Библиографический список

1. *Чандрасекхаран К.* Арифметические функции. М.: Наука, 1975. 272 с.
2. *Воронин С.И., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматгиз, 1994. 376 с.
3. *Кузнецов В.Н., Сецинская Е.В., Кривобок В.В.* О рядах Дирихле, определяющих целые функции первого порядка // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов, 2005. Вып. 3. С. 47–58.
4. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967. 239 с.
5. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 511 с.

УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ–ВИЛЕНКИНА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

О.А. Лукъяненко

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: olgalukyanenko@mail.ru

Пусть $\Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ есть пространства Лоренца, близкие к $L^\infty[0,1)^d$. В статье найдена функция $\tilde{\psi}$, для которой кратный ряд Фурье–Виленкина функции $f \in \Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ сходится к f по норме пространства Лоренца $\Lambda_{\tilde{\psi},p}[0,1)^d$.

Convergence of Multiple Vilenkin–Fourier Series in Lorentz Spaces

O.A. Lukyanenko

Let $\Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ be a near to $L^\infty[0,1)^d$ Lorentz space. We find the function $\tilde{\psi}$ for which the multiple Vilenkin–Fourier of any $f \in \Lambda_{\psi,p}[0,1)^d$ converge to f in the norm of Lorentz space $\Lambda_{\tilde{\psi},p}[0,1)^d$.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] были рассмотрены пространства Лоренца $\Lambda_{\Psi,q}$ измеримых на $[0,1]$ функций f, для которых конечна норма

$$||f||_{\Psi,q} = \left(\int\limits_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \qquad (p \geq 1),$$

и были получены теоремы о сходимости рядов Фурье–Уолша в этих пространствах в зависимости от свойств последовательности $\{n_k\}$, которую пробегают индексы n в частичных суммах $S_n(f)$.

В данной работе будем рассматривать аналогичные вопросы для кратных рядов Виленкина.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ — последовательность целых чисел $p_k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $m_0 = 1$, $m_k = m_{k-1}p_{k-1}$. Будем рассматривать функции Виленкина $V_n(t)$ [2], $n \in \mathbb{N}_0$ на отрезке $[0,1)$. Каждую точку $t \in [0,1)$ можно представить в виде $t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{m_{k+1}}$, $0 \leq t_k \leq p_k - 1$, $t_k \in \mathbb{N}_0$ (если исключить точки, для которых $t_k = p_k - 1$, при $k > k_0$, то это представление единственно).

Далее, если $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k m_k \quad (a_k = 0, 1, \ldots, p_k - 1,\ k \in \mathbb{N}_0)$ является p-ичным представлением числа $n \in \mathbb{N}_0$, функции Виленкина определяются следующим образом:

$$V_n(t) = \exp\bigl(\pi i \sum_{k=0}^{\infty} a_k t_k\bigr) \quad (t_k = 0, 1, \ldots, p_k - 1).$$

Если $\mathbf{n} = (n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(m)}) \in \mathbb{N}^m$ и $\mathbf{t} = (t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(m)}) \in [0,1)$, то кратная система Виленкина состоит из функций $V_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = V_{n^{(1)}}(t^{(1)}) V_{n^{(2)}}(t^{(2)}) \cdots V_{n^{(m)}}(t^{(m)})$.

Пусть $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k(t)$ — одномерное ядро Дирихле и $D_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \prod\limits_{i=0}^{m} D_{n^{(i)}}(t^{(i)})$ — m-мерное ядро

Дирихле. Константы Лебега в одномерном и m-мерном случае определяются соответственно

$$L_n = \int\limits_G |D_n(t)|\,dt, \qquad L_{\mathbf{n}} = \int\limits_G |D_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})|, d\mathbf{t}.$$

Мы определим также модифицированное ядро Дирихле $D_n^*(t) = V_{n^*}(t) D_n(t)$, где $n^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^* m_k$, $a_k^* = (p_k - a_k) \mod p_k$. По аналогии определяем m-мерное модифицированное ядро Дирихле $D_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{t}) = \prod\limits_{i=0}^{m} D_{n^{(i)}}^*(t^{(i)})$ и m-мерную модифицированную частичную сумму

$$S_{\mathbf{n}}^*(f, \mathbf{x}) = \int\limits_{G^m} f(\mathbf{t}) D_{\mathbf{n}}^*(\mathbf{x} \oplus \mathbf{t})\,d\mathbf{t}.$$

В работе автора было доказано [3], что для констант Лебега $L_n = \|D_n\|_1$ по системе Виленкина в случае, когда образующая последовательность $\{p_i\}$ ограничена числом p, имеет место неравенство

$$\frac{Var(n)}{p^2} \le L_n \le Var(n),$$

где $Var(n) = a_0^* + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left((a_k^* + a_{k-1}^*) \mod 2d_k\right) + \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^*(a_{k-1}^* - 1)$, $d_k = \max\{a_{k-1}^*, a_k^*\}$. В случае, когда $d_k = 0$, будем считать $(a_k^* + a_{k-1}^*) \mod 2d_k = (a_k^* + a_{k-1}^*)$. Если наравне с $Var(n)$ рассматривать числа

$$\underset{\{p_k\}}{Var}(n) = \frac{a_0^*}{p_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k^* + a_{k-1}^*) \mod 2d_k}{p_k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^*(a_{k-1}^* - 1)}{p_k^2},$$

то в случае, когда последовательность $\{p_k\}$ неограничена, для констант Лебега справедлива следующая оценка:

$$\underset{\{p_k\}}{Var}(n) \le L_n \le Var(n).$$

Пусть функция $\lambda_f(y) = \mu\{\mathbf{x} \in [0,1)^m : |f(\mathbf{x})| > y\}$, $y \ge 0$— есть функция распределения для $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in [0,1)^m$. Перестановка функции f определяется равенством $f^*(x) = \inf\{x : \lambda_f < x\}$. Отметим, что f^* определена не на промежутке $[0,1)^m$, а на $[0,1)$, и справедливо $\|f^*\|_q = \|f\|_q$.

Определение. *Функция Ψ называется функцией Лоренца если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $\Psi(t) \ge y_0 > 0$ на $(0,1)$, убывает на $(0,1)$ и выпукла; 2) $\lim\limits_{t\to 0} \Psi(t) = +\infty$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\Psi^q(t) t} < +\infty$, $(q \ge 1)$.*

Пространства Лоренца для функций многих переменных определяется как и в одномерном случае, а именно $\Lambda_{\Psi,q} = \left\{ f \in L_{[0,1)^m} : \|f\|_{\Psi,q} = \left(\int_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\Psi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}$.

В этой работе будем рассматривать пространства Лоренца, порожденные функцией Лоренца Ψ, удовлетворяющей дополнительному условию:

$$\exists\, C_p > 0, \quad \Psi\left(\frac{x}{p}\right) \le \left(1 + \frac{C_p}{1 + \log\frac{1}{x}}\right) \Psi(x), \qquad p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В работе [4] были определены пространства $\mathcal{L}_{p,\alpha}$ измеримых на $[0,1)$ функций f, для которых конечна норма

$$|||f|||_{\alpha,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_n}{n^{\alpha}} \right)^q \right)^{1/q} \qquad (\alpha > 0, q \ge 1).$$

С.А. Асташкин в своей работе [5] отметил, что пространства $\mathcal{L}_{q,\alpha}$ есть пространства Лоренца. Так же, как в работе [1], можно показать, что при выполнении условия (1) равенство

$$|||f|||_{\Psi,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|f\|_n}{\Psi(\frac{1}{2^n})} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

определяет в пространстве $\Lambda_{\Psi,q}([0,1)^m)$ норму, эквивалентную норме $||f||_{\Psi,q}$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Пусть* Ψ *является функцией Лоренца и удовлетворяет условию (1),* $s \in \mathbb{N}$, $j_0 \in [1, 2s-1]$. *Тогда при* $j \le 2s - j_0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{i=j}^{2s} \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}}\right) \ge \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}}\right) \frac{2s-j+1}{C_p+1} \left(\frac{j_0-1}{j_0}\right)^{C_p}.$$

Доказательство. Запишем сумму в виде

$$\sum_{i=j}^{2s} \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}}\right) \ge \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}}\right) \left(1 + \sum_{n=j+1}^{2s} \prod_{i=j+1}^{n} \left(1 + \frac{C_p}{1+\log 2^{2s-i}}\right)^{-1}\right).$$

Отдельно рассмотрим произведение

$$\prod_{i=j+1}^{n} \left(1 + \frac{C_p}{1+\log 2^{2s-i}}\right) \le \prod_{i=j+1}^{n} \left(1 + \frac{C_p}{2s-i}\right) = \exp\ln \prod_{i=j+1}^{n} \left(1 + \frac{C_p}{2s-i}\right) =$$

$$= \exp \sum_{i=j+1}^{n} \ln\left(1 + \frac{C_p}{2s-i}\right) \le \exp \sum_{i=j+1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2s-i}\right)^{C_p} \le \left(\frac{2s-j}{2s-n}\right)^{C_p}.$$

Таким образом, имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{i=j}^{2s} \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{i+1}}}\right) \ge \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}}\right) \left(1 + \sum_{n=j+1}^{2s} \left(\frac{2s-n}{2s-j}\right)^{C_p}\right) \ge$$

$$\ge \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}}\right) \left(1 + \frac{1}{(2s-j)^{C_p}} \int_0^{2s-j-1} x^{C_p}\, dx\right) =$$

$$= \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}}\right) \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2s-j}\right)^{C_p} \frac{2s-j-1}{C_p+1}\right) \ge \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}} \cdots p_{k_{j+1}}}\right) \left(\frac{j_0-1}{j_0}\right)^{C_p} \frac{2s-j-1}{C_p+1}.$$

Лемма 2. *Пусть* Ψ *является функцией Лоренца и удовлетворяет условию (1), тогда для функции*

$$\widetilde{\Psi}(x) = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{m-1} \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t}\, dt \ (0 < x < 1). \tag{3}$$

при $\left(0 \le x < \frac{1}{2}\right)$ *выполняется неравенство*

$$\widetilde{\Psi}\left(\frac{x}{p}\right) \le \left(1 + \frac{2\ln p}{\ln 2}\right)^{(m-1)} (1+C_p)^3 \widetilde{\Psi}(x).$$

Доказательство. Пусть $\frac{1}{p^{k+1}} < x \le \frac{1}{p^k}$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\frac{x}{p}}^1 \frac{\Psi(t)}{t}\, dt \le \int_{\frac{1}{p^{k+2}}}^1 \frac{\Psi(t)}{t}\, dt \le \sum_{j=k+2}^{1} \int_{\frac{1}{p^j}}^{\frac{1}{p^{j-1}}} \frac{\Psi(t)}{t}\, dt \le \sum_{j=k+2}^{1} \Psi\left(\frac{1}{p^j}\right) \ln p \le$$

$$\le (1+C_p) \sum_{j=k+1}^{0} \Psi\left(\frac{1}{p^j}\right) \ln p \le (1+C_p)^2 \sum_{j=k}^{0} \Psi\left(\frac{1}{p^j}\right) \ln p + (1+C_p)\ln p\Psi(1) \le$$

$$\le (1+C_p)^2 \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t}\, dt + (1+C_p)\ln p\Psi(1) \le (1+C_p)^3 \int_x^1 \frac{\Psi(t)}{t}\, dt.$$

Теперь рассмотрим отдельно

$$\ln\frac{p}{x} \le \ln p^{k+2} = \ln p^k + \ln p^2 \le \ln\frac{1}{x} + 2\ln p \le \ln\frac{1}{x}\left(1 + \frac{2\ln p}{\ln 2}\right).$$

Тогда окончательно получим

$$\widetilde{\Psi}\left(\frac{x}{p}\right) \le \left(1+\frac{2\ln p}{\ln 2}\right)^{(m-1)} (1+C_p)^3\widetilde{\Psi}(x). \qquad \square$$

Далее, через C_ν будем обозначать константы, которые, вообще говоря, разные, зависящие от функции Ψ и числа p.

Теорема 1. *Пусть функция Лоренца Ψ удовлетворяет условию (1). Тогда существует постоянная $C = C(\Psi, q) > 0$ такая, что $\forall f \in \Lambda_{\Psi,q}([0,1)^m)$ выполняется*

$$\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_{\widetilde{\Psi},q} \le C\|f\|_{\Psi,q},$$

где $\widetilde{\Psi}$ определяется равенством (3).

Доказательство. При любом $n \in \mathbb{N}$ для одномерных частичных сумм Фурье–Виленкина выполняется неравенство [2, с. 149]:

$$\mu\left\{t : |S_n(f)| > y\right\} \le \frac{C}{y}\int\limits_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t,$$

т.е. оператор $S_n(f)$ имеет слабый тип $(1,1)$. Кроме того, оператор $S_n(f)$ имеет сильный, а значит, и слабый тип $(2,2)$. Тогда, аналогично как и в [4], можем получить, что для одномерного случая имеет место неравенство:

$$\|S_n(f)\|_q \le Cq\|f\|_q \qquad (q \ge 2).$$

Частичную сумму $S_{n^{(1)}n^{(2)}\ldots n^{(m)}}(f) = S_{\mathbf{n}}(f)$ можно записать в виде

$$S_{n^{(1)}}(S_{n^{(2)}}\ldots S_{n^{(m)}}(f)) = S_{n^{(1)}}(S_{n^{(2)}}(\ldots S_{n^{(m)}}(f)\ldots)).$$

Следовательно, в m-мерном случае справедливо следующее неравенство:

$$\|S_{n^{(1)}\ldots n^{(m)}}(f)\|_q \le C^m q^m\|f\|_q.$$

Так же, как в работе [6], можно показать, что если функция Ψ удовлетворяет условию (1), то существует константа C_1 такая, что $\frac{1}{n^m}\widetilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^n}\right) \ge C_1\Psi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ (в [6] это неравенство было доказано при $m = 1$). Следовательно, получим

$$\|S_{\mathbf{n}}(f)\|^q_{\widetilde{\Psi},q} \le C_2|||S_{\mathbf{n}}(f)|||^q_{\widetilde{\Psi},q} = C_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\|S_{\mathbf{n}}(f)\|_k}{\widetilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right)^q \le C_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C^m k^m\|(f)\|_k}{\widetilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right)^q \le$$

$$\le C_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C_3\|(f)\|_k}{\Psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}\right)^q = C_4|||f|||^q_{\Psi,q} \le C(\Psi,q)\|f\|^q_{\Psi,q}. \quad \square$$

Оценка, полученная в теореме 1, является точной, по крайней мере, для функции $\Psi(x) = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^\gamma$.

Теорема 2. *Пусть $V_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ — функция Виленкина, порожденная последовательностью $\{p_k\}_{k=0}^\infty$, которая ограниченна числом p, и $S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{t})$ — кубические частичные суммы ряда Фурье–Виленкина, Ψ — функция Лоренца, которая при $0 < x \le \frac{1}{2}$ совпадает с функцией $\left(\ln\frac{1}{x}\right)^\gamma$. Тогда для любой функции $\alpha(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$, для которой $\widetilde{\Psi}\alpha$ есть функция Лоренца, отношение $\frac{\|S_{(\mathbf{n})}f\|_{\widetilde{\Psi}\alpha,q}}{\|f\|_{\Psi,q}}$ — неограниченно.*

Доказательство. 1. Проведем сначала доказательство для случая $m = 1$. Пусть числа n имеют вид $n = \sum\limits_{i=1}^{s}\big((p_{k_{2i-1}-1}-1)m_{k_{2i-1}-1}+(p_{k_{2i-1}-2}-1)m_{k_{2i-1}-2}+\cdots(p_{k_{2i}}-1)m_{k_{2i}}\big)$, где $k_1 > k_2 > \cdots > k_{2s}$.

Построим f как ступенчатую на $(0,1)$.

1) Если $x \in (0, \frac{1}{m_{k_1}}]$, то положим $f(x) = \lambda_1 = const$.

2) Если $x \in (\frac{1}{m_{k_2+1}}, \frac{1}{m_{k_2}}]$, то положим $f(x) = \lambda_2 = const$. Если $\frac{1}{m_{k_1}} \ne \frac{1}{m_{k_2+1}}$, то продолжим функцию f с $(0, \frac{1}{m_{k_1}}]$ на $(\frac{1}{m_{k_1}}, \frac{1}{m_{k_2+1}}]$ периодически с периодом $\frac{1}{m_{k_1}}$.

3) Пусть функция f уже построена на промежутке $(0, \frac{1}{m_{k_{j-1}}}]$. Построим ее на $(\frac{1}{m_{k_{j-1}}}, \frac{1}{m_{k_j}}]$. Для $x \in (\frac{1}{m_{k_{j+1}}}, \frac{1}{m_{k_j}}]$ положим $f_1(x) = \lambda_j = const$. Если $\frac{1}{m_{k_{j-1}}} \neq \frac{1}{m_{k_{j+1}}}$, то продолжим $f(x)$ с $(0, \frac{1}{m_{k_{j-1}}}]$ на $(\frac{1}{m_{k_{j-1}}}, \frac{1}{m_{k_{j+1}}}]$ периодически с периодом $\frac{1}{m_{k_{j-1}}}$.

4) Таким образом, построим функцию f на промежутке $(0, \frac{1}{m_{k_{2s}}}]$. Если $\frac{1}{m_{k_{2s}}} = 1$, то построение окончено. В противном случае продолжим $f(x)$ с промежутка $(0, \frac{1}{m_{k_{2s}}}]$ на промежуток $(\frac{1}{m_{k_{2s}}}, 1]$ периодически с периодом $\frac{1}{m_{k_{2s}}}$.

Будем считать, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_{2s}|$ и $\lambda_j = (-1)^{j+1}|\lambda_j|$. Рассмотрим множества $E_{j,i} = \left\{x \in (0, \frac{1}{m_{k_j}}] : |f(x)| = |\lambda_i|\right\}$, $j = 1, 2, \ldots, 2s$, $i = 1, 2, \ldots, j$, $E_j = \{x \in (0, 1] : |f(x)| = |\lambda_j|\}$, $j = 1, 2, \ldots, 2s$. Нетрудно проверить, что 1) $\mu E_{1,1} = \frac{1}{m_{k_1}}$, 2) $\mu E_{j,j} = \frac{p_{k_j}-1}{p_{k_j} m_{k_j}}$, $j = 2, \ldots, 2s$, 3) $\mu E_{j,1} = \frac{1}{p_{k_2}-1} E_{j,2}$, $j \geq 2$, 4) $\mu E_{j,i-1} = \frac{p_{k_{i-1}}-1}{(p_{k_i}-1)p_{k_{i-1}}} \mu E_{j,i}$, $j \geq 3, i = 3, \ldots, j$. Отсюда следует, что 1) $\mu E_1 = \dfrac{1}{p_{k_2} - 1} \mu E_2$, 2) $\mu E_j = \frac{p_{k_j}-1}{p_{k_{2s}} p_{k_{2s-1}} \cdots p_{k_j}}$, $j = 2, \ldots, 2s$.

Теперь оценим норму $\|f\|_{\Psi,q}$ сверху. Покажем, что $||f||_{\Psi,q} \leq C_5\, Var(n)$. Запишем норму $||f||^q_{\Psi,q}$ в виде

$$|f||^q_{\Psi,q} = \int\limits_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\Psi(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{j=1}^{2s} |\lambda_j|^q \int\limits_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{\mathrm{d}t}{\Psi^q(t) t},$$

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_j = \frac{1}{p_{k_{2s}} p_{k_{2s-1}} \cdots p_{k_{j+1}}}$, $j = 1, \ldots, 2s$.

Рассмотрим первое слагаемое. Обозначим через $a = p_{k_{2s}} p_{k_{2s-1}} \cdots p_{k_2}$, тогда

$$|\lambda_1|^q \int\limits_0^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{\Psi^q(t) t} = |\lambda_1|^q \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{ap^{k+1}}}^{\frac{1}{ap^k}} \frac{dt}{\Psi^q(t) t} \leq |\lambda_1|^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln p}{\Psi^q(\frac{1}{ap^k})} \leq$$

$$\leq \frac{|\lambda_1|^q \ln p}{\Psi^q(\frac{1}{a})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{k}{2s})^{\gamma q}} \leq |\lambda_1|^q \frac{2sC_6}{\Psi^q(\frac{1}{a})}.$$

Таким образом,

$$||f||^q_{\Psi,q} \leq |\lambda_1|^q \frac{2sC_6}{\Psi^q\left(\frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \cdots p_2}\right)} + \sum_{j=1}^{2s} \frac{|\lambda_j|^q \ln p}{\Psi^q\left(\frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \cdots p_{j+1}}\right)}.$$

Если положим $|\lambda_j| = \Psi\left(\frac{1}{p_{2s} p_{2s-1} \cdots p_{j+1}}\right)$, то $\|f\|^q_{\Psi,q} \leq C_5 2s$.

Теперь оценим норму $\|S^*_n(f)\|^q_{\widetilde{\Psi}\alpha,q}$ снизу. Сначала найдем оценку снизу для $|S^*_n(f, x)|$ на каждом множестве E_j. Так как n имеет p-ичное разложение (4), то для $S^*_n(f)$ в точке $x \in E_j, j = 1, 2, \ldots, 2s$ справедливо следующее:

$$S^*_n(f, x_1) = \int\limits_0^1 f(t) D^*_n(t \oplus x)\, dt = \int\limits_0^1 f(t \ominus x) D^*_n(t)\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_0^{\frac{1}{m_{k_i}}} f(t \ominus x) D^*_n(t)\, dt = \sum_{i=1}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t)\, dt,$$

где $\Delta_x^{(m_{k_i})}$ — это промежуток вида $[\frac{l}{m_{k_i}}, \frac{l+1}{m_{k_i}})$, $l = 0, 1, \ldots m_{k_i} - 1$,содержащий точку x. Функция $f(x) = \lambda_j$ на промежутке $\Delta_x^{(m_{k_i})}$ при $i < j$. Следовательно,

$$S^*_n(f, x) = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t)\, dt + \sum_{i=j}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t)\, dt = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (5)$$

Рассмотрим сумму Σ_1 в (5) отдельно. Имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+1}\lambda_j = \lambda_j \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+1}.$$

Отсюда

$$|\Sigma_1| \le |\lambda_j| = \Psi\left(\frac{1}{p_{2s}p_{2s-1}\cdots p_{j+1}}\right). \tag{6}$$

Теперь оценим сумму Σ_2. Выберем j_0 таким образом, чтобы

$$\Psi\left(\frac{1}{p_{2s}p_{2s-1}\cdots p_{j+1}}\right) \le \frac{p+1}{p}\Psi\left(\frac{1}{p_{2s}p_{2s-1}\cdots p_{j+2}}\right), \quad \forall\ j \le 2s - j_0.$$

Пусть $x \in E_j$ и $j \le 2s - j_0$. По построению функция f на промежутке $\Delta_x^{(m_{k_i})}$ есть сдвиг f с промежутка $\Delta_0^{(m_{k_i})}$. Тогда можем записать

$$\Sigma_2 = \sum_{i=j}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_{\Delta_x^{(m_{k_i})}} f(t)\,dt = \sum_{i=j}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_{\Delta_0^{(m_{k_i})}} f(t)\,dt =$$

$$= \sum_{i=j}^{2s-j_0} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_{\Delta_0^{(m_{k_i})}} f(t)\,dt + \sum_{i=2s-j_0+1}^{2s} (-1)^{i+1} m_{k_i} \int\limits_{\Delta_0^{(m_{k_i})}} f(t)\,dt =$$

$$= \sum_{i=j}^{2s-j_0} (-1)^{i+1} m_{k_i} \sum_{l=1}^{i} \int\limits_{E_{i,l}} f(t)\,dt + \sum_{i=2s-j_{0+1}} (-1)^{i+1} m_{k_i} \sum_{l=1}^{i} \int\limits_{E_{i,l}} f(t)\,dt = \Sigma_{21} + \Sigma_{22}. \tag{7}$$

Рассмотрим сумму Σ_{22}. Для внутренней суммы имеем

$$\sum_{l=1}^{i} \int\limits_{E_{i,l}} f(t)\,dt = \sum_{l=1}^{2s-j_0} \lambda_l \mu E_{i,l} + \sum_{l=2s-j_0+1}^{2s} \lambda_l \mu E_{i,l}. \tag{8}$$

В силу выбора j_0 последовательность $\{|\lambda_l|\mu E_{i,l}\}_{l=1}^{2s-j_0}$ является возрастающей. Кроме этого меру множества $E_{i,l}$ можем записать в виде $\mu E_{i,l} = \mu E_{i,i} \frac{1}{p_{k_l}\cdots p_{k_{i-1}}} \frac{p_{k_l}-1}{p_{k_i}-1}$, $i > l$. Поэтому окончательно получим

$$\left|\sum_{l=1}^{2s-j_0} \lambda_l \mu E_{i,l}\right| \le \frac{1}{2^{i-2s+j_0} m_{k_i}} \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{2s-j_0+1}}}\right). \tag{9}$$

Для второй суммы в (8) после некоторых преобразований получим

$$\left|\sum_{l=2s-j_0+1}^{i} \lambda_l \mu E_{i,l}\right| \le \frac{2}{m_{k_i}} \sum_{l=2s-j_0+1}^{2s} \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{l+1}}}\right). \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим

$$\left|\sum_{l=1}^{i} \lambda_l \mu E_{i,l}\right| \le \frac{1 + j_0 2^{i-2s+j_0+1}}{m_{k_i} 2^{i-2s+j_0}} \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{2s-j_0+1}}}\right).$$

Подставляя последнее неравенство в (7) для суммы Σ_{22}, получим

$$\Sigma_{22} \le \Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{2s-j_0+1}}}\right)(2j_0^2 + 1). \tag{11}$$

Оценим сумму Σ_{21} в равенстве (7). Во внутренней сумме числа $\{|\lambda_l|\mu E_{i,l}\}_{l=1}^{i}$ образуют возрастающую последовательность. Поэтому

$$\left|\sum_{l=1}^{i}\lambda_l\mu E_{i,l}\right|\geq|\lambda_i|\mu E_{i,i}-|\lambda_{i-1}|\mu E_{i,i-1}\geq\frac{1}{p^2}|\lambda_i|\frac{p_{k_i}-1}{p_{k_i}m_{k_i}},$$

$$\operatorname{sign}\left(\sum_{l=1}^{i}\lambda_l\mu E_{i,l}\right)=\operatorname{sign}\left(\lambda_i\mu E_{i,i}\right)=(-1)^{i+1}.$$

Отсюда

$$\Sigma_{21}=|\Sigma_{21}|\geq\frac{1}{2p^2}\sum_{i=j}^{2s-j_0}|\lambda_i|. \tag{12}$$

Объединяя полученные оценки (6),(11) и(12), получим при $x\in E_j$

$$|S_n^*(f,x)|\geq\frac{1}{2p^2}\sum_{i=j}^{2s}|\lambda_i|-|\lambda_j|-(2j_0^2+1)|\lambda_{2s-j_0}|-\frac{1}{2p^2}\sum_{i=1}^{j_0}\Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{2s-j_0+1+i}}}\right).$$

Выберем $j_1\geq j_0$, $j\leq 2s-j_1\leq 2s-j_0$. Пусть j_0 и j_1 удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{j_0+1}{C_p+1}\left(1-\frac{1}{j_0}\right)^{C_p}\geq 4p^2,\qquad\frac{j_1+1}{C_p+1}\left(1-\frac{1}{j_0}\right)^{C_p}\geq 16p^3.$$

Тогда учитывая лемму 1, при $j\leq 2s-j_1$, получим $|S_n^*(f,x)|\geq\dfrac{1}{8p^4}\displaystyle\sum_{i=j}^{2s}\Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{i+1}}}\right)$.

Пусть теперь $\alpha(x)\downarrow 0$ при $x\downarrow 0$. Оценим норму $\|S_n(f)\|_{\widetilde{\Psi}\alpha,q}$. Функция $\widetilde{\Psi}$ определена равенством (3) в котором $m=1$.

$$||S_n(f)||^q_{\widetilde{\Psi}\alpha,q}=\int\limits_0^1\left(\frac{|S_n^*(f,t)|}{\widetilde{\Psi}(t)\alpha(t)}\right)^q\frac{dt}{t}=\sum_{j=1}^{2s}\int\limits_{E_j}\geq\sum_{j=1}^{2s-j_1}\int\limits_{E_j}\geq$$

$$\geq\left(\frac{1}{8p^2}\right)^q\sum_{j=1}^{2s-j_1}\left(\sum_{i=j}^{2s}\Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{i+1}}}\right)\right)^q\int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j}\frac{1}{\widetilde{\Psi}^q(t)\alpha^q(t)}\frac{dt}{t}.$$

Заменяя $\widetilde{\Psi}(t)$ и $\alpha(t)$ наибольшим значением и используя Лемму 2 при $m=1$ получим,

$$||S_n(f)||^q_{\widetilde{\Psi}\alpha,q}\geq\left(\frac{1}{8p^2}\right)^q\sum_{j=1}^{2s-j_1}\left(\sum_{i=j}^{2s}\Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{i+1}}}\right)\right)^q\frac{\ln p_{k_{j+1}}}{\widetilde{\Psi}^q\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_j}}\right)\alpha^q\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{j+1}}}\right)}.$$

Применяя лемму 2, получим

$$||S_n(f_1)||^q_{\widetilde{\Psi}_1\alpha,q}\geq\left(\frac{1}{8p^2}\right)^q\sum_{j=1}^{2s-j_1}\left(\sum_{i=j}^{2s}\Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{i+1}}}\right)\right)^q\frac{(1+C_p)^3\ln p_{k_{j+1}}}{\widetilde{\Psi}^q\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{j+1}}}\right)}\alpha^q\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{j+1}}}\right). \tag{13}$$

Рассмотрим отдельно

$$\widetilde{\Psi}\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{i+1}}}\right)=\int\limits_{\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{j+1}}}}^{1}\frac{\Psi(t)}{t}\,dt=\sum_{i=j+1}^{2s-1}\int\limits_{\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_i}}}^{\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{i+1}}}}\frac{\Psi(t)}{t}\,dt+\int\limits_{\frac{1}{p_{k_{2s}}}}^{1}\frac{\Psi(t)}{t}\,dt\leq$$

$$\leq\sum_{i=j}^{2s}\Psi\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{i+1}}}\right)\ln p_{k_i}.$$

Подставляя последнее неравенство в (13) имеем

$$||S_n(f)||^q_{\tilde{\Psi}\alpha,q} \geq \mathrm{C}\sum_{j=1}^{2s-j_1}\frac{1}{\alpha^q\left(\frac{1}{p_{k_{2s}}\cdots p_{k_{j+1}}}\right)} \geq \mathrm{C}\sum_{j=1}^{2s-j_1}\frac{1}{\alpha^q\left(\frac{1}{2^{2s-j}}\right)}.$$

Отсюда с учетом оценки нормы $\|f\|_{\Psi,q}$ имеем

$$\frac{||S_n(f)||^q_{\tilde{\Psi}\alpha,q}}{||f||^q_{\Psi,q}} \geq C_4\frac{1}{2s}\sum_{j=1}^{2s-j_1}\frac{1}{\alpha^q\left(\frac{1}{2^{2s-j}}\right)} \to +\infty \tag{14}$$

при $2s \to +\infty$.

2. Теперь докажем теорему для произвольного $m > 1$. Обозначим $\Psi_1(x) = \Psi^{\frac{1}{m}}(x)$, $q_1 = mq$, $\alpha_1(x) = \alpha^{\frac{1}{m}}(x)$ и пусть f_1 — функция, построенная в первом пункте по функциям $\Psi_1(x)$, $\alpha_1(x)$ и числу q_1. $f(\mathbf{x}) = f_1(x^{(1)})f_1(x^{(2)})\cdots f_1(x^{(m)})$.

Сначала оценим сверху норму $||f||_{\Psi,q}$.

$$||f||^q_{\Psi,q} \leq C_7\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{||f||_i}{\Psi\left(\frac{1}{2^i}\right)}\right)^q = C_7\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{||f_1||_i^m}{\Psi\left(\frac{1}{2^i}\right)}\right)^q = C_7\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{||f_1||_i}{\Psi^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{2^i}\right)}\right)^{q_1} \leq C_8||f_1||^{q_1}_{\Psi^{\frac{1}{m}},q_1}.$$

Обозначим через $\Psi_1 = \Psi^{\frac{1}{m}}$. Рассмотрим

$$\tilde{\Psi}(x) = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{m-1}\int_x^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{m\gamma}d\ln\frac{1}{x} \leq \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{m(\gamma+1)} = \widetilde{\Psi_1}^m(x).$$

Теперь рассмотрим норму $||S_{\mathbf{n}}(f)||_{\tilde{\Psi}\alpha,q}$. Так как $||S_{\mathbf{n}}(f)||_i = ||S_n(f_1)||_i^m$, то

$$||S_{\mathbf{n}}(f)||^q_{\tilde{\Psi}\alpha,q} \geq C_9\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{||S_{\mathbf{n}}(f)||_i}{\tilde{\Psi}\left(\frac{1}{2^i}\right)\alpha\left(\frac{1}{2^i}\right)}\right)^q = C_9\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{||S_n(f_1)||_i^m}{\widetilde{\Psi}_1^m\left(\frac{1}{2^i}\right)\alpha_1\left(\frac{1}{2^i}\right)}\right)^q =$$

$$= C_9\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{||S_n(f_1)||_i}{\widetilde{\Psi}_1\left(\frac{1}{2^i}\right)\alpha_1\left(\frac{1}{2^i}\right)}\right)^{q_1} \geq C_{10}||S_n(f_1)||^{q_1}_{\widetilde{\Psi}_1\alpha_1,q_1}.$$

Окончательно, учитывая (14), получим

$$\frac{||S_{\mathbf{n}}(f)||^q_{\tilde{\Psi}\alpha,q}}{||f||^q_{\Psi,q}} \geq C_{11}\frac{|||S_n(f_1)|||^{q_1}_{\widetilde{\Psi}_1\alpha_1,q_1}}{||f_1||^{q_1}_{\Psi_1,q_1}} \to +\infty$$

и теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Lukomskii S.F* Convergence of Fourier series in Lorentz spaces // East J. on Aproximat. 2003. V. 9, № 2. P. 229–238.

2. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джаварли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонического анализа на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.

3. *Лукъяненко О.А.* О константах Лебега для системы Виленкина // Механика. Математика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 70.

4. *Лукомский С.Ф.* О сходимости рядов Фурье Уолша в пространствах, близких к L_∞ // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 6. С. 882–889.

5. *Асташкин С.В.* Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств // Мат. сборник. 2003. Т. 194, № 6. С. 26–42.

6. *Лукомский С.Ф.* О подпоследовательностях частичных сумм рядов Фурье–Уолша в пространствах Лоренца // Известия вузов. Математика. 2006. № 6. С.48–55.