in Russian) // Izv. Saratov. Univer. New Series. 2012. Vol. 12. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics, iss. 1. P. 33–50.]

3. *Корнев В. В.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. [*Kornev V. V.* Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals // Sb. Math. 2001. Vol. 192, № 10. P. 1451—1469.]

4. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 809–814. [*Gurevich A. P., Khromov A. P.* Riesz summability of spectral expansions for a class of integral operators // Differ. Equ. 2001. Vol. 37, № 6. P. 849–855.]

УДК 517.54

ФУНКЦИЯ КЁНИГСА И ДРОБНОЕ ИТЕРИРОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ

О. С. Кудрявцева

Волжский гуманитарный институт (филиал)
Волгоградского государственного университета
E-mail: Kudryavceva@vgi.volsu.ru

Исследуется проблема дробного итерирования аналитических в единичном круге функций с вещественными тейлоровскими коэффициентами. Предполагается существование внутренней и граничной неподвижных точек. Решение приводится в терминах функции Кёнигса.

Ключевые слова: дробные итерации, однопараметрическая полугруппа, инфинитезимальная образующая, функция Кёнигса, неподвижные точки.

Koenigs Function and Fractional Iteration of Functions Analytic in the Unit Disk with Real Coefficients and Fixed Points

O. S. Kudryavtseva

The present paper deals with the problem of fractional iteration of functions analytic in the unit disk, with real Taylor's coefficients. It is assumed that there exist interior and boundary fixed points. The solution is given in terms of the Koenigs function.

Key words: fractional iterates, one-parameter semigroup, infinitesimal generator, Koenigs function, fixed points.

Пусть $\mathfrak{P}$ — совокупность всех голоморфных отображений f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя. Тогда $\mathfrak{P}$ представляет собой топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной в $\mathbb{D}$ сходимости, роль единицы в которой играет тождественное преобразование $f(z) \equiv z$. Заметим, что $\mathfrak{P}$ содержит подгруппу $\mathfrak{I}$ дробно-линейных преобразований единичного круга $\mathbb{D}$ на себя.

В силу согласованности областей определения и значений функции $f \in \mathfrak{P}$ определены её натуральные итерации: $f^0(z) \equiv z$, $f^1(z) = f(z)$ и $f^n(z) = f \circ f^{n-1}(z)$ при $n = 2, 3, \ldots$. Если же существует семейство $\{f^t\}_{t \geqslant 0}$ аналитических в $\mathbb{D}$ функций, удовлетворяющих условиям:

1) $f^0(z) \equiv z$, $f^1(z) = f(z)$,

2) $f^{t+s}(z) = f^t \circ f^s(z)$ при $s, t \geqslant 0$,

3) $f^t(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ при $t \to 0$,

то говорят, что определены дробные итерации функции f. Отображение $t \mapsto f^t$ является непрерывным гомоморфизмом, действующим из аддитивной полугруппы $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$ в полугруппу $\mathfrak{P}$, и называется однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$.

Всякая однопараметрическая полугруппа $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}$ дифференцируема по t (см. [1]) и характеризуется своей инфинитезимальной образующей:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\bigg|_{t=0} = v(z)$$

посредством дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = v(f^t(z)) \tag{1}$$

с начальным условием $f^t(z)|_{t=0} = z$.

Функции $f^t, t \geqslant 0$, имеют общее множество неподвижных точек (см., напр., [2]), среди которых выделяется так называемая точка Данжуа–Вольфа, в терминах которой формулируется общий вид инфинитезимальных образующих однопараметрических полугрупп в $\mathfrak{P}$, известный как формула Берксона–Порты (см. [1]).

Вопрос существования дробных итераций и их описания составляет задачу дробного итерирования. Существуют различные постановки этой задачи, но при этом часто требуется, чтобы все итерации наследовали те же свойства, что и исходная функция. Отметим, что общая задача дробного итерирования имеет длительную и богатую историю. Изначально она рассматривалась для функций, которые аналитичны либо в окрестности неподвижной точки [3, 4], либо во всей комплексной плоскости, исключая счётное множество точек [5, 6]. Случай итерирования функций, аналитических в некоторой области, получил развитие позже и он существенно отличается от предыдущих двух (см. [7, 8]).

Пусть функция $f \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{I}$, $f(0) = 0$ и $f'(0) \neq 0$. Если последовательность натуральных итераций такой функции определённым образом поднормировать, то известно (см., напр., [9, гл. VI, § 44]), что существует предел

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n(z)}{(f'(0))^n}\,,$$

который представляет собой непостоянную аналитическую в единичном круге $\mathbb{D}$ функцию. Этот предел называется функцией Кёнигса. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(z)}{(f'(0))^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^n\left(f(z)\right)}{f'(0)\,\left(f'(0)\right)^n} = \frac{1}{f'(0)}\,F(f(z)),$$

то функция Кёнигса есть решение функционального уравнения Шрёдера:

$$F(f(z)) = f'(0)F(z)$$

и, кроме того, является единственным решением этого уравнения в классе аналитических в $\mathbb{D}$ функций с нормировкой $F(0) = 0, F'(0) = 1$. Очевидно, что и все натуральные итерации f^n, $n = 2, 3, \ldots$, функции f имеют ту же самую функцию Кёнигса F.

Допустим теперь, что существуют дробные итерации функции f. В силу единственности решения задачи Коши (1) функции f^t, $t > 0$, однолистны в $\mathbb{D}$ и, следовательно, $(f^t)'(0) \neq 0$ (здесь и далее запись $(f^t)'(0)$ означает производную функции $f^t(z)$ по переменной z, вычисленную в точке $z = 0$). Поэтому можно определить функцию Кёнигса F следующим образом:

$$F(z) = \lim_{t\to\infty} \frac{f^t(z)}{(f^t)'(0)},$$

и она будет общей для всех f^t, $t > 0$. Непостоянная функция F как предел последовательности однолистных функций также является однолистной и

$$F\left(f^t(z)\right) = \left(f^t\right)'(0)\,F(z), \tag{2}$$

т. е. функцию Кёнигса F можно использовать для получения итераций функции f посредством функционального уравнения Шрёдера.

В [10] получено описание класса функций Кёнигса, которые связаны с дробным итерированием функций $f \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{I}$, $f(0) = 0$. Вопрос выделения из этого класса функций Кёнигса, подкласса функций Кёнигса, которые соответствуют функциям $f \in \mathfrak{P}$, сохраняющим начало координат, имеющим вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена и дробные итерации которых удовлетворяют этим же свойствам, рассматривался в [11]. В данной работе детализируется результат из [11] в случае, когда существует дополнительная неподвижная точка (в силу принципа гиперболической метрики она может лежать только на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$), в которой дробные итерации имеют конечные угловые производные. Ключевым результатом в исследовании является аналог формулы Берксона–Порты инфинитезимальной образующей однопараметрической полугруппы голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя в случае, когда имеются две неподвижные точки (см. [10]).

Обозначим через $\mathfrak{P}_r[0;1]$ совокупность функций $f \in \mathfrak{P}$, удовлетворяющих условиям: $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и существуют угловые пределы $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = 1$, $\lim\limits_{z\to 1} f'(z) = f'(1) < \infty$.

Через $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$ будем обозначать совокупность функций $f \in \mathfrak{P}_r[0;1]$, для которых существует семейство $\{f^t\}_{t\geqslant 0} \subset \mathfrak{P}_r[0;1]$, удовлетворяющее условиям 1)–3), т. е. $\mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$ — это совокупность функций $f \in \mathfrak{P}_r[0;1]$, допускающих дробное итерирование в классе $\mathfrak{P}_r[0;1]$.

Пусть v — инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$. Получим равенство, связывающее функцию Кёнигса F однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ и её инфинитезимальную образующую v.

Дифференцируя (1) по z и полагая $z = 0$, получаем дифференциальное уравнение $\dfrac{d}{dt}(f^t)'(0) = v'(0)\,(f^t)'(0)$ с начальным условием $(f^t)'(0)\Big|_{t=0} = 1$, интегрирование которого по t приводит к равенству $(f^t)'(0) = e^{v'(0)t}$. Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде $F(f^t(z)) = e^{v'(0)t}F(z)$. Дифференцируя последнее равенство по t и полагая $t = 0$, получаем соотношение, связывающее функцию Кёнигса F и инфинитезимальную образующую v

$$F'(z)\,v(z) = v'(0)\,F(z). \tag{3}$$

В силу аналога формулы Берксона–Порты (см. [10]), а также с учётом вещественности коэффициентов функций из $\mathfrak{P}_r[0;1]$, инфинитезимальную образующую v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ можно представить в виде

$$v(z) = \frac{-\alpha z}{\dfrac{1+z}{1-z} + g(z)}\,, \tag{4}$$

где $\alpha > 0$, функция g голоморфна в единичном круге $\mathbb{D}$, имеет неотрицательную вещественную часть и производные $g^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Следующая теорема даёт интегральное представление класса функций Кёнигса, соответствующих функциям $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$.

Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, тогда её функция Кёнигса F имеет вид*

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^{2\lambda}}\,\exp\left\{(1-\lambda)\int\limits_{[-1,1]} \ln\frac{1}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x)\right\} \tag{5}$$

с некоторым $\lambda \in (0,1]$ и вероятностной мерой μ на $[-1,1]$. При этом под степенной функцией и логарифмом понимаются ветви, принимающие значения 1 и 0 соответственно при $z = 0$.

Обратно, всякая функция F вида (5) является функцией Кёнигса для функций $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{P}_r[0;1])$, определяемых из равенства $f(z) = F^{-1}(\beta F(z))$, $0 < \beta < 1$.

Доказательство. Пусть $t \mapsto f^t$ — однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ и F — её функция Кёнигса. Покажем, что функция F допускает представление (5) с некоторым $\lambda \in (0,1]$ и вероятностной мерой μ на $[-1,1]$.

Как уже отмечалось выше, инфинитезимальная образующая v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ имеет вид (4).

Рассмотрим сначала частный случай. Если предположить, что найдётся точка $z_0 \in \mathbb{D}$ такая, что $\operatorname{Re} g(z_0) = 0$, то в силу принципа открытости аналитических функций функция g тождественно равна мнимой константе. Но поскольку $g(0) \in \mathbb{R}$, то $g(z) \equiv 0$. Очевидно, что задаче Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} f^t(z) = \frac{-\alpha\, f^t(z)\,(1 - f^t(z))}{(1 + f^t(z))},$$

$$f^t(z)|_{t=0} = z$$

удовлетворяет частный интеграл $\dfrac{f^t(z)}{(1-f^t(z))^2} = e^{-\alpha t}\dfrac{z}{(1-z)^2}$, который, являясь функциональным уравнением Шрёдера, определяет функцию Кёнигса F рассматриваемой однопараметрической полугруппы: $F(z) = z/(1-z)^2$. Значит, при сделанном предположении функцией Кёнигса однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$ является известная функция Кёбе.

Пусть теперь $\operatorname{Re} g(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$, тогда функцию g можно представить в виде $g(z) = g(0)\,p(z)$, где $g(0) > 0$, $p \in C_r$. Под классом C_r понимается совокупность аналитических в $\mathbb{D}$ функций p, удовлетворяющих условиям: $\operatorname{Re} p(z) > 0$ при $z \in \mathbb{D}$, $p(0) = 1$, и производные $p^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Так как функция Кёнигса F однолистна в единичном круге $\mathbb{D}$ и $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, то функция $F(z)/z$ не обращается в нуль в $\mathbb{D}$ и можно выделить однозначную ветвь логарифма $\ln(F(z)/z)$, которая обращается в нуль при $z = 0$. Из равенств (3), (4) получаем

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z}\left(\frac{z\,v'(0)}{v(z)} - 1\right) = \frac{2z/(1-z) + g(0)\,(p(z)-1)}{z\,(1+g(0))}\,.$$

Воспользуемся теперь интегральным представлением функций $p \in C_r$:

$$p(z) = \int\limits_{[-1,1]} \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x)\,,$$

где μ — вероятностная мера на $[-1,1]$, которое следует из интегрального представления класса T_r типично вещественных в единичном круге $\mathbb{D}$ функций (см., напр., [12, гл. XI, § 9, п. 5]) и теоремы Рогозинского (см., напр., [13, ch. 2, § 2.8, theorem 2.20]), устанавливающей взаимно однозначное соответствие между функциями $\varphi \in T_r$ и $p \in C_r$. Тогда дифференциальное соотношение для функции Кёнигса можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(1+g(0))\,(1-z)} + \frac{2g(0)}{1+g(0)}\int\limits_{[-1,1]} \frac{x-z}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Интегрируя это равенство по z и учитывая выбор ветви логарифма, получаем:

$$\ln\frac{F(z)}{z} = \ln\frac{1}{(1-z)^{2/(1+g(0))}} + \frac{g(0)}{1+g(0)}\int\limits_{[-1,1]} \ln\frac{1}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Обозначая $\lambda = 1/\,(1+g(0))$, $\lambda \in (0,1)$, и потенцируя последнее равенство, приходим к формуле (5) для функции Кёнигса. Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности покажем, что при любой вероятностной мере μ на $[-1,1]$ формула (5) определяет функцию Кёнигса некоторой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{P}_r[0;1]$. Дифференцируя равенство (5), получаем:

$$z\,\frac{F'(z)}{F(z)} = 1 + 2\lambda\,\frac{z}{1-z} + 2(1-\lambda)\int\limits_{[-1,1]} \frac{(x-z)z}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Выделяя в следующих выражениях ядро Шварца и ядро функций класса C_r,

$$\frac{z}{1-z} = \frac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{2}\,, \qquad \frac{(x-z)z}{1-2xz+z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1-z^2}{1-2xz+z^2} - \frac{1}{2}\,,$$

получаем

$$z\,\frac{F'(z)}{F(z)} = \lambda\,\frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda)\int\limits_{[-1,1]} \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}\,d\mu(x).$$

Следовательно, $\operatorname{Re}\{z\,F'(z)/F(z)\} > 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Это означает (см., напр., [14, ch. 2, § 2.2, theorem 2.5]), что функция F является звёздообразной в единичном круге $\mathbb{D}$, т. е. она однолистна в $\mathbb{D}$ и отображает $\mathbb{D}$ на область, которая с каждой точкой $F(z)$, $z \in \mathbb{D}$, содержит отрезок

$\{w(t) = t\,F(z) \colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Это свойство функции F позволяет определить семейство $\{f^t\}_{t \geqslant 0}$ следующим образом:

$$f^t(z) = F^{-1}\left(e^{-t}\,F(z)\right).$$

Непосредственно из (5) следует, что $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ и производные $F^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \ldots$, поэтому $f^t \in \mathfrak{P}_r[0]$ при всех $t \geqslant 0$, т. е. функции $f^t \in \mathfrak{P}$, сохраняют начало координат и имеют вещественные коэффициенты разложения в ряд Маклорена. Кроме того, отображение $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}_r[0]$, поскольку условия 1), 3) выполнены и для любых $s, t \geqslant 0$ имеем:

$$f^{t+s}(z) = F^{-1}\left(e^{-(t+s)}F(z)\right) = F^{-1}\left(e^{-t}e^{-s}F(z)\right) = F^{-1}\left(e^{-t}F \circ F^{-1}\left(e^{-s}F(z)\right)\right) =$$
$$= F^{-1}\left(e^{-t}F\left(f^s(z)\right)\right) = f^t \circ f^s(z).$$

Покажем теперь, что отображение $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}_r[0;1]$. Инфинитезимальная образующая v однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в терминах функции F записывается в виде

$$v(z) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}\left(e^{-t}\,F(z)\right)\Big|_{t=0} = -\,\frac{F(z)}{F'(z)}\,.$$

Однако вычисления, проведённые выше, показывают, что

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \lambda\left(\frac{1+z}{1-z} + g(z)\right),$$

где $\lambda \in (0, 1]$, g — голоморфная в единичном круге $\mathbb{D}$ функция с неотрицательной вещественной частью и производными $g^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$ Следовательно, инфинитезимальная образующая v соответствует виду (4), а это означает, что $t \mapsto f^t$ является однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}_r[0;1]$, а F является её функцией Кёнигса. Теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 12-01-00434-а).

Библиографический список

1. *Berkson E., Porta H.* Semigroups of analytic functions and composition operators // Michigan Math. J. 1978. Vol. 25, № 1. P. 101–115.
2. *Contreras M. D., Díaz-Madrigal S., Pommerenke Ch.* Fixed points and boundary behaviour of the Koenigs function // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2004. Vol. 29, № 2. P. 471–488.
3. *Schröeder E.* Über itierte Funktionen // Math. Ann. J. 1871. Vol. 3. P. 296–322.
4. *Königs G.* Recherches sur les intégrales des certaines equations fonctionelles // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1884. Vol. 1(3). P. 3–41.
5. *Baker I. N.* Fractional iteration near a fixpoint of multiplier 1 // J. Australian Math. Soc. 1964. Vol. 4, № 2. P. 143–148.
6. *Karlin S., McGregor J.* Embedding iterates of analytic functions with two fixed points into continuous groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 132, № 1. P. 137–145.
7. *Cowen C. C.* Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 265, № 1. P. 69–95.
8. *Горяйнов В. В.* Дробные итерации аналитических в единичном круге функций с заданными неподвижными точками // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 9. С. 1281–1299. [*Goryainov V. V.* Fractional iterates of functions analytic in the unit disk, with given fixed points // Math. USSR Sb. 1993. Vol. 74, № 1. P. 29—46.]
9. *Валирон Ж.* Аналитические функции. М. : ГИТТЛ, 1957. 235 с. [*Valiron G.* Analytic Functions. Moscow : Gostekhizdat, 1957. 235 p.]
10. *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С.* Однопараметрические полугруппы аналитических функций, неподвижные точки и функция Кёнигса // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 7. С. 43–74. [*Goryainov V. V., Kudryavtseva O. S.* One-parameter semigroups of analytic functions, fixed points and the Koenigs function // Sb. Math. 2011. Vol. 202, № 7. P. 971—1000.]
11. *Кудрявцева О. С.* Дробное итерирование аналитических в единичном круге функций с вещественными коэффициентами // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Физика. 2011. № 2(15). С. 50–62. [*Kudryavtseva O. S.* Fractional iteration of functions analytic in the unit disk, with real coefficients // Vestn. Volgograd. Gos. Un-ta. Ser. 1. Mathematics. Physics. 2011. № 2(15). P. 50–62.]
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с. [*Goluzin G. M.* Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Providence, R. I. : Amer. Math. Soc., 1969. 676 p.]
13. *Duren P. L.* Univalent functions. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo : Springer-Verlag, 1983. 383 p.
14. *Pommerenke Ch.* Univalent functions. Göttingen : Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. 376 p.