



Библиографический список

1. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs // *Networks*. 1993. № 23. P. 135–142.
2. Абросимов М. Б. О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // *Мат. заметки*. 2010. Т. 88, № 5. С. 643–650.
3. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, 1997. 368 с.

Minimal Edge Extensions of Palm Trees

D. D. Komarov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, KomarovDD@gmail.com

Minimal edge extension of graphs can be regarded as a model of optimal edge fault tolerant implementation of a system. The problem of finding the minimal edge extensions of an arbitrary graph is NP-complete, that's why it is of interest to find classes of graphs for which it is possible to build a minimal edge extension analytically. This paper is about of the one-edge extensions of a graphs from a special class named palm trees. In this paper presents a kind of one-edge extension for some palm trees and the proof that it is minimal.

Key words: minimal extensions of graphs.

References

1. Harary F., Hayes J. P. Edge fault tolerance in graphs. *Networks*, 1993, no. 23, pp. 135–142.
2. Abrosimov M. B. Complexity of some problems associated with the extension of graphs. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, no. 5, pp. 643–650.
3. Bogomolov A. M., Saliy V. N. Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997, 368 p. (in Russian).

УДК 621.397.74

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ ИСКАЖЕНИЙ НА OFDM/QAM-СИГНАЛ

А. А. Львов¹, В. В. Киселёв²

¹Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматики и телемеханики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., alvova@mail.ru

²Кандидат технических наук, ассистент кафедры автоматики и телемеханики, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., kiva@live.ru

В работе рассмотрены математические модели каналов связи с помехами различного типа, их влияние на рабочие точки констелляционных диаграмм в системах с OFDM/QAM сигналами, даны рекомендации по мониторингу каналов.

Ключевые слова: качество канала, мониторинг, математические модели, помехи, констелляционная диаграмма.

Современные системы связи, включая системы и сети цифрового телерадиовещания, характеризуются передачей сжатых потоков информации в реальном времени. Для высокоскоростной передачи цифровых данных положительно зарекомендовала себя технология OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing — частотное уплотнение с ортогональными поднесущими) в тандеме с QAM-модуляцией (Quadrature Amplitude Modulation — квадратурно-амплитудная модуляция). Как и другие телекоммуникационные технологии, OFDM/QAM чувствительна к искажениям сигнала, что проявляется в увеличении частоты появления ошибочных битов (Bit Error Rate — BER). Следовательно, одной из важнейших задач, которые необходимо решать при проектировании подобных систем, является анализ степени и результатов воздействия искажений на передаваемый сигнал.

OFDM/QAM сигнал описывается уравнением [1]:

$$z(t) = \operatorname{Re} \left[\exp(2\pi jft) \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{h=H_{\min}}^{H_{\max}} (C_{r,s,h} \times \Psi_{r,s,h}(t)) \right], \quad (1)$$



$$\Psi_{r,s,h}(t) = \begin{cases} \exp(2\pi j h'(t - T_g - sT_s - NrT_s)/T_u) & \text{для } (s + Nr)T_s \leq t \leq (s + Nr + 1)T_s, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2)$$

$$h' = h - (H_{\max} + H_{\min})/2, \quad (3)$$

$$T_s = T_u + T_g, \quad (4)$$

где N — количество OFDM-символов в кадре передачи; h — номер поднесущей частоты; H_{\min} и H_{\max} — соответственно минимальное и максимальное значения поднесущей частоты (нижняя и верхняя границы); s — номер OFDM-символа, r — номер кадра передачи; T_g — длительность защитного интервала; T_u — длительность полезной части OFDM-символа; T_s — длительность OFDM-символа; f — опорная частота передатчика; $C_{r,s,h}$ — значение QAM-ячейки для поднесущей частоты h в символе s кадра r .

Сигнал $z^*(t)$ на входе приёмного устройства имеет вид [2]

$$z^*(t) = z(t) + n(t), \quad (5)$$

где $n(t)$ — функция, описывающая аддитивный сигнал помех и искажения в канале связи, на входе которого действует полезный сигнал $z(t)$.

Обратное преобразование даёт:

$$C_{r,s,h}^* = \exp(-2\pi j f t) \sum_{\tau=(s+Nr)T_s}^{(s+Nr+1)T_s} (z^*(\tau) \times [\Psi_{r,s,h}(\tau)]^{-1}), \quad (6)$$

где $C_{r,s,h}^*$ в общем виде можно представить:

$$C_{r,s,h}^* = C_{r,s,h} + n_{r,s,h}, \quad (7)$$

где $n_{r,s,h}$ — составляющая $n(t)$, накладываемая на $C_{r,s,h}$ в символе s частотной поднесущей h кадра r после преобразования (6).

Так как $C_{r,s,h}^*$ является комплексным числом, то его вещественную и мнимую части в (7) удобно представить в виде матрицы компонентов:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{C_{r,s,h}^*\} \\ \operatorname{Im}\{C_{r,s,h}^*\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{C_{r,s,h}\} \\ \operatorname{Im}\{C_{r,s,h}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{n_{r,s,h}\} \\ \operatorname{Im}\{n_{r,s,h}\} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

В работе [3] на основе (1), (6) и (8) получена матрица линейного преобразования QAM-сигнала в OFDM-канале с аддитивным гауссовым шумом:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{C_{r,s,h}^*\} \\ \operatorname{Im}\{C_{r,s,h}^*\} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{offset} & -\sin \theta_{offset} \\ \sin \theta_{offset} & \cos \theta_{offset} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} k_E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{C_{r,s,h}\} \\ \operatorname{Im}\{C_{r,s,h}\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \cos \phi \\ A \sin \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{n_h\} \\ \operatorname{Im}\{n_h\} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где K — коэффициент ослабления (затухания) сигнала; θ_i — угол поворота модуляционного созвездия (конstellационной диаграммы) (дрожание фазы), являющийся случайной переменной с гауссовым распределением с нулевым средним значением и дисперсией σ_i^2 ($\theta_i \sim N(0, \sigma_i^2)$); θ_{offset} — угол вращения модуляционного созвездия вокруг своей оси (фазовый сдвиг); k_E — коэффициент усиления для вещественного канала относительно мнимого (несогласованность амплитуд); k_S — угол отклонения от ортогональности вещественной и мнимой компонентов канала (квадратурная ошибка); A и ϕ — соответственно амплитуда и фаза ложного сигнала (интерференция); n_h — аддитивный гауссов шум на частотной поднесущей h .

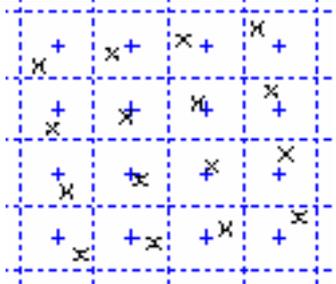
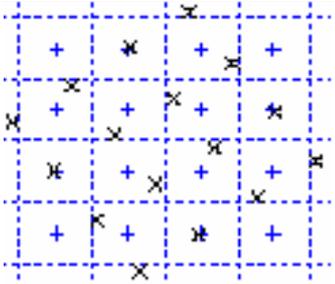
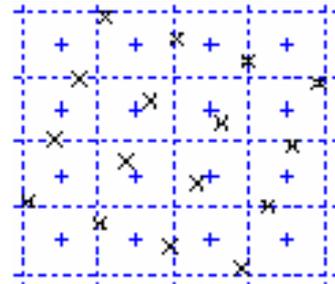
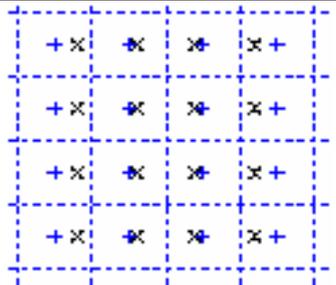
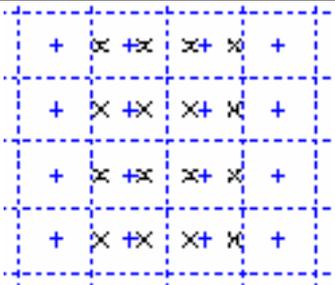
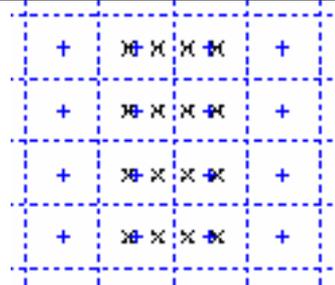
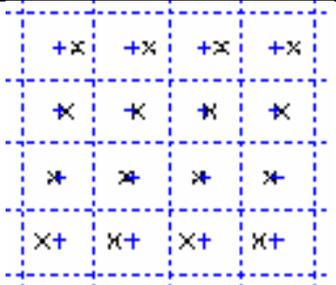
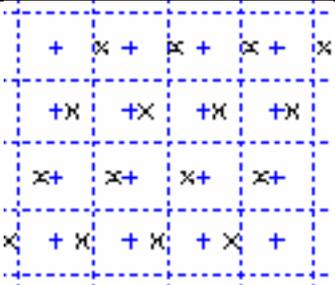
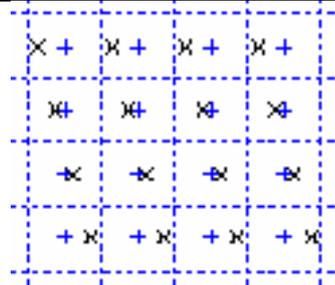
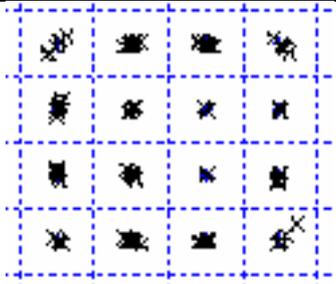
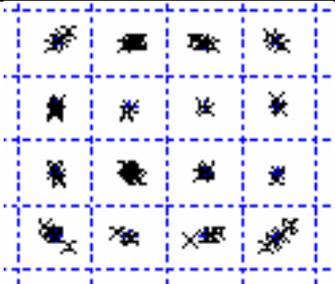
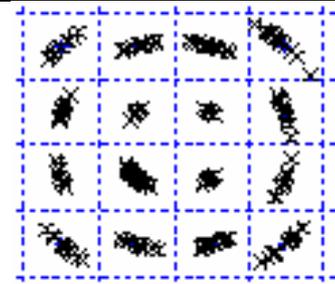
В таблице представлены модуляционные созвездия для 16-QAM, полученные путём численного моделирования на основе уравнения (9).



Аппроксимируя (9) на случай малых углов фазы, когда $\sin \theta_{offset} \approx \theta_{offset}$ и $\cos \theta_{offset} \approx 1$, без учёта дрожания фазы, и рассматривая эффекты, вызванные различными видами помех как некоррелированные, получим следующие математические ожидания компонентов $C_{r,s,h}^*$:

$$\begin{aligned}
 M \left[\operatorname{Re} \{ C_{r,s,h}^* \} \right] &= M \left[K k_E \operatorname{Re} \{ C_{r,s,h} \} - K (k_E k_S - \theta_{offset}) \operatorname{Im} \{ C_{r,s,h} \} \right], \\
 M \left[\operatorname{Im} \{ C_{r,s,h}^* \} \right] &= M \left[K k_E \theta_{offset} \operatorname{Re} \{ C_{r,s,h} \} - K (k_E k_S - \theta_{offset} + 1) \operatorname{Im} \{ C_{r,s,h} \} \right].
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Примеры искажений конstellационной диаграммы для 16-QAM

Искажения	Модуляционные созвездия		
Фазовый сдвиг	 $\theta_{offset} = 0.1884$	 $\theta_{offset} = 0.6280$	 $\theta_{offset} = 1.2246$
Несоогласованность амплитуд	 $k_E = 0.80$	 $k_E = 0.60$	 $k_E = 0.40$
Квадратурная ошибка	 $k_S = 0.16$	 $k_S = 0.42$	 $k_S = -0.24$
Дрожание фазы	 $\sigma_i^2 = 0.042$	 $\sigma_i^2 = 0.064$	 $\sigma_i^2 = 0.100$



Окончание таблицы

Искажения	Модуляционные созвездия		
Интерференционные искажения	<p>$A = 0.5, \phi = 0.5652$</p>	<p>$A = 0.5, \phi = 0.3332$</p>	<p>$A = 0.9, \phi = 0.5652$</p>
Гауссов шум	<p>$n_h = 0.20$</p>	<p>$n_h = 0.34$</p>	<p>$n_h = 0.64$</p>
Ослабление	<p>$K = 0.83$</p>	<p>$K = 0.72$</p>	<p>$K = 0.47$</p>

Примечание. Маркер «+» — сигнал без наложенных искажений; маркер «x» — тот же сигнал, но с внесёнными искажениями; штриховые линии ограничивают области безошибочного распознавания символов сигнала; углы $\theta_i, \theta_{offset}, k_S$ и ϕ — в радианах; коэффициенты K, k_E, A и n_h нормированы.

Анализируя множество принятых символов $C_{r,s,h}^*$, за время передачи кадра NT_s можно оценить параметры K, k_E, k_S и θ_{offset} .

Дисперсия дрожания фазы σ_i^2 определяется из выражения ковариации вещественной и мнимой частей принятого символа $C_{r,s,h}^*$:

$$Cov[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}, \text{Im}\{C_{r,s,h}^*\}] = -K^2 k_E \sigma_i^2 (\text{Re}\{C_{r,s,h}\} \text{Im}\{C_{r,s,h}\} + [\text{Re}\{C_{r,s,h}\}]^2 k_S). \quad (11)$$

Амплитуда A интерферирующего сигнала находится вычислением момента 4-го порядка $m_4[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]$ и квадрата дисперсии $D[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]$:

$$A = \sqrt[4]{8D[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]^2 - \frac{8}{3}m_4[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}]}. \quad (12)$$

Влияние гауссова шума можно оценить, вычислив дисперсию вещественной и мнимой составляющих $C_{r,s,h}^*$:

$$D[\text{Re}\{C_{r,s,h}^*\}] = K^2[\text{Im}\{C_{r,s,h}\}]^2 \sigma_i^2 + D[\text{Re}\{n_h\}] + \frac{A^2}{2},$$



$$D[\text{Im}\{C_{r,s,h}^*\}] = K^2 ([\text{Re}\{C_{r,s,h}\}]^2 + k_S^2 [\text{Im}\{C_{r,s,h}\}]^2 + 2k_S \text{Re}\{C_{r,s,h}\} \text{Im}\{C_{r,s,h}\}) \times \\ \times k_E^2 \sigma_i^2 + D[\text{Im}\{n_h\}] + \frac{A^2}{2}. \quad (13)$$

Проведена верификация (10)–(13) при воздействии на сигнал одного (диаграммы на рис. 1) и одновременном действии двух (рис. 2) типов искажений и аддитивного гауссова шума при различном соотношении сигнал/шум.

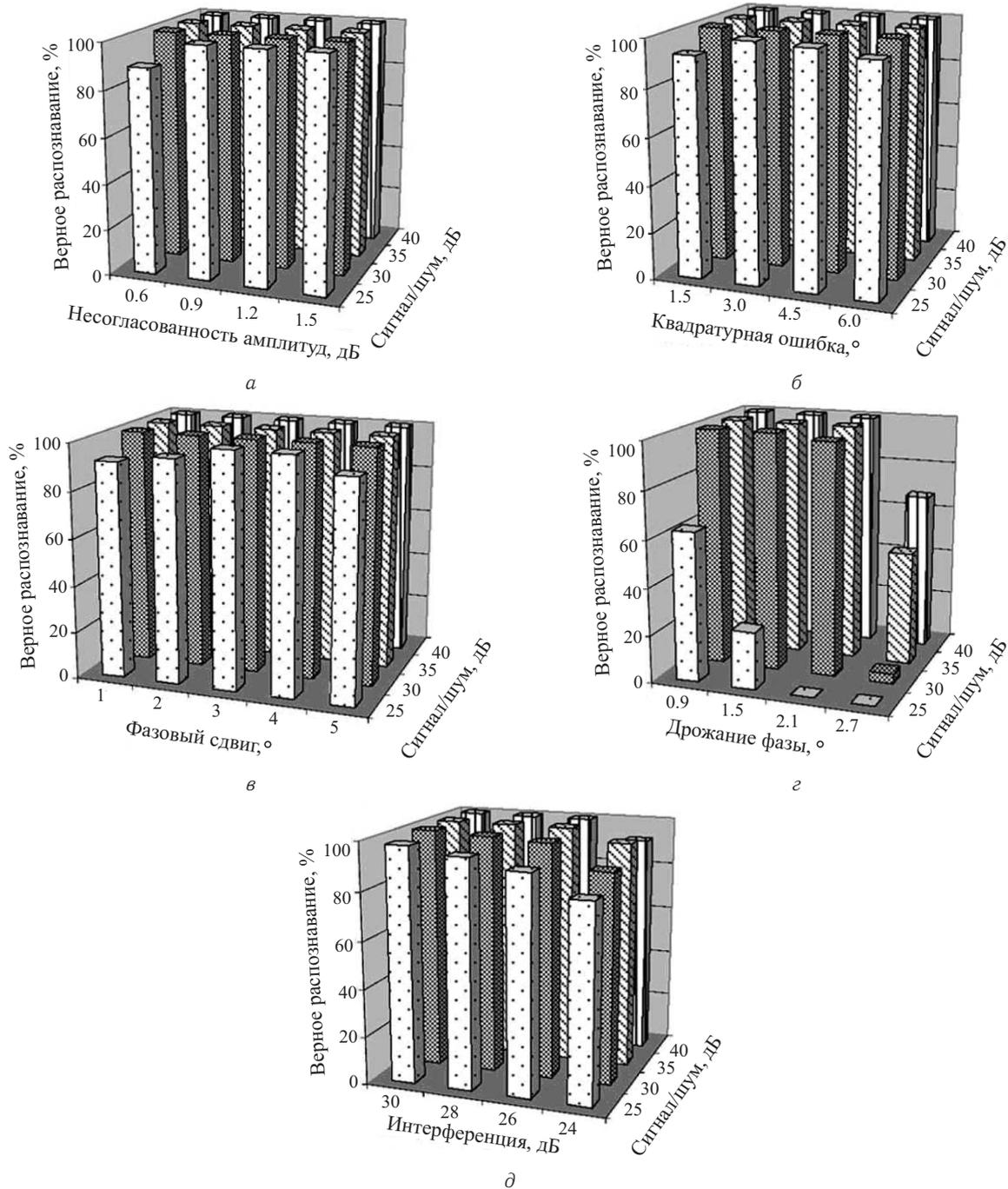


Рис. 1. Результаты моделирования при действии на сигнал одного типа искажений: а — несогласованность амплитуд; б — квадратурная ошибка; в — интерференционные искажения; г — фазовый сдвиг; д — дрожание фазы

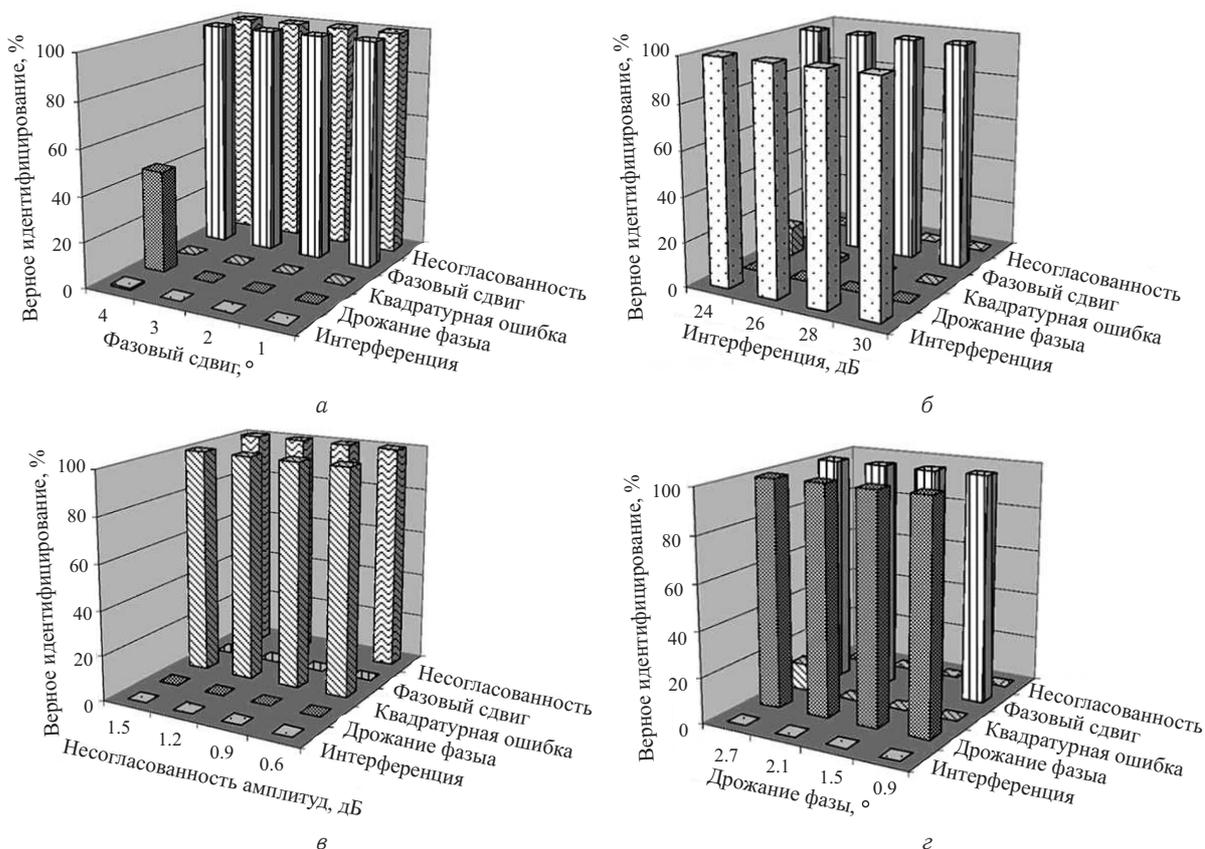


Рис. 2. Результаты моделирования при действии на сигнал двух типов искажений: *а* — несогласованность амплитуд 1.2дБ и сдвиг фазы 0° – 4° ; *б* — сдвиг фазы 3° и интерференционные искажения 24–30 дБ; *в* — квадратурная ошибка 3° и несогласованность амплитуд 0.6–1.5 дБ; *г* — сдвиг фазы 1.5° и дрожание фазы 0.9° – 2.7°

Были сгенерированы группы из 200 сигналов для каждого значения помехи и величины шума, а также пары искажений различной величины. Каждая диаграмма получена на основе 1500 тестов. Результаты первого моделирования представлены в виде диаграмм процентов правильного распознавания символов: сколько раз символ правильно идентифицирован при наличии помехи, а остальные определены как отсутствующие. Видно, что для каждого типа искажений в подавляющем большинстве случаев получены высокие результаты идентификации. Низкие результаты получены лишь при значительном уровне помех и малой величине отношения сигнал/шум: причина кроется в том, что некоторые символы модуляционного созвездия попали за область (ячейку) их верного распознавания.

Результаты второго моделирования получены при фиксированном значении одной помехи и изменении величины другой и представлены в виде диаграмм процентов правильной идентификации при паре искажений. В результатах также преобладает высокий процент верной идентификации. Колонки с низким значением процентов идентификации относятся к искажениям, которые не были добавлены: причина, как и в предыдущем случае, в том, что наблюдаемые символы вытеснились за границы ячеек верного распознавания.

Таким образом, с помощью соотношений (10)–(13), полученных из математической модели (1), возможно производить анализ степени воздействия типовых искажений на исходный OFDM/QAM-сигнал, а также выявлять эти самые искажения в уже принятом сигнале, что позволит в последующем осуществлять коррекцию принятого сигнала с целью повышения достоверности и скорости передачи информации.

Библиографический список

1. Киселёв В. В., Светлов М. С. Математическая модель канала передачи данных системы цифрового телерадиовещания // Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ ТКИ-50) : сб. тр. междунар. науч. конф. / Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов, 2009. С. 250–252.



2. Киселёв В. В., Львов А. А., Светлов М. С. Особенности моделирования одночастотных сетей цифрового телерадиовещания стандарта DVB-T // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2010. № 4(51). С. 145–150.

3. Киселёв В. В., Львов А. А., Светлов М. С., Мухамбетжанов А. С. Мониторинг каналов в системах с OFDM/QAM сигналами // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2010. № 4(50). С. 13–17.

Numerical Modelling and the Analysis of Impact of Distortions on OFDM/QAM-signal

A. A. Lvov, V. V. Kiselev

Saratov State Technical University, Russia, 410054, Saratov, Politekhnikeskaya st., 77, alvova@mail.ru, kiva@live.ru

In this work mathematical models of communication channels with various interferences, their influence on constellation diagrams' points in systems with OFDM/QAM signals are considered, recommendations about channel monitoring are made.

Key words: communication channel quality, monitoring, mathematic models, interferences, constellation diagram.

Библиографический список

1. Kiselev V. V., Svetlov M. S. Mathematical model of a data link of system of digital TV and radio broadcasting. *Collection of works of the international scientific conference ATM TKI-50*, Saratov, 2009, pp. 250–252 (in Russian).
2. Kiselev V. V., Lvov A. A., Svetlov M. S. Features of modeling of single-frequency networks of digital TV and radio broadcasting of the DVB-T standard. *Vestnik*

Saratov. Gos. Tekhn. Univ., 2010, no. 4(51), pp. 145–150 (in Russian).

3. Kiselev V. V., Lvov A. A., Svetlov M. S., Mukhambetzhano A. S. Monitoring of channels in systems with OFDM/QAM signals. *Vestnik Saratov. Gos. Tekhn. Univ.*, 2010, № 4(50), pp. 13–17 (in Russian).