

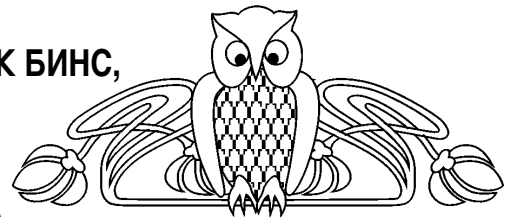


Библиографический список

1. Коненков Ю. К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6, вып. 1. С. 124–126. [Konenkov Yu. K. A Rayleigh-Type Flexural Wave // Soviet Phys. Acoustics. 1960. Vol. 6, iss. 1. P. 122–123.]
2. Norris A. N. Flexural edge waves // J. of Sound and Vibration. 1994. Vol. 171. P. 571–573.
3. Thompson I., Abrahams I. D., Norris A. N. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. America. 2002. Vol. 112. P. 1756–1765.
4. Zakharov D. D., Becker W. Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. Sound and Vibration. 2003. Vol. 261. P. 805–818.

УДК 629

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК БИНС, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В НОРМАЛЬНОЙ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ, ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ВДОЛЬ ЭКВАТОРА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ НА ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЕ



М. Ю. Логинов¹, М. Г. Ткаченко², Ю. Н. Челноков³

¹ Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов
E-mail: mike.loginov@gmail.com

² Автономный университет Мехико
E-mail: mich@xanum.uam.mx

³ Саратовский государственный университет
E-mail: chelnokovYuN@gmail.com

Analytical Solution of Linear Differential Error Equations of Strapdown Inertial Navigation System, Functioning in the Normal Geographic Reference Frame, for the Case of an Object, Following the Geographical Equator

M. Yu. Loginov, M. G. Tkachenko, Yu. N. Chelnokov

Analytical solution of linear differential error equations of the strapdown inertial navigation system, functioning in the normal geographic reference frame, for the object, following the Earth equator with constant speed and on the constant height, is derived. The solution is represented in the form, which is convenient for the analysis. The roots of the auxiliary equation are derived in the explicit form. Obtained results can be used, for example, for analysis of the accuracy of strapdown inertial navigation system.

В работе получено в явном виде аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС), функционирующей в нормальной географической системе координат, для случая движения с постоянной скоростью и на постоянной высоте вдоль земного экватора. Решение представлено в удобном для исследования виде, описывает влияние неточного задания начальных условий интегрирования на точность нахождения параметров навигации и справедливо в случае отсутствия инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров. Полученное решение может быть использовано при анализе точности работы БИНС.

Ключевые слова: инерциальная навигация, бесплатформенные инерциальные навигационные системы, ошибки БИНС, аналитическое решение уравнений ошибок, экватор.

Key words: inertial navigation, strapdown inertial navigation systems, strapdown INS errors, analytical solution of error equations, equator.

ВВЕДЕНИЕ

При построении алгоритмов функционирования БИНС используются так называемые уравнения идеальной работы БИНС, т.е. дифференциальные и функциональные соотношения, связывающие проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта, измеряемые чувствительными элементами БИНС (при условии их идеального функционирования), с навигационными параметрами (координатами местонахождения и проекциями скорости) и параметрами ориентации. Возможны различные варианты таких уравнений [1–4]. В данной работе используются уравнения идеального функционирования БИНС в нормальной географической системе координат (НГСК), в которых в качестве промежуточных кинематических параметров ориентации используются параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) [4–10]. Эти уравнения используются в настоящее время для построения высокоточных алгоритмов функционирования современных отечественных БИНС, построенных на волоконно-оптических или лазерных гироскопах и кварцевых акселерометрах.

В работе [11] для этих уравнений выведены полные и линеаризованные дифференциальные урав-



нения ошибок, которые позволяют изучать влияние на работу БИНС погрешностей чувствительных элементов (акселерометров и гироскопов), ошибок начального задания параметров ориентации и навигации, а также законов движения объекта. Для аналитического исследования, как правило, используются линейаризованные дифференциальные уравнения ошибок БИНС. В некоторых частных случаях движения объекта становится возможным найти аналитическое решение линейных дифференциальных уравнений ошибок. В работе [1] В. Д. Андреевым построены аналитические решения линейных дифференциальных уравнений ошибок определения декартовых координат объекта в инерциальной системе координат для случаев, когда объект неподвижен в инерциальной системе координат; движется с постоянной в инерциальной системе координат скоростью в неподвижной относительно инерциальной системы координат плоскости, проходящей через центр Земли; движется с постоянной скоростью по параллели. Последний случай включает в себя, как частные, случай неподвижного по отношению к Земле объекта (рассмотренный В. Д. Андреевым в приближённой постановке) и случай движения объекта с постоянной скоростью вдоль экватора. Решение, построенное в последнем случае с использованием преобразования Карсона–Хевисайда, по мнению В. Д. Андреева, громоздко и трудно обозримо. Более того, для корней характеристического уравнения интегрируемых уравнений ошибок, которые входят в построенное решение, в работе [1] не получены явные выражения через коэффициенты исходной системы.

Отметим, что аналитические решения дифференциальных уравнений ошибок для частных случаев движения объекта позволяют установить свойства уравнений функционирования БИНС, а также аналитически оценить влияние неточного задания начальных условий интегрирования и инструментальных погрешностей БИНС на точность нахождения параметров ориентации и навигации.

В данной работе подробно рассматривается построение аналитического решения линейаризованных дифференциальных уравнений ошибок БИНС [11] для случая движения объекта вдоль земного экватора с постоянной скоростью на постоянной высоте при отсутствии погрешностей гироскопов (измерителей угловой скорости) и акселерометров. Таким образом, полученное решение позволяет установить свойства уравнений функционирования БИНС в данном конкретном случае движения, а также аналитически оценить влияние неточного задания начальных условий интегрирования на точность нахождения параметров навигации. Решение справедливо в случае отсутствия инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров, представлено в удобном для исследования виде, а для корней характеристического уравнения интегрируемых уравнений ошибок получены явные выражения.

1. ИСХОДНАЯ СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача инерциальной ориентации и навигации объекта в географической опорной системе координат, решаемая с помощью бесплатформенной инерциальной навигационной системы, имеющей в своем составе 3 ньютометра и пространственный измеритель абсолютной угловой скорости, жестко закрепленные на борту объекта, и бортовой вычислитель. Считается, что в задаче инерциальной навигации входит определение ориентации объекта относительно географического сопровождающего трехгранника (параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), а также углов ориентации объекта: географического курса, углов рыскания, тангажа и крена), проекций линейной скорости движения объекта относительно Земли на оси географического сопровождающего трехгранника, криволинейных географических координат местоположения объекта. В качестве исходной информации для решения этой задачи принимаются проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта на связанные с ним оси (или приращения интегралов от них), формируемые чувствительными элементами БИНС.

При рассмотрении задач ориентации и навигации объекта используются следующие системы координат:

$O_1 X_1^* X_2^* X_3^* (X^*)$ — геоцентрическая инерциальная система координат с началом в центре масс Земли, принимаемой за эллипсоид вращения. Ось X_1^* направлена по полярной оси Земли (вдоль вектора u угловой скорости вращения Земли); оси X_2^* , X_3^* расположены в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли;

$O_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3 (\eta)$ — геоцентрическая система координат, жестко связанная с Землёй. Ось η_1 направ-

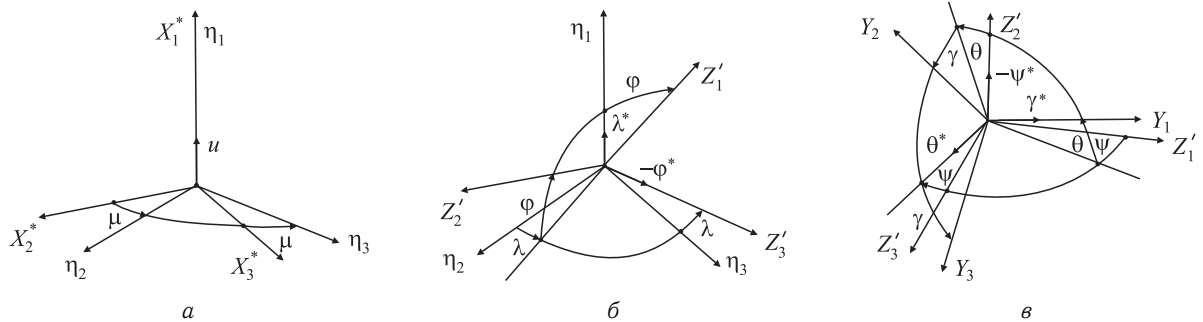


лена по оси X_1^* ; оси η_2, η_3 расположены в плоскости экватора, причём ось η_2 совпадает с линией пересечения плоскости экватора и гринвичского меридиана;

$O_2 Z'_1 Z'_2 Z'_3 (Z')$ — нормальная географическая система координат (или НГСК), начало O_2 которой совпадает с одной из точек объекта (точкой местоположения чувствительных масс ньютонометра). Ось Z'_2 направлена по географической вертикали вверх, ось Z'_1 — вдоль касательной к меридиану h -эллипсоида на север, ось Z'_3 — вдоль касательной к параллели на восток;

$O_2 Y_1 Y_2 Y_3 (Y)$ — связанная с объектом система координат. Ось Y_1 направлена по продольной оси объекта, ось Y_2 — по нормальной, а ось Y_3 — по поперечной.

Все введённые системы координат являются правыми. Схемы поворотов координатных трёхгранников приведены на рисунке. Здесь $\mu = \mu_0 + ut$ (μ — значение угла разворота системы координат η относительно X^* , μ_0 — значение этого угла в начальный момент времени, u — угловая скорость вращения Земли, t — время); λ, φ — географическая долгота и широта местонахождения объекта; ψ — географический курс объекта; ϑ, γ — углы тангажа и крена.



Схемы поворотов координатных трёхгранников: а — для систем координат X^* и η ; б — для систем координат η и Z' ; в — для систем координат Z' и Y

Взаимная ориентация введённых координатных трёхгранников задаётся параметрами Эйлера в соответствии со схемой поворотов

$$X^* \xrightarrow[\lambda_j]{\omega} Y \sim X^* \xrightarrow[\nu_j]{\omega} Z' \xrightarrow[\varkappa_j]{\omega} Y,$$

где λ_j и \varkappa_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию объекта (трёхгранника Y) относительно трёхгранников X^* и Z' соответственно; ν_j ($j = 0, 1, 2, 3$) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию НГСК относительно инерциальной системы координат X^* ; ω — вектор абсолютной угловой скорости вращения объекта (системы координат Y).

Рассмотрим исходную систему уравнений инерциальной ориентации и навигации объекта относительно нормальной географической системы координат, являющихся уравнениями идеального функционирования БИНС в НГСК [4, 6–8, 10]:

$$\begin{aligned} \dot{v}_N &= a_N + \omega_E v_H - (u_H + \omega_H) v_E, \\ \dot{v}_H &= a_H - \omega_E v_N + (u_N + \omega_N) v_E - g, \\ \dot{v}_E &= a_E + (u_H + \omega_H) v_N - (u_N + \omega_N) v_H; \\ 2\dot{\varkappa} &= n_\omega \varkappa - n_\varkappa \omega_{Z'} = (n_\omega - m_{\omega_{Z'}}) \varkappa, \\ \varkappa &= (\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3), \quad \omega_{Z'} = (0, \omega_N, \omega_H, \omega_E); \\ \dot{\lambda} &= v_E / (R_1 \cos \varphi), \quad \dot{\varphi} = v_N / R_2, \quad \dot{H} = v_H / \alpha; \\ \omega_N &= u_N + v_E / R_1, \quad \omega_H = u_H + (v_E \operatorname{tg} \varphi) / R_1, \quad \omega_E = -v_N / R_2, \\ u_N &= u \cos \varphi, \quad u_H = u \sin \varphi; \\ R_1 &= (\bar{a} + H) / \alpha, \quad R_2 = (\bar{a} + H) (1 - e^2) / \alpha^3, \quad \alpha = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}; \\ \operatorname{tg} \psi &= -\frac{\varkappa_0 \varkappa_2 - \varkappa_1 \varkappa_3}{\varkappa_0^2 + \varkappa_1^2 - 0,5}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\varkappa_0 \varkappa_1 - \varkappa_2 \varkappa_3}{\varkappa_0^2 + \varkappa_2^2 - 0,5}, \quad \sin \vartheta = 2 (\varkappa_1 \varkappa_2 + \varkappa_0 \varkappa_3); \end{aligned}$$



$$a_{Z'} = n_{\varkappa}^T m_{\varkappa} a, \quad a_{Z'} = (0, a_N, a_H, a_E), \quad a = (0, a_1, a_2, a_3);$$

$$g = g_{eo} \tilde{a}^2 (1 + \delta \sin^2 \varphi) / (\tilde{a} + H)^2.$$

Здесь v_k ($k = N, H, E$) — проекции относительной скорости объекта (скорости точки O_2 системы координат Y относительно земной поверхности) на оси НГСК; a_i ($i = 1, 2, 3$) и a_k ($k = N, H, E$) — проекции вектора кажущегося ускорения (ускорения, измеряемого пространственным ньютонометром) на объектовые оси и на оси НГСК; ω_i ($i = 1, 2, 3$) и ω_k ($k = N, H, E$) — проекции векторов абсолютных угловых скоростей вращения объекта и НГСК на объектовые оси и на оси НГСК; H — высота местонахождения объекта; $n_{\varkappa}, m_{\varkappa}, n_{\omega}, m_{\omega_{Z'}}$ — кватернионные матрицы типов n и m [4] (см. ниже); g — модуль ускорения силы тяжести, $u = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость суточного вращения Земли, $e^2 = 0,006692$ — квадрат первого эксцентриситета, $\tilde{a} = 6378245 \text{ м}$ — большая полуось земного эллипсоида вращения Красовского, $g_{eo} = 9,78049 \text{ м/с}^2$, $\delta = 5,317 \cdot 10^{-3}$.

Используемые в описанных выше соотношениях кватернионные матрицы n и m типов имеют следующий вид (для любого кватерниона l):

$$n(l) = \begin{pmatrix} l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 \\ l_1 & l_0 & l_3 & -l_2 \\ l_2 & -l_3 & l_0 & l_1 \\ l_3 & l_2 & -l_1 & l_0 \end{pmatrix}, \quad m(l) = \begin{pmatrix} l_0 & -l_1 & -l_2 & -l_3 \\ l_1 & l_0 & -l_3 & l_2 \\ l_2 & l_3 & l_0 & -l_1 \\ l_3 & -l_2 & l_1 & l_0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы n_{ω} и $m_{\omega_{Z'}}$ выглядят так:

$$n_{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_{\omega_{Z'}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_N & -\omega_H & -\omega_E \\ \omega_N & 0 & -\omega_E & \omega_H \\ \omega_H & \omega_E & 0 & -\omega_N \\ \omega_E & -\omega_H & \omega_N & 0 \end{pmatrix}.$$

2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОШИБОК

Введём замену переменных следующим образом:

$$v_p = v_p^* + \Delta v_p \quad (p = N, H, E),$$

$$H = H^* + \Delta H, \quad \lambda = \lambda^* + \Delta \lambda, \quad \varphi = \varphi^* + \Delta \varphi,$$

$$\varkappa = \varkappa^* + \Delta \varkappa,$$

$$\varkappa^* = (\varkappa_0^*, \varkappa_1^*, \varkappa_2^*, \varkappa_3^*)^T, \quad \Delta \varkappa = (\Delta \varkappa_0, \Delta \varkappa_1, \Delta \varkappa_2, \Delta \varkappa_3)^T,$$

$$C_{\varkappa ij} = C_{\varkappa ij}^* + \Delta C_{\varkappa ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$a_i = a_i^* + \Delta a_i, \quad \omega_i = \omega_i^* + \Delta \omega_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

В этих соотношениях величины с верхним индексом «*» обозначают точные (невозмущённые) значения параметров, а величины со знаком Δ — отклонения параметров от их точных значений. Таким образом, Δv_p ($p = N, H, E$) — ошибки определения проекций относительной скорости объекта на оси НГСК; $\Delta H, \Delta \lambda, \Delta \varphi$ — ошибки определения высоты, долготы и широты объекта; $\Delta \varkappa_k$ ($k = 0, 1, 2, 3$) и $\Delta C_{\varkappa ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) — ошибки определения ориентации объекта относительно НГСК в параметрах Родрига–Гамильтона и направляющих косинусах; $\Delta a_i, \Delta \omega_i$ ($i = 1, 2, 3$) — инструментальные погрешности акселерометров и гироскопов соответственно.

Система линейных дифференциальных уравнений ошибок определения географических координат и проекций относительной скорости объекта может быть записана в матричном виде следующим образом [11]:

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + B, \tag{1}$$



где

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X} &= (\Delta \dot{v}_N, \Delta \dot{v}_H, \Delta \dot{v}_E, \Delta \dot{H}, \Delta \dot{\varphi}, \Delta \dot{\lambda})^T, \quad \Delta X = (\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda)^T, \\ B &= (O_1, O_2, O_3, 0, 0, 0)^T, \quad O_i = \sum_{j=1}^3 C_{\varkappa ij}^* \Delta a_j + \sum_{j=1}^3 Q_{ij} a_j^*, \quad Q = C_\nu^* \Delta C_\lambda^T. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих соотношениях C_ν^* — матрица невозмущённых значений направляющих косинусов, характеризующих ориентацию НГСК относительно инерциальной системы координат X^* , ΔC_λ — матрица направляющих косинусов, описывающая ошибку определения ориентации объекта относительно инерциальной системы координат X^* , а элементы a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) матрицы A выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{v_H^*}{R_2^*}, \quad a_{12} = \omega_E^*, \quad a_{13} = -2\omega_H^*, \quad a_{14} = \frac{(\omega_H^* - u_H^*)v_E^* - \omega_E^*v_H^*}{\tilde{a} + H^*}, \\ a_{15} &= -a_H^* - 2u_N^*v_E^* - \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_E^*}{\cos^2 \varphi^*} + \frac{(v_E^*)^2 e^2 \sin^2 \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*} + 3\frac{v_N^*v_H^*e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^*(1 - e^2)}, \\ a_{16} &= -a_E^* \sin \varphi^*, \quad a_{21} = -2\omega_E^*, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = 2\omega_N^*, \\ a_{24} &= \frac{\omega_E^*v_N^* - (\omega_N^* - u_N^*)v_E^* + 2g^*}{(\tilde{a} + H^*)}, \\ a_{25} &= a_N^* - 2u_H^*v_E^* - \frac{2g_{eo}\tilde{a}^2 \delta \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)^2} - 3\frac{(v_N^*)^2 e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^*(1 - e^2)} - \frac{(v_E^*)^2 e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*}, \\ a_{26} &= a_E^* \cos \varphi^*, \quad a_{31} = u_H^* + \omega_H^*, \quad a_{32} = -u_N^* - \omega_N^*, \\ a_{33} &= \frac{v_N^* \operatorname{tg} \varphi^* - v_H^*}{R_1^*}, \quad a_{34} = \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_H^* - (\omega_H^* - u_H^*)v_N^*}{\tilde{a} + H^*}, \\ a_{35} &= 2u_N^*v_N^* + 2u_H^*v_H^* + \frac{(\omega_N^* - u_N^*)v_N^*}{\cos^2 \varphi^*} + \frac{v_E^*e^2 \sin \varphi^* (v_H^* \cos \varphi^* - v_N^* \sin \varphi^*)}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*}, \\ a_{36} &= a_N^* \sin \varphi^* - a_H^* \cos \varphi^*, \quad a_{41} = 0, \quad a_{42} = 1/\alpha^*, \quad a_{43} = 0, \quad a_{44} = 0, \\ a_{45} &= v_H^*e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^* / (\alpha^*)^3, \quad a_{46} = 0, \quad a_{51} = 1/R_2^*, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = 0, \\ a_{54} &= -\frac{v_N^*}{R_2^*(\tilde{a} + H^*)}, \quad a_{55} = -3\frac{v_N^*e^2 \sin \varphi^* \cos \varphi^*}{R_1^*(1 - e^2)}, \quad a_{56} = 0, \quad a_{61} = 0, \quad a_{62} = 0, \\ a_{63} &= \frac{1}{R_1^* \cos \varphi^*}, \quad a_{64} = -\frac{v_E^*}{R_1^* \cos \varphi^* (\tilde{a} + H^*)}, \quad a_{65} = \frac{v_E^* \sin \varphi^*}{R_1^* \cos^2 \varphi^*} - \frac{v_E^*e^2 \sin \varphi^*}{(\tilde{a} + H^*)\alpha^*}, \quad a_{66} = 0. \end{aligned}$$

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЧАСТИ УРАВНЕНИЙ ОШИБОК

При выводе изучаемых дифференциальных уравнений ошибок используется следующее матричное соотношение [11]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta a_N \\ \Delta a_H \\ \Delta a_E \end{pmatrix} &= \Delta \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix} + \Delta \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \varphi^* \\ 0 & 0 & \cos \varphi^* \\ \sin \varphi^* & \cos \varphi^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix} + \\ &+ (C_\varkappa^*)^T \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix} + C_\nu^* \Delta C_\lambda^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где C_\varkappa^* — матрица направляющих косинусов, описывающая точную (невозмущённую) ориентацию объекта относительно НГСК. Соотношение (3) описывает погрешности Δa_N , Δa_H , Δa_E определения проекций кажущегося ускорения объекта на оси НГСК. Они используются при построении уравнений



ошибок определения проекций Δv_N , Δv_H , Δv_E относительной скорости объекта. Отметим, что неоднородная часть B в уравнениях (1) появляется из третьего и четвертого слагаемых в правой части соотношения (3).

Будем считать, что инструментальные погрешности гироскопов и акселерометров отсутствуют, т.е. $\Delta a_j = 0$, $\Delta \omega_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Тогда третье слагаемое в правой части (3) обращается в нуль. Кроме того, учтём, что

$$\Delta C_\lambda^T \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{pmatrix} = \Delta C_\lambda^T C_\varkappa^* \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix}, \quad C_\varkappa^* = C_\lambda^* (C_\nu^*)^T,$$

где C_λ^* — матрица направляющих косинусов, описывающая точную (невозмущённую) ориентацию объекта относительно инерциальной системы координат X^* . С учётом этого соотношения, четвёртый член в правой части соотношения (3) примет вид

$$C_\nu^* \Delta C_\lambda^T C_\lambda^* (C_\nu^*)^T \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Линейные дифференциальные уравнения ошибок определения ориентации объекта в инерциальной системе координат имеют аналитическое решение, из которого при отсутствии погрешностей гироскопов следует [1, 4]:

$$\Delta C_\lambda(t) = C_\lambda^*(t) (C_\lambda^*(t_0))^T \Delta C_\lambda(t_0). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), получим:

$$C_\nu^* \Delta C_\lambda^T(t_0) C_\lambda^*(t_0) (C_\lambda^*)^T C_\lambda^* (C_\nu^*) \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix} = C_\nu^* \Delta C_\lambda^T(t_0) C_\lambda^*(t_0) (C_\nu^*)^T \begin{pmatrix} a_N^* \\ a_H^* \\ a_E^* \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матрица направляющих косинусов C_ν^* , описывающая точную ориентацию НГСК относительно инерциальной системы координат X^* , для случая движения объекта по экватору выглядит следующим образом:

$$C_\nu^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \lambda_a^* & \sin \lambda_a^* \\ 0 & -\sin \lambda_a^* & \cos \lambda_a^* \end{pmatrix}, \quad \lambda_a^* = \mu + ut + \lambda^*. \quad (7)$$

Учитывая (7), а также условие $a_N^* = a_E^* = 0$, справедливое в случае движения объекта вдоль экватора, из (6) получаем новый вектор-столбец:

$$b = a_H^* \begin{bmatrix} \lambda_{12} \cos \lambda_a^* + \lambda_{13} \sin \lambda_a^* \\ \lambda_{22} \cos^2 \lambda_a^* + (\lambda_{32} + \lambda_{23}) \cos \lambda_a^* \sin \lambda_a^* + \lambda_{33} \sin^2 \lambda_a^* \\ \lambda_{32} \cos^2 \lambda_a^* + (\lambda_{33} - \lambda_{22}) \cos \lambda_a^* \sin \lambda_a^* - \lambda_{23} \sin^2 \lambda_a^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где λ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — элементы матрицы $\Delta C_\lambda^T(t_0) C_\lambda^*(t_0)$.

Таким образом, в случае движения объекта вдоль экватора при отсутствии инструментальных погрешностей гироскопов и акселерометров вместо соотношений (1)–(2) получаем уравнения

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + b, \quad (9)$$

где вектор-столбец b описывается соотношением (8) и отражает влияние неточного задания начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат на вектор ΔX ошибок определения параметров навигации.



4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

При невозмущённом движении объекта вдоль экватора с постоянной скоростью v_E^* на постоянной высоте H^* , при условии, что Земля — сфера, т.е. $\alpha = 1$ и $e^2 = 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi^* = 0, \quad a_N^* = a_E^* = 0, \quad a_H^* = g^* - 2uv_E^* - (v_E^*)^2/R_1^*, \quad \omega_N^* = u + v_E^*/R_1^*, \\ \omega_H^* = \omega_E^* = 0, \quad v_N^* = v_H^* = 0, \quad R_1^* = \bar{a} + H^*, \quad g^* = g_{eo}\bar{a}^2/(\bar{a} + H^*). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, рассмотрим однородную систему, соответствующую линейной неоднородной системе (9) дифференциальных уравнений ошибок определения проекций относительной скорости объекта и его криволинейных координат:

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta X &= (\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda)^T, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -g^* & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega_N^* & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & -2u - v_E^*/R_1^* & 0 & 0 & 0 & -a_H^* \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/R_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_1^* & -v_E^*/(R_1^*)^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ a_{24} &= 2g^*/R_1^* - (v_E^*/R_1^*)^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим обычную систему линейных уравнений:

$$(A - \beta E) e = 0, \quad (11)$$

где β — число (вещественное или комплексное), $e = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)^T$. Из системы (11) найдём возможные значения β и соответствующие им собственные векторы e . Перепишем систему (11) в скалярном виде:

$$\begin{aligned} -\beta\alpha_1 - g^*\alpha_5 &= 0, \\ -\beta\alpha_2 + 2\omega_N^*\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 &= 0, \\ -(2u + v_E^*/R_1^*)\alpha_2 - \beta\alpha_3 - a_H^*\alpha_6 &= 0, \\ \alpha_2 - \beta\alpha_4 &= 0, \\ \alpha_1/R_1^* - \beta\alpha_5 &= 0, \\ \alpha_3/R_1^* - \alpha_4 v_E^*/(R_1^*)^2 - \beta\alpha_6 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Из первого и пятого уравнений системы (12) находим

$$\alpha_1 = -\alpha_5 g^*/\beta, \quad \alpha_1 = R_1^* \beta \alpha_5.$$

Следовательно, имеются две возможности:

- (а) $R_1^* \beta = -g^*/\beta$, откуда $\beta_{1,2} = \pm \sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$ (i — мнимая единица);
- (б) $\alpha_1 = \alpha_5 = 0$, и собственные значения β следует определять из второго, третьего, четвёртого и шестого уравнений системы (12).

В случае (а) можно положить $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$, $\alpha_5 = 1$, и из равенства $\alpha_1 = R_1^* \beta \alpha_5$ получим $\alpha_1 = \pm R_1^* \sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$. Таким образом, найдены два собственных вектора:

$$e_1 = \left(\sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i; 0; 0; 0; 1; 0 \right), \quad e_2 = \left(-\sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i; 0; 0; 0; 1; 0 \right),$$



соответствующих собственным значениям $\beta_1 = \sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$ и $\beta_2 = -\sqrt{g^*/R_1^*} \cdot i$.

Рассмотрим случай (б). Из четвёртого уравнения системы (12) находим $\alpha_2 = \beta\alpha_4$ и полученное значение для α_2 подставляем во второе, третье и шестое уравнения системы (12). Получаем:

$$\begin{aligned} 2\omega_N^* \alpha_3 + (a_{24} - \beta^2) \alpha_4 &= 0, \\ -(2u + v_E^*/R_1^*) \beta \alpha_4 - \beta \alpha_3 - a_H^* \alpha_6 &= 0, \\ \alpha_3/R_1^* - \alpha_4 v_E^*/(R_1^*)^2 - \beta \alpha_6 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из первого уравнения системы (13) находим

$$\alpha_3 = (\beta^2 - a_{24}) \alpha_4 2\omega_N^*. \quad (14)$$

Подставляя полученное значение α_3 во второе и третье уравнения системы (13), находим:

$$\alpha_6 = -\frac{\beta}{a_H^*} \left(2u + \frac{v_E^*}{R_1^*} + \frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} \right) \alpha_4, \quad \alpha_6 = \frac{1}{R_1^* \beta} \left(\frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} - \frac{v_E^*}{R_1^*} \right) \alpha_4. \quad (15)$$

Для совместимости двух последних уравнений необходимо, чтобы

$$-\frac{\beta}{a_H^*} \left(2u + \frac{v_E^*}{R_1^*} + \frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} \right) = \frac{1}{R_1^* \beta} \left(\frac{\beta^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} - \frac{v_E^*}{R_1^*} \right).$$

Отсюда после несложных преобразований получаем биквадратное относительно β уравнение:

$$\beta^4 + \beta^2 [2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*] - (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*) a_H^*/R_1^* = 0.$$

Можно показать, что в широком диапазоне высот H^* и скоростей v_E^* полученное уравнение имеет два действительных и два чисто мнимых корня. Это условие перестаёт выполняться при достижении некоторой максимальной скорости $(v_E^*)^{\max}$ (т.е. при $|v_E^*| > (v_E^*)^{\max}$), которая на нулевой высоте равна $(v_E^*)^{\max} \approx 7440$ м/с и с ростом высоты убывает по закону, близкому к линейному. Так, для высоты $H^* = 100$ км максимальная скорость приблизительно равна $(v_E^*)^{\max} \approx 7370$ м/с, а для высоты $H^* = 1000$ км $(v_E^*)^{\max} \approx 6820$ м/с.

Пусть β_3 и β_4 — вещественные корни, а β_5 и β_6 — чисто мнимые. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_3 &= -\beta_4 = \sqrt{\rho_1}, & \beta_5 &= -\beta_6 = \sqrt{\rho_2}, \\ \rho_1 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}, \\ \rho_2 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 - \\ &- \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Найдём собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям. Из соотношений (14), (15) и четвёртого уравнения системы (12) находим при $\alpha_4 = 1$

$$\alpha_2^{(i)} = \beta_i, \quad \alpha_3^{(i)} = (\beta_i^2 - a_{24})/2\omega_N^*, \quad \alpha_6^{(i)} = -\beta_i \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(i)} \right) / a_H^*,$$

где $i = 3, 4, 5, 6$. Отметим, что $\alpha_3^{(4)} = \alpha_3^{(3)}$, $\alpha_6^{(4)} = -\alpha_6^{(3)}$, $\alpha_3^{(5)} = \alpha_3^{(6)}$ и $\alpha_6^{(5)} = -\alpha_6^{(6)}$. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= \left(0; \beta_3; \alpha_3^{(3)}; 1; 0; \alpha_6^{(3)} \right), & \mathbf{e}_4 &= \left(0; -\beta_3; \alpha_3^{(3)}; 1; 0; -\alpha_6^{(3)} \right), \\ \mathbf{e}_5 &= \left(0; \beta_5; \alpha_3^{(5)}; 1; 0; \alpha_6^{(5)} \right), & \mathbf{e}_6 &= \left(0; -\beta_5; \alpha_3^{(5)}; 1; 0; -\alpha_6^{(5)} \right). \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений уравнения (10) имеет вид

$$W(t) = (\mathbf{e}_1 e^{\beta_1 t}, \mathbf{e}_2 e^{\beta_2 t}, \mathbf{e}_3 e^{\beta_3 t}, \mathbf{e}_4 e^{\beta_4 t}, \mathbf{e}_5 e^{\beta_5 t}, \mathbf{e}_6 e^{\beta_6 t}),$$

где \mathbf{e}_i ($i = 1, \dots, 6$) — векторы-столбцы.



Обозначим $\alpha_6^{(5)} = \tilde{\nu}i$, $\beta_1 = \tilde{\omega}i$, $\beta_5 = \tilde{\mu}i$, где $\tilde{\nu}$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\mu}$ — действительные числа, причём $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$. Тогда, в соответствии с теорией дифференциальных уравнений, общее решение линейной однородной системы (10) запишется в виде

$$\Delta X(t) = W(t) C', \quad C' = (C'_1, C'_2, C'_3, C'_4, C'_5, C'_6)^T,$$

или в скалярной записи в виде

$$\begin{aligned} \Delta v_N &= \sqrt{g^* R_1^*} [C_2 \cos \tilde{\omega}t - C_1 \sin \tilde{\omega}t], \\ \Delta v_H &= \beta_3 [C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}] + \tilde{\mu} [C_6 \cos(\tilde{\mu}t) - C_5 \sin(\tilde{\mu}t)], \\ \Delta v_E &= \alpha_3^{(3)} [C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t}] + \alpha_3^{(5)} [C_5 \cos(\tilde{\mu}t) + C_6 \sin(\tilde{\mu}t)], \\ \Delta H &= C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t} + C_5 \cos(\tilde{\mu}t) + C_6 \sin(\tilde{\mu}t), \\ \Delta \varphi &= C_1 \cos(\tilde{\omega}t) + C_2 \sin(\tilde{\omega}t), \\ \Delta \lambda &= \alpha_6^{(3)} [C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}] + \tilde{\nu} [C_6 \cos(\tilde{\mu}t) - C_5 \sin(\tilde{\mu}t)], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \sqrt{\rho_1}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}, \quad \tilde{\mu} = \sqrt{-\rho_2}, \quad \tilde{\nu} = -\sqrt{-\rho} \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(5)} \right) / a_H^*, \\ \alpha_3^{(3)} &= \frac{(\beta_3)^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} = \frac{\rho_1 - a_{24}}{2\omega_N^*}, \quad \alpha_3^{(5)} = \frac{(\beta_5)^2 - a_{24}}{2\omega_N^*} = \frac{\rho_2 - a_{24}}{2\omega_N^*}, \\ \alpha_6^{(3)} &= -\beta_3 \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(3)} \right) / a_H^* = -\sqrt{\rho_1} \left(2u + v_E^*/R_1^* + \alpha_3^{(3)} \right) / a_H^*, \\ a_{24} &= 2g^*/R_1^* - (v_E^*/R_1^*)^2, \\ \rho_1 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}, \\ \rho_2 &= -\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) + (a_{24} - a_H^*/R_1^*)/2 - \\ &- \frac{1}{2} \left[(2\omega_N^* (2u + v_E^*/R_1^*) - a_{24} + a_H^*/R_1^*)^2 + 4a_H^* (a_{24} + 2\omega_N^* v_E^*/R_1^*)/R_1^* \right]^{1/2}, \\ a_H^* &= g^* - 2uv_E^* - (v_E^*)^2/R_1^*, \end{aligned} \quad (17)$$

а C_i ($i = 1, \dots, 6$) — постоянные интегрирования, связанные с константами C'_i соотношениями

$$\begin{aligned} C_1 &= C'_1 + C'_2, \quad C_2 = i(C'_1 - C'_2), \quad C_3 = C'_3, \\ C_4 &= C'_4, \quad C_5 = C'_5 + C'_6, \quad C_6 = i(C'_5 - C'_6). \end{aligned}$$

Обозначим начальные условия интегрирования линейной однородной системы (10) через Δv_N^0 , Δv_H^0 , Δv_E^0 , ΔH^0 , $\Delta \varphi^0$ и $\Delta \lambda^0$. При $t = 0$ из системы (16) находим:

$$\begin{aligned} \Delta v_N^0 &= C_2 \sqrt{g^* R_1^*}, \quad \Delta v_H^0 = \beta_3 (C_3 - C_4) + \tilde{\mu} C_6, \quad \Delta v_E^0 = \alpha_3^{(3)} (C_3 + C_4) + \alpha_3^{(5)} C_5, \\ \Delta H^0 &= C_3 + C_4 + C_5, \quad \Delta \varphi^0 = C_1, \quad \Delta \lambda^0 = \alpha_6^{(3)} (C_3 - C_4) + \tilde{\nu} C_6. \end{aligned}$$

Из полученной системы находим константы C_i ($i = 1, \dots, 6$):

$$\begin{aligned} C_1 &= \Delta \varphi^0, \quad C_2 = \Delta v_N^0 / \sqrt{g^* R_1^*}, \quad C_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_E^0 - \Delta H^0 \alpha_3^{(5)}}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} + \frac{\tilde{\mu} \Delta \lambda^0 - \tilde{\nu} \Delta v_H^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right), \\ C_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta v_E^0 - \Delta H^0 \alpha_3^{(5)}}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} - \frac{\tilde{\mu} \Delta \lambda^0 - \tilde{\nu} \Delta v_H^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right), \quad C_5 = \frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, \end{aligned}$$

$$C_6 = \frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3}.$$

Перепишем решение (16) в виде

$$\begin{aligned} \Delta v_N &= a_{\Delta v_N} \sin(\tilde{\omega} t + \varepsilon_{\Delta v_N}), \\ \Delta v_H &= \beta_3 (C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}) + a_{\Delta v_H} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta v_H}), \\ \Delta v_E &= \alpha_3^{(3)} (C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t}) + a_{\Delta v_E} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta v_E}), \\ \Delta H &= C_3 e^{\beta_3 t} + C_4 e^{-\beta_3 t} + a_{\Delta H} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta H}), \\ \Delta \varphi &= a_{\Delta \varphi} \sin(\tilde{\omega} t + \varepsilon_{\Delta \varphi}), \\ \Delta \lambda &= \alpha_6^{(3)} (C_3 e^{\beta_3 t} - C_4 e^{-\beta_3 t}) + a_{\Delta \lambda} \sin(\tilde{\mu} t + \varepsilon_{\Delta \lambda}), \end{aligned} \quad (18)$$

где $a_{\Delta v_N}, a_{\Delta v_H}, a_{\Delta v_E}, a_{\Delta H}, a_{\Delta \varphi}, a_{\Delta \lambda}$ — амплитуды гармонических колебаний; $\varepsilon_{\Delta v_N}, \varepsilon_{\Delta v_H}, \varepsilon_{\Delta v_E}, \varepsilon_{\Delta H}, \varepsilon_{\Delta \varphi}, \varepsilon_{\Delta \lambda}$ — начальные фазы этих колебаний; $\tilde{\omega}, \tilde{\mu}$ — собственные (круговые) частоты колебаний.

Частоты колебаний определяются согласно формулам (17). Амплитуды и начальные фазы колебаний определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a_{\Delta v_N} &= \sqrt{g^* R_1^*} (C_1^2 + C_2^2)^{1/2} = \left[g^* R_1^* (\Delta \varphi^0)^2 + (\Delta v_N^0)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta v_N} &= -C_2/C_1 = -\Delta v_N^0 / \left(\Delta \varphi^0 \sqrt{g^* R_1^*} \right); \\ a_{\Delta v_H} &= \tilde{\mu} [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \tilde{\mu} \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta v_H} &= -\frac{C_6}{C_5} = \frac{(\beta_3 \Delta \lambda^0 - \alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0) (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)})}{(\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3) (\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0)}; \\ a_{\Delta v_E} &= \alpha_3^{(5)} [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \alpha_3^{(5)} \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta v_E} &= \frac{C_5}{C_6} = \frac{(\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0) (\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3)}{(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) (\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0)}; \\ a_{\Delta H} &= [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta H} &= \frac{C_5}{C_6} = \frac{(\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0) (\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3)}{(\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) (\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0)}; \\ a_{\Delta \varphi} &= [C_1^2 + C_2^2]^{1/2} = \left[(\Delta \varphi^0)^2 + (\Delta v_N^0)^2 / (g^* R_1^*) \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta \varphi} &= C_1/C_2 = \sqrt{g^* R_1^*} \Delta \varphi^0 / \Delta v_N^0; \\ a_{\Delta \lambda} &= \tilde{\nu} [C_5^2 + C_6^2]^{1/2} = \tilde{\nu} \left[\left(\frac{\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0 - \beta_3 \Delta \lambda^0}{\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_{\Delta \lambda} &= -\frac{C_6}{C_5} = \frac{(\beta_3 \Delta \lambda^0 - \alpha_6^{(3)} \Delta v_H^0) (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)})}{(\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} - \tilde{\nu} \beta_3) (\alpha_3^{(3)} \Delta H^0 - \Delta v_E^0)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим значения констант C_i ($i = 1, \dots, 6$) в соотношения (16) и запишем полученное решение дифференциальных уравнений ошибок в матричном виде:

$$\Delta X(t) = P(t) \Delta X^0, \quad (20)$$



где

$$\Delta X(t) = (\Delta v_N, \Delta v_H, \Delta v_E, \Delta H, \Delta \varphi, \Delta \lambda)^T, \quad \Delta X^0 = (\Delta v_N^0, \Delta v_H^0, \Delta v_E^0, \Delta H^0, \Delta \varphi^0, \Delta \lambda^0)^T, \quad (21)$$

а $P(t)$ — квадратная матрица 6×6 , элементы p_{ij} ($i, j = 1, \dots, 6$) которой имеют вид

$$\begin{aligned} p_{11} &= \cos(\tilde{\omega}t), & p_{12} &= 0, & p_{13} &= 0, & p_{14} &= 0, & p_{15} &= -\sqrt{g^* R_1^*} \sin(\tilde{\omega}t), & p_{16} &= 0, \\ p_{21} &= 0, & p_{22} &= \left[\beta_3 \tilde{\nu} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}) \right], \\ p_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\beta_3 (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + \tilde{\mu} \sin(\tilde{\mu}t)}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, & p_{24} &= -\frac{1}{2} \frac{\beta_3 \alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + \tilde{\mu} \alpha_3^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t)}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, \\ p_{25} &= 0, & p_{26} &= - \left[\beta_3 \tilde{\mu} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - \beta_3 \tilde{\mu} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}) \right], & p_{31} &= 0, \\ p_{32} &= \left[\tilde{\nu} \alpha_3^{(3)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(5)} \alpha_6^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}) \right], \\ p_{33} &= \left[\alpha_3^{(3)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(5)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) \right], \\ p_{34} &= - \left[\alpha_3^{(3)} \alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(3)} \alpha_3^{(5)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) \right], & p_{35} &= 0, \\ p_{36} &= - \left[\tilde{\mu} \alpha_3^{(3)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \beta_3 \alpha_3^{(5)} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}) \right], & p_{41} &= 0, \\ p_{42} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{\nu} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_6^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t)}{\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}}, & p_{43} &= \frac{1}{2} \frac{(e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \cos(\tilde{\mu}t)}{\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}}, \\ p_{44} &= - \left[\alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \alpha_3^{(3)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) \right], & p_{45} &= 0, \\ p_{46} &= - \left[\tilde{\mu} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) - 2 \beta_3 \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}) \right], & p_{51} &= \sin(\tilde{\omega}t) / \sqrt{g^* R_1^*}, \\ p_{52} &= 0, & p_{53} &= 0, & p_{54} &= 0, & p_{55} &= \cos(\tilde{\omega}t), & p_{56} &= 0, & p_{61} &= 0, \\ p_{62} &= \left[\tilde{\nu} \alpha_6^{(3)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \tilde{\nu} \alpha_6^{(3)} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}) \right], \\ p_{63} &= \left[\alpha_6^{(3)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + 2 \tilde{\nu} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) \right], \\ p_{64} &= - \left[\alpha_6^{(3)} \alpha_3^{(5)} (e^{\beta_3 t} - e^{-\beta_3 t}) + 2 \tilde{\nu} \alpha_3^{(3)} \sin(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\alpha_3^{(3)} - \alpha_3^{(5)}) \right], & p_{65} &= 0, \\ p_{66} &= - \left[\tilde{\mu} \alpha_6^{(3)} (e^{\beta_3 t} + e^{-\beta_3 t}) - 2 \beta_3 \tilde{\nu} \cos(\tilde{\mu}t) \right] / \left[2 (\tilde{\nu} \beta_3 - \tilde{\mu} \alpha_6^{(3)}) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, (20) представляет собой общее решение однородного линейного матричного дифференциального уравнения ошибок (10) для случая движения объекта вдоль экватора с постоянной скоростью на постоянной высоте.

Анализ построенного решения показывает, что ошибки по широте и северной составляющей скорости, обусловленные неточным заданием начальных условий $\Delta v_N^0, \Delta v_H^0, \Delta v_E^0, \Delta H^0, \Delta \varphi^0, \Delta \lambda^0$ интегрирования дифференциальных уравнений функционирования БИНС, носят гармонический (колебательный) характер с частотой $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$, а ошибки по долготе, высоте, вертикальной и восточной составляющим относительной скорости представляют собой композиции гармонических колебаний с частотой $\tilde{\mu} = \sqrt{-\rho_2}$ и экспоненциальных составляющих. Последние состоят из нарастающих во времени (так как $\beta_3 > 0$) компонент, содержащих множитель $C_3 e^{\beta_3 t}$, и затухающих во времени компонент, содержащих множитель $C_4 e^{-\beta_3 t}$. Таким образом, из (16) видно, что собственное движение устойчиво по переменным $\Delta \varphi$ и Δv_N , но неустойчиво по переменным $\Delta \lambda, \Delta H, \Delta v_H$ и Δv_E .

Получим решение неоднородного дифференциального матричного уравнения (9), которое состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это решение записывается следующим образом:

$$\Delta X(t) = P(t) \Delta X^0 + \int_0^t P(t - \tau) b(\tau) d\tau. \quad (23)$$



Здесь $\Delta X(t)$ — вектор-столбец, составленный из погрешностей определения проекций относительной скорости и криволинейных координат объекта; ΔX^0 — вектор-столбец, составленный из погрешностей задания начальных условий интегрирования. Векторы-столбцы $\Delta X(t)$ и ΔX^0 определены согласно соотношениям (21). Элементы матрицы P задаются соотношениями (22), а вектор-столбец b определён соотношением (8). Вместо вектора-столбца b можно также использовать вектор-столбец B , описываемый соотношением (2).

Первое слагаемое в правой части (23) определяет собой, как уже отмечалось, ошибки определения проекций относительной скорости и криволинейных координат местоположения объекта, обусловленные неточным заданием начальных координат и проекций скорости объекта, а второе слагаемое — ошибки определения этих величин, обусловленные неточным заданием начальной ориентации объекта в инерциальной системе координат.

Интеграл в правой части (23) может быть вычислен и выражен через элементарные функции, однако полученное аналитическое решение в этом случае приобретает громоздкий вид. Тем не менее выражения для ошибок определения северной составляющей относительной скорости и широты могут быть записаны достаточно компактно при условии $\mu_0 = 0$, т.е. когда в начальный момент времени оси геоцентрической системы координат η и инерциальной системы координат X^* совпадают. Эти выражения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta v_N(t) &= \cos(\tilde{\omega}t)\Delta v_N^0 - \sqrt{g^*R_1^*} \sin(\tilde{\omega}t)\Delta\varphi^0 + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{12} [-2\omega_N^* \sin(\omega_N^*t + \lambda_0^*) + (\tilde{\omega} + \omega_N^*) \sin(\tilde{\omega}t + \lambda_0^*) + (\tilde{\omega} - \omega_N^*) \sin(\tilde{\omega}t - \lambda_0^*)]}{2 [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]} + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{13} [2\omega_N^* \cos(\omega_N^*t + \lambda_0^*) + (\tilde{\omega} - \omega_N^*) \cos(\tilde{\omega}t - \lambda_0^*) - (\tilde{\omega} + \omega_N^*) \cos(\tilde{\omega}t + \lambda_0^*)]}{2 [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]}, \\ \Delta\varphi(t) &= \frac{\sin(\tilde{\omega}t)}{\sqrt{g^*R_1^*}}\Delta v_N^0 + \cos(\tilde{\omega}t)\Delta\varphi^0 + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{12} \{ \tilde{\omega} \cos \lambda_0^* [\cos(\omega_N^*t) - \cos(\tilde{\omega}t)] - \sin \lambda_0^* [\tilde{\omega} \sin(\omega_N^*t) - \omega_N^* \sin(\tilde{\omega}t)] \}}{\sqrt{g^*R_1^*} [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]} + \\ &+ \frac{a_H^*\lambda_{13} \{ \cos \lambda_0^* [\tilde{\omega} \sin(\omega_N^*t) - \omega_N^* \sin(\tilde{\omega}t)] + \tilde{\omega} \sin \lambda_0^* [\cos(\omega_N^*t) - \cos(\tilde{\omega}t)] \}}{\sqrt{g^*R_1^*} [\tilde{\omega}^2 - (\omega_N^*)^2]}, \end{aligned}$$

где λ_0^* — точное значение долготы объекта в начальный момент времени. Видно, что приведённые погрешности представляют собой композиции гармонических колебаний с частотами $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$ и $\omega_N^* = u + v_E^*/R_1^*$. При этом $\tilde{\omega}$ близка к частоте Шулера, а ω_N^* совпадает с угловой скоростью u суточного вращения Земли при $v_E^* = 0$ и близко к ней при $v_E^* > 0$.

Для проверки корректности полученного общего решения было получено численное решение $\Delta X^{\text{num}}(t)$ однородной линейной системы дифференциальных уравнений (10) для интервала времени $t \in [0, 7200]$ с] при следующих параметрах невозмущённого движения и начальных условиях:

$$\begin{aligned} v_E^* &= 600 \text{ м/с}, & H^* &= 10000 \text{ м}, & \Delta v_N^0 &= \Delta v_H^0 = \Delta v_E^0 = 0,01 \text{ м/с}, \\ \Delta H^0 &= 1 \text{ м}, & \Delta\varphi^0 &= \Delta\lambda^0 = 1,57 \cdot 10^{-7} \text{ рад} & & (1 \text{ м в линейной мере}). \end{aligned} \quad (24)$$

При этом использовался программный пакет MATLAB с максимально возможными настройками точности численного интегрирования.

Далее для тех же начальных условий и параметров невозмущённого движения для каждого момента времени с помощью формул (20)–(22) были вычислены погрешности $\Delta X^{\text{an}}(t)$ и найдена разность $\Delta X^{\text{num}} - \Delta X^{\text{an}}$. Таким образом, для каждого момента времени было получено расхождение между численным и аналитическим значением погрешности определения каждого из шести параметров навигации.

Описанные вычисления были также проведены для других параметров невозмущённого движения объекта, а именно: $v_E^* = 10 \text{ м/с}$, $H^* = 0$.



Аналогичная проверка была проведена для полного аналитического решения. Для этого численно интегрировались уравнения (9) и полученные результаты сравнивались с результатами вычисления погрешностей по соотношению (23), в котором интеграл в правой части был вычислен и представлен через элементарные функции.

Анализ полученных результатов показал, что погрешности, полученные с помощью аналитического решения, с высокой точностью совпадают с погрешностями, получаемыми с помощью численного интегрирования линейных уравнений ошибок. Максимальное расхождение между численным и аналитическим решениями проявляется при вычислении вертикальной составляющей относительной скорости Δv_H при условиях (24) и составляет $[\Delta v_H^{\text{num}} - \Delta v_H^{\text{an}}]_{t=7200} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ м/с. Расхождения при вычислении других погрешностей на 3–16 порядков меньше. Это даёт основания утверждать, что найденное решение является корректным и может быть использовано для аналитического нахождения погрешностей функционирования БИНС.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим движение объекта вдоль земного экватора на высоте $H^* = 10000$ м с постоянной скоростью $v_E^* = 600$ м/с. Таким объектом может быть, например, истребитель. Для этого объекта с помощью соотношений (17) найдём величины β_3 , $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\mu}$, а также определим периоды $T_{\tilde{\omega}}$ и $T_{\tilde{\mu}}$:

$$\beta_3 = 0,0017323 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\omega} = 0,0012354 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\mu} = 0,0012413 \text{ с}^{-1},$$

$$T_{\tilde{\omega}} = 2\pi/\tilde{\omega} \approx 5086 \text{ с} \approx 84,8 \text{ мин}, \quad T_{\tilde{\mu}} = 2\pi/\tilde{\mu} \approx 5062 \text{ с} \approx 84,6 \text{ мин}.$$

Видно, что оба периода близки к периоду Шулера, равному 84,4 мин.

Будем считать, что отсутствуют погрешности чувствительных элементов БИНС (гироскопов и акселерометров), а также погрешности начального задания ориентации объекта в инерциальной системе координат. В этом случае интеграл в правой части (23) обращается в нуль.

Рассмотрим три комбинации начальных условий интегрирования системы (10), представленные в табл. 1 (в табл. 1–3 для угловых величин без скобок приведено значение в радианах, в круглых скобках — в градусах, в квадратных скобках — соответствующее отклонение в линейной мере по дуге малого круга радиуса $R \cos \varphi^*$, где $R = \tilde{a} + H^* = 6388245$ м, $\varphi^* = 0$).

Таблица 1

Наборы начальных условий интегрирования системы (10)

№	Δv_N^0	Δv_H^0	Δv_E^0	ΔH^0 , м	$\Delta \varphi^0$, рад (°) [м]	$\Delta \lambda^0$, рад (°) [м]
I	0	0	0	1	0	0
II	0	0	0	0	$1,57 \cdot 10^{-7}$ ($8,97 \cdot 10^{-6}$) [1]	0
III	0	0	0	0	0	$1,57 \cdot 10^{-7}$ ($8,97 \cdot 10^{-6}$) [1]

Для приведённых комбинаций найдём, используя полученные выше соотношения, погрешности определения относительной скорости и координат объекта через 1 ч движения, а также амплитуды и начальные фазы гармонических колебаний (см. (18)). Полученные результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

Погрешности определения относительной скорости и координат истребителя

Параметр	I	II	III
$\Delta v_N(3600)$, м/с	0	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0
$a_{\Delta v_N}$, м/с	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	—
$\varepsilon_{\Delta v_N}$	—	0	—
$\Delta v_H(3600)$, м/с	0,45	0	-0,03



Окончание табл. 2

Параметр	I	II	III
$a_{\Delta v_H}$, м/с	$1,17 \cdot 10^{-5}$	—	$1,11 \cdot 10^{-4}$
$\varepsilon_{\Delta v_H}$	0	—	$\pi/2$
$\Delta v_E(3600)$, м/с	-0,03	0	$3,3 \cdot 10^{-3}$
$a_{\Delta v_E}$, м/с	$1,3 \cdot 10^{-4}$	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{\Delta v_E}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta H(3600)$, м	258	0	-16
$a_{\Delta H}$, м	$-9,4 \cdot 10^{-3}$	—	0,09
$\varepsilon_{\Delta H}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta \varphi(3600)$, рад (°) [м]	0	$-4,11 \cdot 10^{-8}$ $(-2,36 \cdot 10^{-6})$ [0,26]	0
$a_{\Delta \varphi}$, рад (°) [м]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(9 \cdot 10^{-6})$ [1]	—
$\varepsilon_{\Delta \varphi}$	—	$\pi/2$	—
$\Delta \lambda(3600)$, рад (°) [м]	$-5 \cdot 10^{-6}$ $(-2,98 \cdot 10^{-4})$ [33]	0	$2,91 \cdot 10^{-7}$ $(1,67 \cdot 10^{-5})$ [1,87]
$a_{\Delta \lambda}$, рад (°) [м]	$1,64 \cdot 10^{-8}$ $(9,42 \cdot 10^{-7})$ [0,11]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(8,92 \cdot 10^{-6})$ [0,99]
$\varepsilon_{\Delta \lambda}$	0	—	$\pi/2$

Также рассмотрим движение объекта вдоль экватора на нулевой (над уровнем моря) высоте со скоростью $v_E^* = 10$ м/с. Таким объектом может быть морской корабль. С помощью соотношений (17) найдём величины β_3 , $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\mu}$, а также определим периоды $T_{\tilde{\omega}}$ и $T_{\tilde{\mu}}$:

$$\beta_3 = 0,0017471 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\omega} = 0,0012383 \text{ с}^{-1}, \quad \tilde{\mu} = 0,0012412 \text{ с}^{-1},$$

$$T_{\tilde{\omega}} = 2\pi/\tilde{\omega} \approx 5074 \text{ с} \approx 84,6 \text{ мин}, \quad T_{\tilde{\mu}} = 2\pi/\tilde{\mu} \approx 5062 \text{ с} \approx 84,4 \text{ мин}.$$

По-прежнему считаем, что погрешности чувствительных элементов БИНС отсутствуют, а ориентация определяется идеально (т.е. отсутствуют погрешности гироскопов и погрешности начального задания ориентации). В этом случае интеграл в правой части (23) обращается в нуль.

Используя три описанные выше комбинации начальных условий, найдём для такого корабля погрешности определения относительной скорости и координат, а также амплитуды и начальные фазы гармонических колебаний (см. (18)). Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Погрешности определения относительной скорости и координат корабля

Параметр	I	II	III
$\Delta v_N(3600)$, м/с	0	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0
$a_{\Delta v_N}$, м/с	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$	—
$\varepsilon_{\Delta v_N}$	—	0	—
$\Delta v_H(3600)$, м/с	0,47	0	$-1,3 \cdot 10^{-3}$
$a_{\Delta v_H}$, м/с	$3,93 \cdot 10^{-6}$	—	$4,98 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon_{\Delta v_H}$	0	—	$\pi/2$
$\Delta v_E(3600)$, м/с	-0,03	0	$2 \cdot 10^{-3}$
$a_{\Delta v_E}$, м/с	$9,79 \cdot 10^{-5}$	—	$-1,2 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{\Delta v_E}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta H(3600)$, м	270	0	-7,72
$a_{\Delta H}$, м	$-3 \cdot 10^{-3}$	—	0,04



Окончание табл. 3

Параметр	I	II	III
$\varepsilon_{\Delta H}$	$\pi/2$	—	0
$\Delta\varphi(3600)$, рад (°) [м]	0	$-3,95 \cdot 10^{-8}$ $(-2,26 \cdot 10^{-6})$ [0,25]	0
$a_{\Delta\varphi}$, рад (°) [м]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(9 \cdot 10^{-6})$ [1]	—
$\varepsilon_{\Delta\varphi}$	—	$\pi/2$	—
$\Delta\lambda(3600)$, рад (°) [м]	$-2,42 \cdot 10^{-6}$ $(-1,39 \cdot 10^{-6})$ [15]	0	$3,04 \cdot 10^{-8}$ $(1,74 \cdot 10^{-6})$ [0,19]
$a_{\Delta\lambda}$, рад (°) [м]	$1,24 \cdot 10^{-8}$ $(7,08 \cdot 10^{-7})$ [0,08]	—	$1,57 \cdot 10^{-7}$ $(8,98 \cdot 10^{-6})$ [1]
$\varepsilon_{\Delta\lambda}$	0	—	$\pi/2$

Подчеркнём, что погрешности определения навигационных величин вычислены через 1 ч движения и могут быть меньше максимальных погрешностей, имеющих место внутри интервала движения, за счёт колебательных составляющих в этих погрешностях, имеющих периоды, близкие к периоду Шулера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено аналитическое решение линеаризованных дифференциальных уравнений ошибок БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат, описывающее влияние неточного задания начальных условий интегрирования дифференциальных уравнений БИНС (погрешностей начальной выставки БИНС) на точность определения навигационных параметров для случая движения объекта вдоль земного экватора с постоянной скоростью на постоянной высоте. При этом найдены точные явные выражения для корней характеристического уравнения.

Анализ построенного решения показывает, что ошибки по широте и северной составляющей скорости, обусловленные неточным заданием начальных условий $\Delta v_N^0, \Delta v_H^0, \Delta v_E^0, \Delta H^0, \Delta\varphi^0, \Delta\lambda^0$ интегрирования дифференциальных уравнений функционирования БИНС, носят гармонический (колебательный) характер с частотой $\tilde{\omega} = \sqrt{g^*/R_1^*}$, а ошибки по долготе, высоте, вертикальной и восточной составляющим относительной скорости представляют собой композиции гармонических колебаний с частотой $\tilde{\mu} = \sqrt{-\rho_2}$ и экспоненциальных составляющих. Последние состоят из нарастающих во времени (так как $\beta_3 > 0$) компонент, содержащих множитель $C_3 e^{\beta_3 t}$ и затухающих во времени компонент, содержащих множитель $C_4 e^{-\beta_3 t}$. Таким образом, из (16) видно, что собственное движение устойчиво по переменным $\Delta\varphi$ и Δv_N , но неустойчиво по переменным $\Delta\lambda, \Delta H, \Delta v_H$ и Δv_E .

Библиографический список

1. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Автономные системы. М. : Физматгиз, 1966. 579 с. [Andreev V. D. Theory of Inertial Navigation. Autonomous Systems. Moscow : Fizmatgiz, 1966. 579 p.]
2. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. М. : Наука, 1979. 296 с. [Bromberg P. V. Theory of Inertial Navigation Systems. Moscow : Nauka, 1979. 296 p.]
3. Захарин М. И. Кинематика инерциальных систем навигации. М. : Машиностроение, 1968. 236 с. [Zakharin M. I. Kinematics of Inertial Navigation Systems. Moscow : Mashinostroenie, 1968. 236 p.]
4. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твёрдого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : Физматлит, 2006. 512 с. [Chelnokov Yu. N. Quaternion and Bi-quaternion Models and Methods of Mechanics of Solid Bodies and Applications. Geometry and Kinematics of Motion. Moscow : Fizmatlit, 2006. 512 p.]
5. Челнокова Л. А., Челноков Ю. Н. Моделирование работы бесплатформенной инерциальной навигационной системы, определяющей ориентацию объекта в ортодромической и географической системах координат, на универсальных ЭВМ / Саратов. политехн. ин-т. Саратов.



тов, 1988. 21 с. Деп. в ВИНТИ 11.05.88, № 3763-В88. [Chelnokova L. A., Chelnokov Yu. N. Computer Modelling of the Strapdown INS, Which Determines the Orientation of an Object in the Orthodromic and Geographical Frames / Saratov Polytechnic Institute, 1988. 21 p.]

6. Челнокова Л. А., Челноков Ю. Н. Моделирование работы БИНС на универсальных ЭВМ / Саратов. политехн. ин-т. Саратов, 1989. 15 с. Деп. в ВИНТИ 13.06.89, № 3909-В89. [Chelnokova L. A., Chelnokov Yu. N. Computer Modelling of the Strapdown INS / Saratov Polytechnic Institute, 1989. 15 p.]

7. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные методы в задачах механики твёрдого тела и материальных систем : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М., 1987. 36 с. [Chelnokov Yu. N. Quaternion and Bi-quaternion Methods in the Problems of Solid Body Mechanics and Material Systems : Abstract of dissertation. Moscow, 1987. 36 p.]

8. Челноков Ю. Н., Петров С. В. О задачах ориентации и навигации объекта в географической и ортодромической системах координат. Деп. в ВИМИ 27.05.88, Д07701. 21 с. [Chelnokov Yu. N., Petrov S. V. On the Problems of Orientation and Navigation of an Object

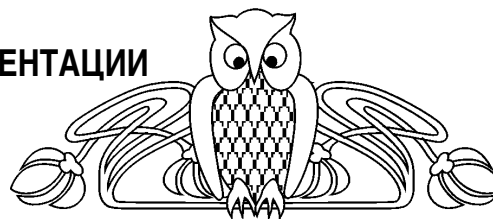
in Geographical and Orthodromic Frames. 1988. 21 p.] 9. Челноков Ю. Н., Челнокова Л. А., Ланденюк И. В. Алгоритм идеальной работы системы ориентации для подвижного объекта // Вопросы авиационной науки и техники : сб. тр. М., 1988. Вып. 10. С. 17–24. [Chelnokov Yu. N., Chelnokova L. A., Landenok I. V. Algorithm of Ideal Functioning of Orientation System for a Moving Object // Problems of Aviation. Moscow, 1988. Iss. 10. P. 17–24.]

10. Челноков Ю. Н. Инерциальная ориентация и навигация движущихся объектов : учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2002. 64 с. [Chelnokov Yu. N. Inertial Orientation and Navigation for Moving Objects : Study Guide. Saratov, 2002. 64 p.]

11. Челноков Ю. Н., Логинов М. Ю. Дифференциальные уравнения ошибок корректируемой БИНС, функционирующей в нормальной географической системе координат // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 64–72. [Chelnokov Yu. N., Loginov M. Yu. Differential Error Equation of a Corrected INS, Functioning in a Normal Geographical Frame // Mechatronics, Automation, Control. 2009. № 10. P. 64–72.]

УДК 629

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ



И. А. Панкратов, Я. Г. Сапунков, Ю. Н. Челноков

Саратовский государственный университет
E-mail: PankratovIA@info.sgu.ru, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

С помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионных уравнений решается задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Функционал, определяющий качество процесса управления, равен взвешенной сумме времени переориентации орбиты КА и импульса управления за время переориентации орбиты или затрат энергии. Сформулированы дифференциальные краевые задачи переориентации орбиты КА. Приведены законы оптимального управления, условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Построены примеры численного решения задачи.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион.

Solution of a Problem of Spacecraft's Orbit Optimal Reorientation Using Quaternion Equations of Orbital System of Coordinates Orientation

I. A. Pankratov, Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov

The problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit is solved with the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion equations. Control (thrust vector, orthogonal to the orbital plane) is limited in magnitude. Functional, which determines a quality of control process, is weighted sum of time and impulse (or square) of control. We have formulated a differential boundary problems of reorientation of spacecraft's orbit. Optimal control laws, transversality conditions, not containing Lagrange multipliers, examples of numerical solution of the problem are given.

Key words: spacecraft, orbit, optimal control, quaternion.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Будем считать, что вектор ускорения u от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления