Итак, все утверждения данной теоремы установлены.

Замечание. Необходимые условия $\Phi(M(x))=1$ либо $|\Phi(M(x))|=1$ существования решения системы (1) возникают при применении соответствующей однородной функции Φ к тождеству $f'(x) \equiv \equiv \Phi(f'(x))M(x)$.

Библиографический список

1. *Журавлев И.В.* О восстановлении отображения по нормированной матрице Якоби // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 5. С. 53–61.
2. *Журавлев И.В.* К задаче восстановления отображения по нормированной матрице // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 77–87.
3. *Егоров В.В.* О системах дифференциальных уравнений, возникающих в теории квазиконформных отображений. Волгоград, 1997. Деп. в ВИНИТИ № 2777–В97. 16 с.
4. *Егоров В.В.* Об интегрируемости одной системы дифференциальных уравнений с частными производными, возникающей в теории квазиконформных отображений. Волгоград, 1998. Деп. в ВИНИТИ № 1816–В98. 15 с.
5. *Егоров В.В.* О системе дифференциальных уравнений, описывающей отображения с ограниченным искажением // Вестн. ВолГУ. Сер. 1 (Математика). Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2004. Вып.8.
6. *Шушков Д.В.* Восстановление отображения по характеристике $f'(x)\,/\,||f'(x)||$ // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та мат., 2003.
7. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986. 368 с.
8. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
9. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
10. *Буренков В.И.* Интегральные представления Соболева и формула Тейлора // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 33–38.
11. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
12. *Гольдштейн В.М., Кузьминов В.И., Шведов И.А.* Дифференциальные формы на липшецевом многообразии // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 16–30.
13. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

УДК 517.984

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

В.П. Курдюмов, А.П. Хромов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Для дифференциально-разностного оператора переменной структуры с интегральными краевыми условиями доказана базисность Рисса его собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2^3[0,1]$.

On Riesz Basises of the Eigen and Associated Functions of the Functional-Differential Operator with a Variable Structure

V.P. Kurdyumov, A.P. Khromov

For a functional-differential operator of a variable structure with integral boundary conditions the Riesz basisness of its eigen and associated functions in the space $L_2^3[0,1]$ is proved.

Рассмотрим функционально-дифференциальный оператор

$$Ly = l[y] = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \\ y_3'(x) + p(x)y_3(x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))^T$ (T — знак транспонирования), $x \in [0,1]$, с граничными условиями:

$$y_1(0) = y_3(1), \quad y_2(1) = y_3(0), \quad \int_0^1 y_1(t)\,d\sigma_1(t) + \int_0^1 y_2(t)\,d\sigma_2(t) + \int_0^1 y_3(t)\,d\sigma_3(t) = 0. \tag{2}$$

Предполагаем, что $\alpha_i^2 \neq \beta_i^2$, $p_{ij}(x) \in C^1[0,1]$ $(i,j = 1,2)$, $p(x) \in C^1[0,1]$, $\sigma_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ — функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1.

Настоящей работой продолжаются исследования функционально-дифференциальных операторов с операторами отражения, которые интенсивно развиваются [1]–[2]. В работе рассматривается вопрос о базисах Рисса из собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора (1)–(2). Эта задача для дифференциальных и интегро-дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями изучалась в [3]–[4].

Пусть $y = R_\lambda f$, где $R_\lambda = (L - \lambda R)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$. Тогда y удовлетворяет системе

$$\alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) = \lambda y_1(x) + f_1(x), \tag{3}$$

$$\alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) = \lambda y_2(x) + f_2(x), \tag{4}$$

$$y_3'(x) + p(x)y_3(x) = \lambda y_3(x) + f_3(x) \tag{5}$$

и условиям (2).

Введем краевую задачу

$$u' + \tilde{P}(x)u - \lambda Du = \tilde{m}(x), \tag{6}$$

$$\tilde{M}_0 u(0) + \tilde{M}_1 u(1) = 0, \tag{7}$$

$$\int_0^1 (u_1(t) + b_1 u_2(t))\, d\sigma_1(t) + \int_0^1 (u_3(t) + b_2 u_4(t))\, d\sigma_2(t) + \int_0^1 u_5(t)\, d\sigma_3(t) = 0, \tag{8}$$

где $u = (u_1, \ldots, u_5)^T$, $D = \operatorname{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_k = \operatorname{diag}(i\sqrt{d_k}, -i\sqrt{d_k})$ $(k = 1,2)$, $D_3 = (1)$, $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$ $(k = 1,2)$, $\tilde{P}(x) = \operatorname{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}P_1(x)B_1, B_2^{-1}Q_2^{-1}P_2(x)B_2, B_3^{-1}Q_3^{-1}P_3(x)B_3)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$ $(k = 1,2)$, $b_k = \beta_k^{-1}(i\sqrt{d_k} + \alpha_k)$ $(k = 1,2)$, $B_3 = (1)$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$ $(k = 1,2)$, $Q_3 = (1)$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$ $(k = 1,2)$, $P_3(x) = (p(x))$, $\tilde{m}(x) = \operatorname{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}, B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1})m(x)$, $m(x) = (m_1(x), \ldots, m_5(x))^T$, $m_1(x) = f_1(x)$, $m_2(x) = f_1(1-x)$, $m_3(x) = f_2(x)$, $m_4(x) = f_2(1-x)$, $m_5(x) = f_3(x)$, $\tilde{M}_0 = M_0 B$, $\tilde{M}_1 = M_1 B$, M_k $(k = 0,1)$ — матрица размерности 4×5 с элементами $m_{ij}^{(k)}$, $m_{11}^{(0)} = m_{34}^{(0)} = m_{44}^{(0)} = m_{22}^{(1)} = 1$, $m_{35}^{(0)} = m_{15}^{(1)} = m_{25}^{(1)} = m_{43}^{(1)} = -1$, $m_{ij}^{(k)} = 0$ при остальных i, j и $k = 0,1$, $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$.

Лемма 1. *Если $y = R_\lambda f$, $u(x,\lambda)$ — решение задачи* (6)–(8) *и $z(x) = Bu(x,\lambda)$, то $z_1(x) = y_1(x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, $z_5(x) = y_3(x)$, где $z(x) = (z_1(x), \ldots, z_5(x))^T$.*

Присутствие матрицы $\tilde{P}(x)$ в (6) является серьезным препятствием в исследовании решения задачи (6)–(8). Здесь мы приведем ее преобразование, заменяющее $\tilde{P}(x)$ на матрицу с элементами $O(\lambda^{-1})$ ([5], с.48–58).

Пусть $H_0(x) = (H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$, где $H_{01}(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02}(x) = \operatorname{diag}(h_3(x), h_4(x))$, $h_i(x) = \exp\left(-\int\limits_0^x \tilde{p}_{ii}(t)\, dt\right)$, $\tilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\tilde{P}(x)$; $H_1(x) = \operatorname{diag}(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x))$, где $H_{13}(x) = 0$, $H_{1k}(x)$ $(k = 1,2)$ — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения $H_{0k}'(x) + \tilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_k H_{1k}(x)) = 0$, $\tilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$.

Теорема 1. *При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $u = H(x,\lambda)v$, где $H(x,\lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, приводит систему* (6)–(8) *к виду*

$$v' + P_\lambda(x)v - \lambda Dv = m(x,\lambda), \tag{9}$$

$$U_1(v) = U_1(H(x,\lambda)v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} U_2(v) = U_2(H(x,\lambda)v) = \int\limits_0^1 [(h_1(t) + \lambda^{-1}b_1\tilde{r}_2(t))v_1(t) + (b_1h_2(t) + \lambda^{-1}\tilde{r}_1(t))v_2(t)]\, d\sigma_1(t) + \\ + \int\limits_0^1 [(h_3(t) + \lambda^{-1}b_2\tilde{r}_4(t))v_3(t) + (b_2h_4(t) + \lambda^{-1}\tilde{r}_3(t))v_4(t)]\, d\sigma_2(t) + \int\limits_0^1 h_5(t)v_5(t)\, d\sigma_3(t) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

где $P_\lambda(x) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)(H_1'(x) + \tilde{P}(x)H_1(x))$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)\tilde{m}(x)$, $M_{0\lambda} = \tilde{M}_0H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = \tilde{M}_1H(1,\lambda)$, $\tilde{r}_k(t)$ $(k = 1,2)$ — элементы матрицы $H_{11}(t)$, $\tilde{r}_k(t)$ $(k = 3,4)$ — элементы матрицы $H_{12}(t)$.

Лемма 2. *Если $v(x,\lambda) = (v_1(x,\lambda), \ldots, v_5(x,\lambda))^T$ является решением* (9)–(11), *то*

$$R_\lambda f = ((h_1(x) + \lambda^{-1}b_1\tilde{r}_2(x))v_1(x,\lambda) + (b_1h_2(x) + \lambda^{-1}\tilde{r}_1(x))v_2(x,\lambda),$$

$$(h_3(x)+\lambda^{-1}b_2\tilde{r}_4(x))v_3(x,\lambda)+(b_2h_4(x)+\lambda^{-1}\tilde{r}_3(x))v_4(x,\lambda),h_5(x)v_5(x,\lambda))^T.$$

Введем еще такую краевую задачу

$$w'-\mu\hat{D}w=m(x), \tag{12}$$

$$U_1(w)=M_{0\lambda}w(0)+M_{1\lambda}w(1)=0, \tag{13}$$

$$U_2(w)=\int_0^1[t_1(t,\mu)w_1(t)+t_2(t,\mu)w_2(t)]\,d\sigma_1(t)+\int_0^1[t_3(t,\mu)w_3(t)+t_4(t,\mu)w_4(t)]\,d\sigma_2(t)+ \\ +\int_0^1 t_5(t,\mu)w_5(t)\,d\sigma_3(t)=0, \tag{14}$$

где $m=(m_1,\ldots,m_5)^T$, $m_i=m_i(x)\in C[0,1]$, $\mu=i\lambda/\sqrt{d_1}$, $D=\operatorname{diag}(1,-1,d,-d,\omega)$, $d=\sqrt{d_1/d_2}$, $\omega=\sqrt{d_1}/i$, то есть $\lambda D=\mu\hat{D}$, $t_1(t,\mu)=h_1(t)+\mu^{-1}b_1r_2(t)$, $t_2(t,\mu)=b_1h_2(t)+\mu^{-1}r_1(t)$, $t_3(t,\mu)=$ $=h_3(t)+\mu^{-1}b_2r_4(t)$, $t_4(t,\mu)=b_2h_4(t)+\mu^{-1}r_3(t)$, $t_5(t,\mu)=h_5(t)$, $r_k(t)=i\tilde{r}_k(t)/d$ $(k=1,2,3,4)$. Предполагаем далее, что $d_1>0$, $d_2>0$.

Обозначим через M_μ вектор-строку $M_\mu=\Big(\int_0^1 t_1(t,\mu)e^{\mu(t-1)}\,d\sigma_1(t),\int_0^1 t_2(t,\mu)e^{-\mu t}\,d\sigma_1(t),\int_0^1 t_3(t,\mu)\times$ $\times\, e^{\mu d(t-1)}\,d\sigma_2(t),\int_0^1 t_4(t,\mu)e^{-\mu dt}\,d\sigma_2(t),\int_0^1 t_5(t,\mu)e^{\mu\omega(t-1)}\,d\sigma_3(t)\Big)$, $V(x,\mu)=\operatorname{diag}(e^{\mu(x-1)},e^{-\mu x},e^{\mu d(x-1)},$ $e^{-\mu dx},e^{\mu\omega(x-1)})$; $\Delta(\mu)=(U_1^T(V(x,\mu)),M_\mu^T)^T=(U_1^T(H(x,\lambda)V(x,\mu)),M_\mu^T)^T$; $g(x,t,\mu)=\operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu),$ $\ldots,g_5(x,t,\mu))$; $g_k(x,t,\mu)=\varepsilon(x,t)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k\le 0$; $g_k(x,t,\mu)=-\varepsilon(t,x)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k\ge 0$; $\varepsilon(x,t)=1$, если $x\ge t$, $\varepsilon(x,t)=0$, если $x<t$; $\omega_1=1$, $\omega_2=-1$, $\omega_3=d$, $\omega_4=-d$, $\omega_5=\omega$.

Лемма 3. *Если матрица $\Delta(\mu)$ обратима, то для решения $w(x)=W_\mu m(x)$ задачи* (12)–(14) *справедлива формула $W_\mu m(x)=\int_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt-V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)\Phi(m,\mu)$, где $\Phi(m,\mu)=(R_1(\mu),\ldots,$ $\ldots,R_5(\mu))^T$, $R_i(\mu)$ $(i=1,2,3,4)$ является линейной комбинацией с ограниченными по μ (при $|\mu|$ достаточно больших) коэффициентами интегралов*

$$\int_0^1 n(t)e^{-\mu t}\,dt,\quad \int_0^1 n(t)e^{-\mu dt}\,dt,\quad \int_0^1 n(t)e^{-\mu\omega t}\,dt, \tag{15}$$

а $R_5(\mu)$ — интегралов

$$\int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu t}\,dt,\quad \int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu dt}\,dt,\quad \int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu\omega t}\,dt\quad (i=1,\ldots,5), \tag{16}$$

где $n(t)$ есть одна из функций $m_i(t)$, $m_i(1-t)$ $(i=1,\ldots,5)$; $\varphi_1(t)=\int_0^{1-t} m_1(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_1(\tau)$, $\varphi_2(t)=\int_t^1 m_2(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_1(\tau)$, $\varphi_3(t)=\int_0^{1-t} m_3(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_2(\tau)$, $\varphi_4(t)=\int_t^1 m_4(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_2(\tau)$, $\varphi_5(t)=\int_0^{1-t} m_5(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_3(\tau)$, $\psi(\tau)$ совпадает с одной из функций $h_1(\tau)$, $b_1h_2(\tau)$, $h_3(\tau)$, $b_2h_4(\tau)$, $h_5(\tau)$, $r_1(\tau)$, $b_1r_2(\tau)$, $r_3(\tau)$, $b_2r_4(\tau)$.

Пусть в дальнейшем выполняется условие $b_1b_2(\alpha_1+b_1\beta_1+\beta_3)(\alpha_2+b_2\beta_2+\alpha_3b_2)(\alpha_1b_1+\beta_1+b_2\beta_3)\times$ $\times(\alpha_2b_2+\beta_2+\alpha_3)\ne 0$, где $\alpha_i=\sigma_i(+0)-\sigma_i(0)$, $\beta_i=\sigma_i(1)-\sigma_i(1-0)$ $(i=1,2,3)$. Обозначим $\varphi(\mu)=\det\Delta_1(\mu)$, где $\Delta_1(\mu)=(U_{10}^T(V(x,\mu)),M_{\mu0}^T)^T$, $U_{10}(V(x,\mu))=U_1(H_0(x)v(x,\mu))$, $M_{\mu0}$ — вектор-строка, имеющая вид $M_{\mu0}=\Big(\int_0^1 h_1(t)e^{\mu(t-1)}\,d\sigma_1(t),\int_0^1 b_1h_2(t)e^{-\mu t}\,d\sigma_1(t),\int_0^1 h_3(t)e^{\mu d(t-1)}\,d\sigma_2(t),$ $\int_0^1 b_2h_4(t)e^{-\mu dt}\,d\sigma_2(t),\int_0^1 h_5(t)e^{\mu\omega(t-1)}\,d\sigma_3(t)\Big)$.

Далее рассматриваем область $S=\{\mu|\ \operatorname{Re}\mu\ge 0,\ \operatorname{Re}\mu\omega\ge 0\}$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Через S_δ обозначим область, получающуюся из S удалением всех нулей $\varphi(\mu)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ (считаем, что эти нули не находятся в δ-окрестности границы области S).

Лемма 4. *Нули функции $\varphi(\mu)$ находятся в двух полуполосах: вдоль мнимой и вещественной осей. Причем в любом прямоугольнике $|\mathrm{Im}\,\mu - t| \le 1$ первой полуполосы и любом прямоугольнике $|\mathrm{Re}\,\mu - t| \le 1$ второй полуполосы число этих нулей ограничено при всех вещественных t. В S_δ справедлива оценка $|\varphi(\mu)| \ge C$, где $C > 0$ и не зависит от μ.*

Из леммы 4 сразу следует

Лемма 5. *Для всех достаточно больших μ в области S_δ имеет место оценка $|\det\Delta(\mu)| \ge C$, где $C > 0$ и не зависит от μ.*

Обозначим через Π полуполосу из леммы 4, расположенную вдоль мнимой оси, $\Pi(\delta) = S_\delta \cap \Pi$.

Лемма 6. *Если $\mu \in \Pi(\delta)$ и $|\mu|$ достаточно велико, то существует единственное решение задачи* (12)–(14)*, для компонент которого имеют место представления:*

$$
\begin{aligned}
(W_\mu m)_1 &= -\int_x^1 e^{\mu(x-t)} m_1(t)\,dt + W_1(m,\mu)e^{\mu(x-1)},\\
(W_\mu m)_2 &= \int_0^x e^{-\mu(x-t)} m_2(t)\,dt + W_2(m,\mu)e^{-\mu x},\\
(W_\mu m)_3 &= -\int_x^1 e^{\mu d(x-t)} m_3(t)\,dt + W_3(m,\mu)e^{\mu d(x-1)},\\
(W_\mu m)_4 &= \int_0^x e^{-\mu d(x-t)} m_4(t)\,dt + W_4(m,\mu)e^{-\mu d x},\\
(W_\mu m)_5 &= -\int_x^1 e^{\mu\omega(x-t)} m_5(t)\,dt + W_5(m,\mu)e^{\mu\omega(x-1)},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

где $W_i(m,\mu)$ $(i = 1,2,3,4)$ — линейные комбинации интегралов (15)*, а $W_5(m,\mu)$ — интегралов* (16) *с ограниченными по μ коэффициентами.*

Пусть $\varphi(t,g)$ — одна из функций леммы 3, когда $m_i(x)$ $(i = 1,\ldots,5)$ заменены на произвольную функцию $g(x) \in C[0,1]$.

Лемма 7. *Если $g(x) \in C[0,1]$, то справедлива оценка $\|\varphi(t,g)\| \le C\|g\|$, где $C > 0$ и не зависит от $g(x)$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.*

По лемме 7 $\varphi(t,g)$ как оператор по g продолжается по непрерывности на все $L_2[0,1]$. Это продолжение мы также обозначим через $\varphi(t,g)$. Тем самым мы можем рассматривать задачу (12)–(14), когда $m(x) \in L_2^5[0,1]$.

Лемма 8. *Если $\mu \in \Pi(\delta)$ и $|\mu|$ достаточно велико, то для краевой задачи* (12)–(14) *при $m(x) \in L_2^5[0,1]$ существует единственное решение $W_\mu m(x)$ и для его компонент имеют место формулы* (17)*, в которых $\varphi_i(t)$ из леммы 3 заменяются на соответствующие операторы $\varphi(t,g)$ в $L_2[0,1]$.*

Считаем, что функции $f_i(x)$ $(i = 1,2,3)$ в задаче (3)–(5) принадлежат $L_2[0,1]$. Тогда $m(x)$ из задачи (6)–(8) принадлежит $L_2^5[0,1]$.

Лемма 9. *Если μ то же, что и в лемме 8, то существует единственное решение задачи* (9)–(11)*, причем $v(x,\lambda) = W_\mu q_1(x) + \frac{1}{\lambda}W_\mu q_2(x) - \frac{1}{\lambda}W_\mu M_\lambda q_1(x) + O\left(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\right)$, где $q_1(x) = H^{-1}(x)m(x)$, $q_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)m(x)$, $M_\lambda = H_2(x)(E+M_{1\lambda})^{-1}W_\mu$, $H_2(x) = H_0^{-1}(x)[H_1'(x)+P(x)H_1(x)]$, $M_{1\lambda}m(x) = W_\mu(P_\lambda(x)m(x))$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2^3[0,1]$.*

Лемма 10. *Существуют непрерывные функции $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$ $(i = 1,\ldots,5;\ j = 1,2)$ такие, что для $q_1(x)$ и $q_2(x)$ из леммы 9 имеют место соотношения:*

$$
\begin{aligned}
(W_\mu q_j)_1 &= -\int_x^1 e^{\mu(x-t)}\gamma_{1j}(t)f_1(t)\,dt - \int_0^{1-x} e^{\mu(x+t-1)}\delta_{1j}(t)f_1(t)\,dt + W_{1j}(\mu)e^{\mu(x-1)},\\
(W_\mu q_j)_2 &= \int_0^x e^{-\mu(x-t)}\gamma_{2j}(t)f_1(t)\,dt + \int_{1-x}^1 e^{-\mu(x+t-1)}\delta_{2j}(t)f_1(t)\,dt + W_{2j}(\mu)e^{-\mu x},\\
(W_\mu q_j)_3 &= -\int_x^1 e^{\mu d(x-t)}\gamma_{3j}(t)f_2(t)\,dt - \int_0^{1-x} e^{\mu d(x+t-1)}\delta_{3j}(t)f_2(t)\,dt + W_{3j}(\mu)e^{\mu d(x-1)},\\
(W_\mu q_j)_4 &= \int_0^x e^{-\mu d(x-t)}\gamma_{4j}(t)f_2(t)\,dt + \int_{1-x}^1 e^{-\mu d(x+t-1)}\delta_{4j}(t)f_2(t)\,dt + W_{4j}(\mu)e^{-\mu d x},\\
(W_\mu q_1)_5 &= -\int_x^1 e^{\mu\omega(x-t)}\gamma_{51}(t)f_3(t)\,dt + W_{51}(\mu)e^{\mu\omega(x-1)}, \quad (W_\mu q_2)_5 = W_{52}(\mu)e^{\mu\omega(x-1)},
\end{aligned}
$$

где $W_{ij}(\mu) = W_{ij}(f,\mu)$ $(i = 1,2,3,4)$ — линейные комбинации с ограниченными по μ коэффициентами интегралов $\int\limits_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu(1-t)}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu d t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu d(1-t)}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu\omega t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t) f_\nu(t) e^{-\mu\omega(1-t)}\,dt$ $(\nu = 1,2,3)$, а $W_{5j}(\mu) = W_{5j}(f,\mu)$ — интегралов $\int\limits_0^1 \varphi(t) \times e^{-\mu t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \varphi(t) e^{-\mu d t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \varphi(t) e^{-\mu\omega t}\,dt$, где $\varphi(t)$ являются продолжениями по лемме 7 следующих, рассматриваемых как операторы по $f_\nu(x)$, интегралов

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^{1-t} f_\nu(\tau+t)\theta(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau), \quad \int\limits_0^{1-t} f_\nu(1-\tau-t)\theta(1-\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau),\\
\int\limits_t^1 f_\nu(\tau-t)\theta(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau), \quad \int\limits_t^1 f_\nu(1-\tau+t)\theta(1-\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau) \quad (\nu,\, l = 1,2,3),
\end{gathered} \tag{18}$$

когда $\theta(x)$ являются произвольными функциями среди $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$. Функции $\psi(\tau)$ те же, что и в лемме 3.

Рассмотрим операторы $Q_\lambda f_\nu = \int\limits_0^1 Q(x,t,\lambda) f_\nu(t)\,dt$, где $Q(x,t,\lambda)$ есть одна из функций $\int\limits_x^1 e^{\mu(x-\tau)} \times \theta(t) M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_0^x e^{-\mu(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_x^1 e^{\mu d(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_0^x e^{-\mu d(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_x^1 e^{\mu\omega(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $e^{\mu(x-1)}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{-\mu x}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{\mu d(x-1)}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{-\mu d x}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{\mu\omega(x-1)}$. Здесь $M(x,t,\lambda)$ есть либо $M_{ij}(x,t,\lambda)$, либо $M_{ij}(1-x,t,\lambda)$ при некоторых i,j. Функции $M_{ij}(x,t,\lambda)$ $(i,\, j = 1,\dots,5)$ являются компонентами ядра интегрального оператора M_λ; $N(t,\lambda,\mu)$ есть одна из следующих функций: $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau} M(\tau,t,\lambda)\theta(t)\,d\tau$, $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau \int\limits_0^{1-\tau} M(s+\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_1(s)$, $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau \times \int\limits_\tau^1 M(s-\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_1(s)$, $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau \int\limits_0^{1-\tau} M(s+\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_2(s)$, $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau \int\limits_\tau^1 M(s-\tau,t,\lambda) \times \psi(s)\theta(t)\,d\sigma_2(s)$, $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau \int\limits_0^{1-\tau} M(s+\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_3(s)$, и, наконец, $r(\mu)$ есть одна из функций $-\mu$, $-\mu d$, $-\mu\omega$.

Лемма 11. *Каждая компонента вектор-функции $W_\mu M_\lambda q_1$ есть линейная комбинация всевозможных операторов $Q_\lambda f_\nu$ с ограниченными по μ коэффициентами.*

Обозначим через $\sigma(x,\mu_1,k)$ одну из функций $e^{-(\mu_1+ik)x}$, $e^{(\mu_1+ik)(x-1)}$, $e^{-(\mu_1+ik)dx}$, $e^{(\mu_1+ik)d(x-1)}$, $e^{(\mu_1+ik)\omega(x-1)}$; через $\omega(x,t,\mu_1,k)$ — одну из функций $\varepsilon(x,t)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(t,x)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(1-x,t)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, $\varepsilon(t,1-x)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, $\varepsilon(x,t)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)d(x-t)}$, $\varepsilon(t,x)\theta(t)\times e^{(\mu_1+ik)d(x-t)}$, $\varepsilon(1-x,t)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)d(x+t-1)}$, $\varepsilon(t,1-x)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)d(x+t-1)}$, $\varepsilon(t,x)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)\omega(x-t)}$, где $\theta(t)$ либо те же, что и в лемме 10, либо $\theta(t) \equiv 1$; $M(x,t,\mu_1,k) = M(x,t,\lambda)|_{\lambda=-i\sqrt{d_1}(\mu_1+ik)}$, $N(x,\mu_1,k) = N(t,\lambda,\mu)|_{\substack{\lambda=-i\sqrt{d_1}(\mu_1+ik),\\ \mu=\mu_1+ik}}$. Пусть $A_k f_\nu = \psi(x)\int\limits_0^1 \sigma(x,\mu_1,k)\sigma(t,\mu_1,k)Af_\nu(t)\,dt$ $(\nu = 1,2,3)$, где $Af_\nu(t)$ — один из операторов $\theta(t)f_\nu(t)$ или операторов (18); $B_k f_\nu = \psi(x)\int\limits_0^1 \omega(x,t,\mu_1,k)f_\nu(t)\,dt$, $M_k f_\nu = \int\limits_0^1 M(x,t,\mu_1,k)\theta(t)f_\nu(t)\,dt$, $N_k f_\nu = \psi(x)\sigma(x,\mu_1,k)\int\limits_0^1 N(t,\mu_1,k)f_\nu(t)\,dt$.

Пусть $\mu \in \Pi(\delta)$, $\mu = \mu_1 + ik$ и μ_1 принадлежит ограниченной области. Для дальнейшего резольвенту R_λ удобно обозначить $R(\lambda,\mu)$ и пусть $R(\mu) = R(\lambda,\mu)|_{\lambda=-i\sqrt{d_1}/\mu}$.

Лемма 12. *Если $f_\nu(x) \in L_2[0,1]$ $(\nu = 1,2,3)$, то при больших $|\mu|$ для каждой компоненты вектора $R(\mu)f$ справедливо представление $(R(\mu)f)_i = \Omega(x,\mu_1,k;f) + O(\frac{\|f\|}{k^2})$, где $\Omega(x,\mu_1,k;f)$ есть конечная сумма с ограниченными по μ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов $A_k f_\nu$, $B_k f_\nu$, $\frac{1}{k}B_k f_\nu$, $\frac{1}{k}B_k M_k f_\nu$, $\frac{1}{k}N_k f_\nu$, причем коэффициенты при $B_k f_\nu$ не зависят от μ_1 и k, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2^3[0,1]$.*

Так же как и в [6] представим полуполосу Π в виде объединения конечного числа различных групп равных между собой прямоугольников, границы которых Γ_k $(k = 1,2,\dots)$ (при возрастании k контуры удаляются от начала координат) состоят из отрезков, лежащих на прямых $\mathrm{Re}\,\mu = h$ (h — ширина полосы), $\mathrm{Re}\,\mu = 0$ и из отрезков длины h, параллельных вещественной оси. Контуры Γ_k

принадлежат $\Pi(\delta)$ и для каждого Γ_k конкретной группы существует натуральное t_k, что $\Gamma_k = \Gamma + it_k$, где Γ — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы. Аналогичное построение проводится и для второй полуполосы из леммы 4. Построенные в ней контуры обозначим через Γ_k $(k = -1, -2, \ldots)$.

Лемма 13. *Пусть J — любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел. Тогда имеет место оценка* $\left\| \sum\limits_{k \in J} \int_{\Gamma_k} R(\mu) f \, d\mu \right\| \le C$, *равномерная по J.*

Лемма 14. *Система с.п.ф. оператора L полна в* $L_2^3[0,1]$.

Из лемм 13 и 14 так же, как в [7], следует

Теорема 2. *Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в* $L_2^3[0,1]$. *При этом в скобки следует объединять те с.п.ф., которые соответствуют собственным значениям λ_m, для которых числа $i\lambda_m/\sqrt{d_1}$ попали внутрь контуров Γ_k области S и в аналогичные контуры из оставшихся нерассмотренных областей.*

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Доклады РАЕН. 2004. № 4. С. 80–87.
2. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.
3. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
4. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
5. *Рапоппорт И.М.* О некоторых асимтотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР. 1954.
6. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием// Математика. Механика: Сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80–82.
7. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с интегральным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С.61–63.

УДК 514.772.2+517.97

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н.М. Медведева

Волгоградский государственный университет,
кафедра информатики и экспериментальной математики
E-mail: natasha_medvedeva@volsu.ru, nmedv@mail.ru

В данной работе вычисляются первая и вторая вариации функционала типа площади для поверхностей вращения; формулируется признак устойчивости и неустойчивости в терминах локальных координат на основе оценок специальных интегралов. Приводятся примеры нахождения областей устойчивости и неустойчивости, в том числе и для p-минимальных поверхностей.

Research of Stability for Extremal Rotation Surfaces

N.M. Medvedeva

In this work we obtain the first and second variations of area type functional for rotation surfaces formulas. We proof the feature of stability and instability in the terms of the local coordinates and special integrals. We consider some examples by application our results for research if stability for rotation surfaces.

Рассмотрим C^2-гладкую поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, заданную радиус-вектором $\vec{r}(u,v)$, где u, v — главные направления поверхности, и C^2-гладкую функцию $\phi: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\phi(-\xi) = \phi(\xi)$.

Если обозначить через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \phi(\xi_3) d\mathcal{M}, \tag{1}$$

где $d\mathcal{M}$ — элемент площади на $\mathcal{M}$. Заметим, что величина (1) не зависит от выбора нормали ξ.

Будем говорить, что поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной* (или — *экстремалью* функционала (1)), если первая вариация функционала (1) равна нулю (ниже подробно приведено построение вариаций).