References

1. Khromov A. P. Integral operators with kernels that are discontinuous on broken lines. *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 11, pp. 1669–1696. DOI: 10.4213/sm1534.
2. Koroleva O A., Khromov A. P. Integral operator with a kernel that has jumps on broken lines. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 6–13 (in Russian).
3. Kornev V. V., Khromov A. P. Uniform convergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1451—1469. DOI: 10.4213/sm601.
4. Koroleva O A. On Convergence of Riesz Means of the Expansions in Eigen and Associated Functions Integral Operator with Kernel Having Jumps on Broken Lines. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 1, iss. 2, pp. 63–67 (in Russian).

УДК УДК 501.1

К ЗАДАЧЕ О ЦЕЛОСТНОСТИ L-ФУНКЦИИ АРТИНА

В. Н. Кузнецов[1], В. В. Кривобок[2], Д. С. Степаненко[3]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KuznetsovVN@info.sgu.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KrivobokVV@info.sgu.ru

[3]Ассистент кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, stepanenko.dmitry@gmail.com

В работе определяется класс L-функций Артина, которые являются мероморфными функциями, полюсы которых лежат на критической прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ и совпадают с нулями Z-функций Дедекинда некоторых числовых полей.

Ключевые слова: L-функция Артина, теорема Брауэра.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть K — нормальное расширение числового поля k степени n и G — группа Галуа этого расширения. Пусть $\{M(g)\}_{g\in G}$ — представление группы G в группу матриц размерности $n\times n$ и χ — характер этого представления:

$$\chi(g) = \mathrm{Sp}\, M(g), \qquad g \in G,$$

где $\mathrm{Sp}\, M(g)$ означает след матрицы $M(g)$.

L-функция Артина определяется следующим образом:

$$L(s,\chi) = L(s,\chi,K|k) = \prod_{\wp} \left| I - M\left(\left[\frac{K|k}{\wp}\right]\right) N(\wp^{-s}) \right|^{-1},$$

где $\wp$ — неразветвленный простой идеал поля k, $\left[\dfrac{K/k}{\wp}\right]$ — автоморфизм Фробениуса (т. е. образующий элемент, связанный с расширением классов вычетов по модулю $\wp$), а $\left| I - M\left(\left[\dfrac{K/k}{\wp}\right]\right) N(\wp^{-s})\right|$ — характеристический многочлен матрицы $M(g)$ при $\lambda = N(\wp)^{-s}$.

Отметим некоторые свойства L-функции Артина [1, 2].

1. $L(s,\chi)$ регулярна при $\sigma > 1$.

2. Если расширение $K|k$ абелево, а χ — простой характер, то определение функции $L(s,\chi)$ за вычетом множителей, относящихся к разветвленным простым идеалам, совпадает с L-функцией Дирихле.

3. Пусть Ω — промежуточное поле между K и k, являющееся нормальным над k. Пусть $H = \mathrm{Gal}(K|\Omega)$ так, что H — нормальный делитель в G и $G|H = \mathrm{Gal}(\Omega|k)$.

Тогда каждый характер χ группы $G|H$ можно очевидным образом рассматривать как характер группы G, причем $L(s,\chi,K|k) = L(s,\chi,\Omega|k)$.

4. Предположим, что χ — непростой характер в G, а именно $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Тогда $L(s,\chi) = L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$.

5. Предположим снова, что Ω — поле между K и k, но уже не обязательно нормальное над k. Пусть $H = \mathrm{Gal}(K|\Omega)$ и пусть $G = \sum\limits_i H_{\alpha_i}$ есть разложение группы G на правые классы смежности. Каждому характеру χ группы H соответствует индуцированный характер χ^* группы G:

$$\chi^*(\mu) = \sum_{\alpha_i \mu \alpha_i^{-1} \in H} \chi(\alpha_i \mu \alpha_i^{-1}), \mu \in G;$$

при этом $L(s, \chi^*, K|k) = L(s, \chi, K|\Omega)$.

В начале 1930-х гг. Артин высказал предположение о целостности L-функции в случае неглавного характера [1]. В направлении решения этой гипотезы Р. Брауэром в 1947 г. было доказано следующее утверждение [3].

Теорема (Брауэр). *Неабелев характер χ можно разложить в виде линейной комбинации индуцированных характеров χ^* циклических подгрупп с целыми коэффициентами, т. е.*

$$\chi = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{t_\alpha} n_{i,\alpha} \chi^*_{i,\alpha}.$$

Как следствие теоремы Брауэра, получается мероморфность L-функции Артина.

Действительно, рассмотрим семейство циклических подгрупп H_α группы G и семейство характеров χ_α этих циклических подгрупп. Из теоремы Брауэра следует, что неабелев характер χ можно разложить в виде линейной комбинации индуцированных характеров $\chi^*_{\alpha_i}$ с целыми коэффициентами. Отсюда в силу свойств L-функции Артина следует представление L-функции Артина в следующем виде:

$$L(s, \chi, K|k) = \frac{\prod\limits_i L_i(s, \chi_i, K|k_{\alpha_i})^{n_i}}{\prod\limits_j L_j(s, \chi_j, K|k_{\alpha_j})^{n_j}},$$

где χ_i, χ_j — характеры циклических групп $G(K|k_\alpha)$, что и доказывает мероморфность L-функции Артина.

В 1949 г. Брауэр показал, что L-функция в случае неглавного характера является регулярной и не обращается в ноль при $\sigma \geq 1$, и возможные полюсы этой функции могут располагаться в критической полосе $0 < \sigma < 1$. В работе [4] приводится уточнение результата Брауэра, а именно показывается, что возможные полюсы L-функции могут лежать только на критической прямой $\sigma = 1/2$.

В данной статье указывается класс L-функций Артина, полюсы которых лежат на критической прямой $\sigma = 1/2$ и совпадают с нулями некоторой Z-функции Дедекинда.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть дано расширение $k \subset K$ с характером χ и группой Галуа G.

Теорема. *Пусть для характера χ имеет место разложение*

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s_i} r_{ij} \chi^0_{ij} - r_0 \chi^*_0(g), \tag{1}$$

где r_{ij} — положительные рациональные числа, а χ^*_{ij} — индуцированные характеры некоторых циклических подгрупп $G = \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$, где $H_i \cap H_j = \{e\}$, $i \neq j$. Тогда $L(s, \chi)$ — мероморфная функция, полюсы которой являются нулями некоторой Z-функции Дедекинда и лежат на прямой $\sigma = 1/2$.

Доказательство. В силу (1) и свойства 4 L-функции Артина получаем:

$$L(s, \chi, K|k) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} \prod\limits_{j=1}^{s_i} L^{r_{ij}}(s, \chi_{ij}, K|k_{ij})}{Z_K^{r_0}(s)}.$$

Отсюда в силу мероморфности функции $L(s, \chi)$ ее полюсы совпадают с некоторыми нулями Z-функции Дедекинда, которые в силу работы [4] лежат на критической прямой $\sigma = 1/2$.

Покажем, что существует достаточно много расширений и характеров Артина, удовлетворяющих условию (1).

Рассмотрим расширение Галуа $k \subset K$ с группой Галуа G.

Предположим, что группа G представима в виде $G = \bigcup\limits_{i=1}^{m} H_i$, где H_i — циклические и $H_i \cap H_j = \{e\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим следующее представление характера χ:

$$\chi(g) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \chi|H_i, & g \neq e, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \chi|H_i - (m-1)\chi(e), & g = e. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим $\hat{\chi} = \chi|H_i$ и $\chi_0(g) = \begin{cases} n = [G], & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$

Предположим также, что

$$\hat{\chi}_i(g) = \sum_{(j=1)}^{s_i} r_{ij}\chi^*_{ij}(g), \qquad g \in H_i, \tag{3}$$

где r_{ij} — некоторые положительные рациональные числа, а χ_{ij} — одномерные характеры подгрупп H_i.

В силу (2) и (3) выполняется соотношение (1)

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i} r_{ij}\chi^*_{ij} - r_0\chi^*_0(g).$$

Остановимся на примерах расширений, для которых выполняются (2) и (3).

Пример 1. Пусть G — неабелева группа 6-го порядка, т. е. $[G] = 6 = 2 \cdot 3$. В работе [2] показано, что неабелев характер можно представить в виде

$$\psi_3(g) = (\chi^*_1 + \chi^*_2)(g) + \frac{1}{2}(\chi^*_{4,2} + \chi^*_{4,3})(g) - \chi^*_0(g).$$

Пример 2. Рассмотрим случай, когда порядок группы G является произведением двух простых, т. е. $[G] = n = p_1 \cdot p_2$, $p_1 < p_2$. Как следует из теории конечных групп [5], в G существует нормальная подгруппа H порядка p_2. Пусть H_1 — подгруппа порядка p_1.

Известно [5], что если G неабелева, то $p_1|(p2-1)$ (в противном случае получим, что G — абелева). Рассмотрим группу $G|H$. Так как $G|H$ — циклическая группа порядка p_1, каждый её характер является одномерным. Известно [2], что каждый характер группы $G|H$ продолжим на всю группу G, причем число таких характеров равно p_1. Число сопряженных классов у подгруппы H_1 равно $p_1 - 1$ (порядок H_1, за исключением тривиального класса e), у H два класса сопряженности (H и e), тогда общее число сопряженных классов равно $p_1 - 1 + 1 + 1 = p_1 + 1$.

Как показано в [6], число простых характеров группы G равно числу классов сопряженных элементов этой группы. Кроме того, имеет место равенство

$$\sum n_i^2 = n, \tag{4}$$

где n_i — размерность простого характера ψ_i, а $n = [G]$.

Следовательно, существуют $p_1 + 1$ простых характеров группы G. Из них p_1 одномерных — $\psi_1, \ldots, \psi_{p_1}$ и один неодномерный — ψ. Пусть его «толщина» равна d, т. е. $\psi(e) = d$. Тогда по формуле (4) в нашем случае получим:

$$p_1p_2 = 1^2 + \cdots + 1^2 + d^2p_1(p_2 - 1) = d^2.$$

Извлечение корня возможно лишь в случае, когда $p_2 - 1 = p_1d^2$ или $p_2 - 1 = p_1d_1^2$. Тогда $d = p_1d_1$.

Рассмотрим соотношение ортогональности, приведенное в [6]:

$$\sum_{i=1}^{p_1} \psi_i(g) + \psi(e)\psi(g) = \chi^*_0(g). \tag{5}$$

Имеем $G = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{p_2} H_i\right) \bigcup H$. Тогда

$$\psi(g) = \left(\sum_{i=1}^{p_2} \psi|H_i + \psi|H\right)(g) - \frac{1}{p_1}\chi_0^*(g).$$

Найдем $\psi|H_i$. Из соотношения (5) получаем:

$$\psi|H_i = \begin{cases} d, & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases} \tag{6}$$

Если $\chi_1, \ldots, \chi_{p_1-1}$ — одномерные простые характеры подгруппы H_1, то $\sum\limits_{\chi_i} \chi_i(g) = \begin{cases} p_1, & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$ Но $p_1 = d/d_1$. Следовательно,

$$\psi|H_i = \begin{cases} d_1\left(\sum\limits_{\chi_i} \chi_i(g)\right), & g = e, \\ 0, & g \neq e. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\chi_0^*(g) = \sum_{i=1}^{p_2} \chi_0(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \begin{cases} p_2, & g = e \\ 1, & g \neq e, \end{cases}$$

так как H_1 состоит из p_1 несопряженных элементов. Пусть $\chi_i \neq \chi_0$. Тогда

$$\chi_j^*(g) = \sum_{i=1}^{p_2} \chi_j(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \begin{cases} p_2, & g = e, \\ \chi_j(g), & g \neq e. \end{cases}$$

Так как все элементы не сопряжены в H_1, то

$$\psi|H_1(g) = d_1\left(\sum_{\chi_i} \chi_i(g)\right) = \begin{cases} d = d_1 p_1, & g = e, \\ 0, & g \neq e, \end{cases} \tag{7}$$

В силу (6) и (7) получаем:

$$\psi|H_1(g) = d_1\left(\sum_{\chi_i} \chi_i(g)\right) = d_1 \frac{1}{p_2}\left(\sum_{\chi_i} \chi_i^*(g)\right). \tag{8}$$

И так для любой подгруппы из класса сопряженных подгрупп $H_1, \ldots, H_{p_2}$.

Рассмотрим действие характера ψ на подгруппе H.

Так как ψ_j полностью определяются только на подгруппах H_i, а на H они равны 1, то из соотношения (5) имеем:

$$\psi|H = \begin{cases} d, & g = e, \\ -1/d, & g \neq e. \end{cases} \tag{9}$$

С другой стороны, пусть χ_j — одномерные характеры группы H. Для подгруппы H имеется p_1 классов смежности. Поэтому имеем

$$\sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j^*(g) = \sum_{\chi_j \neq \chi_0} \sum_{i=1}^{p_1} \chi_j(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \sum_{i=1} \sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j(\alpha_i g \alpha_i^{-1}) = \begin{cases} (p_2 - 1)p_1, & g = e, \\ -p_1, & g \neq e \end{cases} = \begin{cases} d^2, & g = e, \\ -d/d_1, & g \neq e. \end{cases} \tag{10}$$

В силу (9) и (10) получаем:

$$\psi|H(g) = \frac{1}{d}\left(\sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j^*\right)(g). \tag{11}$$

Таким образом, в силу (8) и (11) получаем:

$$\psi(g) = d_1\left(\sum_{\chi_i} \chi_i^*\right)(g) + \frac{1}{d}\left(\sum_{\chi_j \neq \chi_0} \chi_j^*\right)(g) - d_1\chi_0^*(g),$$

что соответствует условию (1) основной теоремы □.

Библиографический список

1. *Artin E.* Über eine neue Art von L-Reihen // Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. 1923. Vol. 3. P. 89–108.
2. *Хейльброн Х.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1969. С. 310–348
3. *Brauer R.* On Artin's L-series with general group characters // Ann. of Math. 1947. Vol. 48. P. 502–514.
4. *Степаненко Д. С.* Об одном уточнении теоремы Брауэра относительно L-функций числовых полей // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 31–34.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М. : Наука, 1972.
6. *Ленг С.* Алгебра. М. : Мир, 1968.

To the Problem of the Integrity of the Artin's L-functions

V. N. Kuznetsov, V. V. Krivobok, D. S Stepanenko

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KuznetsovVN@info.sgu.ru, KrivobokVV@info.sgu.ru, stepanenko.dmitry@gmail.com

In this paper was described a class of Artin's L-functions, each of which is meromorphic, their poles lays on the critical line $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ and coincides with zeroes of Dedekind's Z-functions of some fields.

Key words: Artin's L-function, Brauer's theorem.

References

1. Artin E. Über eine neue Art von L-Reihen. *Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.*, 1923, vol. 3, pp. 89–108.
2. Heilbronn H. ζ-functions and L-functions. *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, Washington, D.C., Thompson, 1967, pp. 310–348.
3. Brauer R. On Artin's L-series with general group characters. *Ann. of Math.*, 1947, vol. 48, pp. 502–514.
4. Stepanenko D. S. On verification of Brauer's Theorem concerning Artin's L-functions of Number Fields. *Izv. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 31–34 (in Russian).
5. Kargapolov M. I., Merzliakov Iu. I. *Osnovy teorii grupp* [Fundamentals of Group Theory]. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).
6. Leng S. *Algebra*. Moscow, Mir, 1968 (in Russian).

УДК 517.518

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ P-ВАРИАЦИИ ОБОБЩЕННЫМИ СРЕДНИМИ АБЕЛЯ–ПУАССОНА И ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

А. А. Тюленева

Ассистент кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aatuleneva@km.ru

В работе доказывается асимпотическая оценка приближения обобщенными средними Абеля–Пуассона и логарифмическими средними p-вариационной метрике на классе функций с заданной мажорантой p-вариационных наилучших приближений. Получен ряд других количественных результатов о приближении этими средними.

Ключевые слова: функции ограниченной p-вариации, обобщенные средние Абеля–Пуассона, наилучшее приближение, p-вариационный модуль непрерывности.