УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПРЕОБРАЗОВАННЫМИ РЯДАМИ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА ПО НОРМЕ ГЕЛЬДЕРА

Т. В. Лихачева

Саратовский государственный университет
E-mail: iofinat@mail.ru

Используя осцилляции строк матрицы A, мы получаем оценку приближения в метрике Гельдера линейными средними рядов Фурье–Виленкина, порожденными A.

Ключевые слова: система Виленкина, пространство Гельдера, линейные средние.

The Approximation of Functions by Transformed Fourier–Vilenkin Series in the Hölder Norm

T. V. Likhacheva

Using the oscillations of rows from matrix A, we obtain an estimate for the degree of approximation in Hölder metric by linear means of Fourier–Vilenkin series generated by A.

Key words: Vilenkin system, Hölder space, linear means.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такова, что $2 \le p_n \le N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \qquad x_n \in \mathbb{Z}_+, \qquad 0 \le x_n < p_n. \tag{1}$$

Разложение будет единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k < m_l$, брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Рассмотрим абелеву группу $G(\mathbf{P})$ последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, с операцией $\oplus_G$ покоординатного сложения по модулю p_n. Определим отображения $g : [0,1) \to G(\mathbf{P})$ и $\lambda : G(\mathbf{P}) \to [0,1)$ формулами $g(x) = (x_1, x_2, \dots)$, где x представлен в виде (1) и $\lambda(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i/m_i$, где $\mathbf{x} \in G(\mathbf{P})$. Тогда для $x, y \in [0,1)$ можно ввести $x \oplus y := \lambda(g(x) \oplus_G g(y))$, если $\mathbf{z} = g(x) \oplus_G g(y)$ не удовлетворяет равенству $z_i = p_i - 1$ для всех $i \ge i_0$. Аналогично определяются $x \ominus y$ и, для всех $x, y \in [0,1)$, обобщенное расстояние $\rho(x,y) = \lambda(g(x) \ominus g(y))$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде $k = \sum\limits_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}$, $k_i \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le k_i < p_i$. Для $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Известно, что система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L^1[0,1)$. Кроме того, для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и почти всех $y \in [0,1)$ при фиксированном $x \in [0,1)$ верны равенства $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $\chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, §1.5].

Коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье для $f \in L^1[0,1)$ по системе Виленкина $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ задаются формулами $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)\overline{\chi_k(x)}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Далее важную роль имеет представление $S_n(f)(x) = \int\limits_0^1 f(x \ominus t) D_n(t)\,dt$, где $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Будем рассматривать пространства $L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, измеримых интегрируемых в p-й степени функций с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$. В нем можно ввести модуль непрерывности: $\omega^*(f,\delta)_p = \sup\limits_{0<h<\delta} \|f(x \ominus h) - f(x)\|_p$. По определению, $\omega^*(f,\delta)_\infty = \sup\{|f(x) - f(y)| : \rho(x,y) < \delta\}$ и пространство $C^*[0,1) = \{f \in B[0,1) : \lim\limits_{t\to 0} \omega^*(f,t) = 0\}$ обобщенно непрерывных функций снабжено нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$.

Если $\omega(\delta)$ непрерывна и возрастает на $[0,1)$, причем $\omega(0) = 0$, то $\omega(\delta) \in \Omega$. Если при этом $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1)$, то ω принадлежит классу Бари B, а если $\delta \int_\delta^1 t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,1)$, то ω принадлежит классу Бари–Стечкина B_1 (см. [2]). Для $\omega(\delta) \in \Omega$ пространство $H_p^\omega[0,1)$ состоит из $f \in L^p[0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$ таких, что $\omega^*(f,\delta)_p \le C\omega(\delta)$, где C зависит только от f. Пространство $H_p^\omega[0,1)$ с нормой

$\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \omega^*(f,h)_p/\omega(h)$ является банаховыми. Можно показать, что эта норма эквивалентна следующей: $\|f\|_{p,\omega} = \|f\|_p + \sup\limits_{0<h<1} \|f(\cdot) - f(\cdot \ominus h)\|_p/\omega(h)$.

Пусть $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ — бесконечная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Матрица A задает метод суммирования формулой $T_n(f)(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k} S_{k+1}(f)(x)$. Будем использовать также обозначения $\tau_n(f) = f - T_n(f)$, $K_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n,k} D_{k+1}(t)$ и $\psi(n) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{n,k} - a_{n,k+1}|$. Целью нашей работы является получение оценок $\|\tau_n(f)\|_{p,\nu}$ для $f \in H_p^{\omega}$, где $\nu, \omega \in \Omega$ таковы, что $\nu(t) = O(\omega^{\gamma}(t))$ для всех $t \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$ фиксировано. Основной результат работы является аналогом и частичным обобщением теоремы 1 из [3], где рассматривались классы $Lip(\alpha)$ и линейные средние тригонометрического ряда Фурье.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1 (см. [4]). *Пусть $f \in L^p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C^*[0,1)$ $(p = \infty)$, $\varphi(x,t) := f(x \ominus t) - f(x)$. Тогда $\|\varphi(\cdot \ominus h, t) - \varphi(\cdot, t)\|_p \le 2\omega^*(f,t)_p$, $\|\varphi(\cdot \ominus h, t) - \varphi(\cdot, t)\|_p \le 2\omega^*(f,t)_p$ при всех $h, t \in [0,1)$.*

Лемма 2. *Пусть $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$, $F_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} D_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы неравенства*

$$|D_n(x)| \le N x^{-1}, \qquad |nF_n(x)| \le C(N) x^{-2}, \qquad x \in (0,1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Первое неравенство леммы 2 см. в [5, гл. 4, § 3], второе неравенство доказано в [4].

Лемма 3. *Пусть для матрицы A, удовлетворяющей условиям* (2) *и* (3)*, существует возрастающая последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что*

$$\sum_{k=\mu_n}^{\infty} (k+1)|a_{nk}| = O(\mu_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Тогда $K_n(t) = O(\mu_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Поскольку $|D_{k+1}(t)| \le k+1$ при всех $t \in [0,1)$, то в силу условий (2) и (4) находим, что

$$|K_n(t)| \le \left|\sum_{k=0}^{\mu_n - 1} a_{nk} D_{k+1}(t)\right| + \left|\sum_{k=\mu_n}^{\infty} a_{nk} D_{k+1}(t)\right| \le \mu_n \sum_{k=0}^{\mu_n - 1} |a_{nk}| + \sum_{k=\mu_n}^{\infty} |a_{nk}|(k+1) \le C_1 \mu_n.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть матрица $A = \{a_{nk}\}_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2) *и* (3) *и существует строго возрастающая последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, для которой выполнено условие* (4)*. Если $\omega \in B \cap B_1$, $\nu \in \Omega$ и $\omega^{\gamma}(t)/\nu(t)$ ограничена на $(0,1)$ при некотором $\gamma \in (0,1)$, то для $f \in H_p^{\omega}$, $1 \le p \le \infty$, справедливо неравенство*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O\left(\omega^{1-\gamma}(\lambda_n^{-1})[(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))^{\gamma} + \psi(n)\lambda_n]\right),$$

где $\psi(n)$ определено во введении, а $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ строго возрастает и $\lambda_n \le \mu_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из условия (2) и леммы 2 мы выводим абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} D_{k+1}(t)$ к сумме $K_n(t)$ при всех $t \in (0,1)$. Из леммы 2 вытекает также оценка

$$|K_n(t)| = O(t^{-1}), \qquad 0 < t < 1. \tag{5}$$

Если $f \in H_p^\omega$, $1 \le p \le \infty$, где $\omega \in B$, то для $\varphi(x,t) = f(x \ominus t) - f(x)$ в силу обобщенного неравенства Минковского и (5) имеем:

$$\| \int_0^1 \varphi(\cdot,t) K_n(t)\, dt \|_p \le \int_0^1 \|\varphi(\cdot,t)\|_p |K_n(t)|\, dt \le C_1 \int_0^1 t^{-1}\omega(t)\, dt < \infty. \tag{6}$$

Поэтому в силу (3)

$$T_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \int_0^1 \varphi(x,t) D_{k+1}(t)\, dt = \int_0^1 \varphi(x,t) K_n(t)\, dt,$$

где последнее равенство справедливо благодаря (6) и теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Для $\tau_n(f) = f - T_n(f)$ имеем:

$$\|\tau_n(f)(\cdot) - \tau_n(f)(\cdot \ominus h)\|_p \le \int_0^1 \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h, t)\|_p |K_n(t)|\, dt = \int_0^{1/\lambda_n} + \int_{1/\lambda_n}^1 =: I_1 + I_2$$

Применяя оценку (5), лемму 1 и условие $\omega \in B$, мы находим, что

$$I_1 = \int_0^{1/\lambda_n} \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h, t)\|_p |K_n(t)|\, dt = O\left(\int_0^{1/\lambda_n} t^{-1}\omega(t)\, dt \right) = O(\omega(1/\lambda_n)). \tag{7}$$

С другой стороны, используя преобразование Абеля и лемму 2, получаем:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} D_{k+1}(t) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_{nk} - a_{n,k+1})(k+1) F_{k+1}(t) \right| = O(\psi(n) t^{-2}), \tag{8}$$

откуда благодаря лемме 1 и условию $\omega \in B_1$ имеем:

$$I_2 = \int_{1/\lambda_n}^1 \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h, t)\|_p |K_n(t)|\, dt = O\left(\psi(n) \int_{1/\lambda_n}^1 t^{-2}\omega(t)\, dt \right) = O(\psi(n)\lambda_n \omega(1/\lambda_n)). \tag{9}$$

Теперь пусть

$$I_1 = \left(\int_0^{1/\mu_n} + \int_{1/\mu_n}^{1/\lambda_n} \right) \|\varphi(\cdot,t) - \varphi(\cdot \ominus h, t)\|_p |K_n(t)|\, dt =: I_{11} + I_{12}.$$

Используя лемму 1 и лемму 3, получаем $I_{11} = O\left(\omega(h) \int_0^{1/\mu_n} |K_n(t)|\, dt \right) = O(\omega(h))$, $h \in (0,1)$. С другой стороны, в силу (5) и леммы 1 имеем $I_{12} = O\left(\omega(h) \int_{1/\mu_n}^{1/\lambda_n} t^{-1}\, dt \right) =$ $= O(\omega(h) \ln(\mu_n/\lambda_n))$, $h \in (0,1)$. Из этих оценок вытекает, что

$$I_1 = O(\omega(h)(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))), \qquad h \in (0,1). \tag{10}$$

Используя оценку (8) и условие $\omega \in B_1$, заключаем, что

$$I_2 = O\left(\omega(h) \int_{1/\lambda_n}^1 |K_n(t)|\, dt \right) = O\left(\omega(h)\psi(n) \int_{1/\lambda_n}^1 t^{-2}\, dt \right) = O(\omega(h)\psi(n)\lambda_n). \tag{11}$$

Объединяя оценки (7) и (10), получаем $I_1 = I_1^\gamma I_1^{1-\gamma} = O(\omega^\gamma(h)(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))^\gamma \omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n))$, соответственно из (9) и (11) следует, что

$$I_2 = I_2^\gamma I_2^{1-\gamma} = O([\psi(n)\lambda_n \omega(1/\lambda_n)]^{1-\gamma} [\omega(h)\psi(n)\lambda_n]^\gamma) = O(\psi(n)\lambda_n \omega^\gamma(h) \omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n)).$$

В силу условия $\omega^\gamma(t) = O(\nu(t))$, $t \in (0,1)$, имеем

$$\sup_{0<h<1} \|\tau_n(\cdot) - \tau_n(\cdot \ominus h)\|_p / \nu(h) = O(\omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n)[(1 + \ln(\mu_n/\lambda_n))^\gamma + \psi(n)\lambda_n]). \tag{12}$$

Аналогично (7) и (9) находим благодаря условию $\omega \in B \cap B_1$:

$$\|\tau_n(f)\|_p \le \int_0^1 \|f(\cdot \ominus t) - f(\cdot)\|_p |K_n(t)|\,dt = O\left(\int_0^{1/\lambda_n} t^{-1}\omega(t)\,dt + \psi(n)\int_{1/\lambda_n}^1 t^{-2}\omega(t)\,dt\right) =$$
$$= O((1+\psi(n)\lambda_n)\omega(1/\lambda_n)) = O(\omega^{1-\gamma}(1/\lambda_n)[(1+\ln(\mu_n/\lambda_n))^\gamma + \psi(n)\lambda_n]), \qquad (13)$$

поскольку $\omega(t) \le \omega^\gamma(1)\omega^{1-\gamma}(t)$ при всех $t \in (0,1]$. Из (12) и (13) вытекает неравенство теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и A, ω, ν удовлетворяют условиям теоремы, $f \in H_p^\omega$. Тогда $\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O(\omega^{1-\gamma}(1/\mu_n)(1+\psi(n)\mu_n))$, $n \in \mathbb{N}$.*

Следствие 2. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и A удовлетворяет условию теоремы, $\omega(t) = t^\alpha$, $\nu(t) = t^\beta$, $0 < \beta < \alpha$, $f \in H_p^\omega$. Тогда при $n \in \mathbb{N}$*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = \begin{cases} O(\mu_n^{\beta-\alpha}(1+\psi(n)\mu_n)), & \alpha < 1; \\ O(\mu_n^{\beta-1} + \psi(n)\mu_n^\beta(\ln\mu_n)^{1-\beta}), & \alpha = 1; \\ O(\mu_n^{\beta-\alpha} + \psi(n)\mu_n^{\beta/\alpha}), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Доказательство. При $\alpha < 1$ результат следствия 2 вытекает из следствия 1. Аналогично (9) имеем

$$I_2 = O\left(\psi(n)\int_{1/\mu_n}^1 t^{-2}t^\alpha\,dt\right) = \begin{cases} O(\psi(n)\ln(\mu_n)), & \alpha = 1; \\ O(\psi(n)), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Используя оценки (7), (10) и (11) при $\lambda_n = \mu_n$ и $\omega(t) = t^\alpha \in B$, получаем

$$I_1 = I_1^{\beta/\alpha} I_1^{1-\beta/\alpha} = O(h^\beta(\mu_n^{-\alpha})^{1-\beta/\alpha}) = O(h^\beta\mu_n^{\beta-\alpha}). \qquad (14)$$

и

$$I_2 = I_2^{\beta/\alpha} I_2^{1-\beta/\alpha} = \begin{cases} O(h^\beta\psi(n)\mu_n^\beta(\ln\mu_n)^{1-\beta}), & \alpha = 1; \\ O(h^\beta\psi(n)\mu_n^{\beta/\alpha}), & \alpha > 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Из (14) и (15) выводим

$$\sup_{0<h<1} \|\tau_n(f)(\cdot \ominus h) - \tau_n(f)(\cdot)\|_p / h^\beta = \begin{cases} O(\mu_n^{\beta-\alpha} + \psi(n)\mu_n^\beta(\ln\mu_n)^{1-\beta}), & \alpha = 1; \\ O(\mu_n^{\beta-\alpha} + \psi(n)\mu_n^{\beta/\alpha}), & \alpha > 1. \end{cases} \qquad (16)$$

Аналогично теореме показывается, что $\|\tau_n(f)\|_p$ мажорируется правой частью (16). Объединяя эти оценки, получаем результат следствия. Следствие 2 доказано.

В качестве примера нетреугольной матрицы A, к которой применимы результаты теоремы, рассмотрим отложенные средние (см. [6]). Пусть $\{q_n\}_{n=1}^\infty, \{r_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ таковы, что $q_n < r_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$. Тогда

$$T_n(f) = \sum_{i=q_n+1}^{r_n} S_i(f)/(r_n - q_n), \qquad (17)$$

т. е. $a_{nk} = 1/(r_n - q_n)$ при $q_n \le k < r_n$ и $a_{nk} = 0$ при остальных k. Пусть $\mu_n = r_n$, $\lambda_n = r_n - q_n$. Тогда условие (4) выполнено и

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^\infty |a_{nk} - a_{n,k+1}| = \sum_{k=q_n-1}^{r_n-1} |a_{nk} - a_{n,k+1}| = |a_{n,q_n}| + |a_{n,r_n-1}| = \frac{2}{r_n - q_n}.$$

Следствие 3. *Пусть $\omega, \nu \in \Omega$ удовлетворяют условиям теоремы, $1 \le p \le \infty$, $f \in H_p^\omega$. Если $T_n(f)$ задается формулой (17), то*

$$\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O\left(\omega^{1-\gamma}(1/r_n)\left[1 + \frac{r_n}{r_n - q_n}\right]\right).$$

В частности, если $q_n \le \delta r_n$, $\delta \in (0,1)$, то $\|f - T_n(f)\|_{p,\nu} = O(\omega^{1-\gamma}(1/r_n))$.

Для доказательства надо заметить, что $\ln(\mu_n/\lambda_n) = \ln(r_n/(r_n - q_n)) = O(r_n/(r_n - q_n)) = O(\psi(n)\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Автор выражает благодарность С. С. Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00097-а) *и гранта Президента РФ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [*Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A.* Walsh Series and Transforms : Theory and Applications. Moscow : Nauka, 1987. 344 p.]

2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. М. : ГИТТЛ, 1956. Т. 5. С. 483–522. [*Bari N. K., Stechkin S. B.* Best approximations and differential properties of two conjugate functions // Trudy Moskov. Mat. Obshch. 1956. Vol. 5. P. 483–522.]

3. *Das G., Ghosh T., Ray B. K.* Degree of approximation of functions by their Fourier series in the generalized Hölder metric // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 1996. Vol. 106, № 2. P. 139–153.

4. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree of approximation by means of Fourier–Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143-158.

5. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [*Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinshtein A. I.* Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm, 1981. 180 p.]

6. *Agnew R. P.* On deferred Cesaro means // Ann. Math. 1932. Vol. 33, № 2. P. 413–421.

УДК 517.51

СХОДИМОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ–ХААРА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ $L^{p(x,y)}$

М. Г. Магомед-Касумов

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Махачкала
E-mail: rasuldev@gmail.com

В статье доказывается сходимость прямоугольных частичных сумм Фурье по ортогональной системе Хаара в пространствах Лебега с переменным показателем.

Ключевые слова: двумерная система Хаара, пространство Лебега с переменным показателем, условие Дини–Липшица, сходимость, прямоугольные частичные суммы.

Convergence of Fourier–Haar Rectangular Sums in Lebesgue Spaces with Variable Exponent $L^{p(x,y)}$

M. G. Magomed-Kasumov

Convergence of Fourier–Haar rectangular partial sums in Lebesgue spaces with variable exponent is proved in this paper.

Key words: two-dimensional Haar system, Lebesgue spaces with variable exponent, Dini–Lipschitz condition, convergence, rectangular partial sums.

ВВЕДЕНИЕ

Пространства Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}(E)$ в последние годы вызывают усиливающийся интерес у специалистов из самых различных областей. Систематическое исследование топологии указанных пространств впервые было дано в работе И. И. Шарапудинова [1]. В частности, в ней было показано, что если $1 \le p(x) \le \overline{p}(E) < \infty$, то топология пространства $L^{p(x)}_\mu(E)$ нормируема и одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для $f \in L^{p(x)}_\mu(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} \mu(dx) \le 1\}.$$

В другой работе [2] того же автора был рассмотрен вопрос о базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}(0,1)$, где было показано, что система Хаара является базисом в $L^{p(x)}(0,1)$ тогда и