Для доказательства надо заметить, что $\ln(\mu_n/\lambda_n) = \ln(r_n/(r_n - q_n)) = O(r_n/(r_n - q_n)) = O(\psi(n)\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Автор выражает благодарность С. С. Волосивцу за постановку задачи и ценные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00097-а) *и гранта Президента РФ* (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Голубов Б. И. Ефимов А. В. Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М. : Наука, 1987. 344 с. [*Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A.* Walsh Series and Transforms : Theory and Applications. Moscow : Nauka, 1987. 344 p.]

2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. М. : ГИТТЛ, 1956. Т. 5. С. 483–522. [*Bari N. K., Stechkin S. B.* Best approximations and differential properties of two conjugate functions // Trudy Moskov. Mat. Obshch. 1956. Vol. 5. P. 483–522.]

3. *Das G., Ghosh T., Ray B. K.* Degree of approximation of functions by their Fourier series in the generalized Hölder metric // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 1996. Vol. 106, № 2. P. 139–153.

4. *Iofina T. V., Volosivets S. S.* On the degree of approximation by means of Fourier–Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approximations. 2009. Vol. 15, № 2. P. 143-158.

5. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с. [*Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinshtein A. I.* Multiplicative Systems of Functions and Harmonic Analysis on Zero-Dimensional Groups. Baku : Elm, 1981. 180 p.]

6. *Agnew R. P.* On deferred Cesaro means // Ann. Math. 1932. Vol. 33, № 2. P. 413–421.

УДК 517.51

СХОДИМОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ–ХААРА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ $L^{p(x,y)}$

М. Г. Магомед-Касумов

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Махачкала
E-mail: rasuldev@gmail.com

В статье доказывается сходимость прямоугольных частичных сумм Фурье по ортогональной системе Хаара в пространствах Лебега с переменным показателем.

Ключевые слова: двумерная система Хаара, пространство Лебега с переменным показателем, условие Дини–Липшица, сходимость, прямоугольные частичные суммы.

Convergence of Fourier–Haar Rectangular Sums in Lebesgue Spaces with Variable Exponent $L^{p(x,y)}$

M. G. Magomed-Kasumov

Convergence of Fourier–Haar rectangular partial sums in Lebesgue spaces with variable exponent is proved in this paper.

Key words: two-dimensional Haar system, Lebesgue spaces with variable exponent, Dini–Lipschitz condition, convergence, rectangular partial sums.

ВВЕДЕНИЕ

Пространства Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}(E)$ в последние годы вызывают усиливающийся интерес у специалистов из самых различных областей. Систематическое исследование топологии указанных пространств впервые было дано в работе И. И. Шарапудинова [1]. В частности, в ней было показано, что если $1 \le p(x) \le \overline{p}(E) < \infty$, то топология пространства $L^{p(x)}_\mu(E)$ нормируема и одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для $f \in L^{p(x)}_\mu(E)$

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} \mu(dx) \le 1\}.$$

В другой работе [2] того же автора был рассмотрен вопрос о базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}(0,1)$, где было показано, что система Хаара является базисом в $L^{p(x)}(0,1)$ тогда и только тогда, когда переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица:

$$|p(x)-p(y)|\left|\ln\frac{1}{|x-y|}\right|\le c.$$

В настоящей работе этот результат переносится на случай двух переменных.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Через D_{NM} будем обозначать $N{\cdot}M$-мерное пространство кусочно-постоянных функций, определенных на квадрате $E=[0,1]^2$, вида

$$D_{NM}=\left\{f(x,y)=c_{ij},\ (x,y)\in\left(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right)\times\left(\frac{j-1}{M},\frac{j}{M}\right),\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}\right\}.$$

Значения на сторонах и в вершинах прямоугольников $\left(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right)\times\left(\frac{j-1}{M},\frac{j}{M}\right)$ будем считать равными среднему арифметическому значений функции в прилегающих прямоугольниках.

Как известно [3], функции Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяются на отрезке [0,1] следующим образом:

$$\chi_1(x)=1,\qquad \chi_n(x)=\begin{cases}0, & x\notin\overline{\Delta}_n,\\ 2^{k/2}, & x\in\Delta_n^+,\\ -2^{k/2}, & x\in\Delta_n^-,\end{cases}$$

где $n=2^k+i$, $k=0,1,\ldots$, $i=1,\ldots,2^k$, а Δ_n — это двоичный интервал вида $\Delta_n=\Delta_k^i=\left(\frac{i-1}{2^k},\frac{i}{2^k}\right)$, $\overline{\Delta}_n$ — замыкание интервала Δ_n, а Δ_n^+, Δ_n^- — соответственно правая и левая половины интервала Δ_n.

Двумерные функции Хаара определим на квадрате $E=[0,1]^2$ с помощью равенств:

$$\chi_{nm}(x,y)=\chi_n(x)\chi_m(y),\qquad (x,y)\in E,\qquad n=2^k+i,\qquad m=2^l+j.$$

Значения на сторонах и в вершинах четырех прямоугольников $\Delta_n^{\pm}\times\Delta_m^{\pm},\Delta_n^{\pm}\times\Delta_m^{\mp}$ определим так, чтобы функции $\chi_{nm}(x,y)\in D_{2^{k+1},2^{l+1}}$.

Ставится задача об исследовании сходимости прямоугольных частичных сумм:

$$S_{NM}(f,x,y)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}c_{nm}\chi_{nm}(x,y),\quad c_{nm}=\iint\limits_{[0,1]^2}f(x,y)\chi_{nm}(x,y)\,dx\,dy,$$

в метрике пространства $L^{p(x,y)}(E)$, определяемой следующей нормой:

$$\|f\|_{p(\cdot)}=\inf\{\alpha>0:\int_0^1\int_0^1\left|\frac{f(x,y)}{\alpha}\right|^{p(x,y)}dx\,dy\le 1\}.$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Через λ_{N1}, $\lambda_{N2},\ldots,\lambda_{NN}$ будем обозначать интервалы постоянства системы функций $\chi_1(x),\ldots,\chi_N(x)$ [4, с. 17]. Если $N=2^k+i$, то

$$|\lambda_{Ns}|=\begin{cases}1/2^{k+1}, & 1\le s\le 2i,\\ 1/2^k, & 2i+1\le s\le N.\end{cases}$$

Как известно [4, с. 21], для одномерных частичных сумм Фурье–Хаара справедлива формула

$$S_N(f,x)=\frac{1}{|\lambda_{Ns}|}\int\limits_{\lambda_{Ns}}f(t)dt,\quad x\in\lambda_{Ns}.$$

Используя эту формулу, совершенно элементарно можно вывести аналогичное представление и для двумерного случая:

$$S_{NM}(f,x,y) = \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \int\limits_{\lambda_{Ns}} \int\limits_{\lambda_{Mq}} f(u,v)\,du\,dv, \qquad (x,y) \in \lambda_{Ns} \times \lambda_{Mq}. \tag{1}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если $N = 2^k,\ M = 2^l$, то линейная оболочка функций $\{\chi_{nm}\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ совпадает с D_{NM}, т. е.*

$$G_{2^k,2^l} := \left\{ f(x,y) \,\middle|\, f(x,y) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=1}^{2^l} a_{nm}\chi_{nm}(x,y) \right\} = D_{2^k,2^l}.$$

Доказательство. Из определения функций Хаара следует, что $G_{2^k,2^l} \subset D_{2^k,2^l}$. Так как $\{\chi_{nm}\}_{n=1,m=1}^{N,M}$ — линейно независимая система, то размерность $G_{2^k,2^l}$ не меньше $2^k \cdot 2^l$. $\square$

Лемма, приведенная в работе [2] для отрезка $[0,1]$, непосредственно переносится и на случай квадрата $E = [0,1]^2$ (здесь и далее $\overline{f}(E) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x)$).

Лемма. *Пусть $p(x,y)$ и $q(x,y)$ — функции, заданные на E и такие, что $1 \le p(x,y) \le q(x,y) \le \le \overline{q}(E) < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L^{q(x,y)}(E)$ имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) \le r_{p,q}\|f\|_{q(\cdot)}(E),$$

где $r_{p,q} \le 2$.

В дальнейшем нам также понадобится следующее неравенство, доказательство которого имеется, например, в [5, с. 182].

Утверждение 2. *Пусть на некотором множестве D задана интегрируемая функция $p(x) > 0$, причем $\int\limits_D p(x)\,dx = 1$. Пусть на D задана также функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi''(x) > 0$. Тогда для любой интегрируемой функции $f(x)$ справедливо неравенство*

$$\varphi\left(\int\limits_D f(x)p(x)\,dx\right) \le \int\limits_D \varphi(f)p(x)\,dx.$$

В частности, для любого $\gamma \ge 1$

$$\left|\int f(x)p(x)\,dx\right|^\gamma \le \left(\int |f(x)|p(x)\,dx\right)^\gamma \le \int |f(x)|^\gamma p(x)\,dx.$$

Прежде чем перейти к основному результату, приведем определения модуля непрерывности и условия Дини–Липшица для случая функций двух переменных.

Модуль непрерывности для функции $p(x,y)$, заданной на множестве E, определяется следующим образом:

$$\omega(p,E,\delta) = \sup\{|p(A) - p(B)| :\ A,B \in E,\ \rho(A,B) \le \delta\}.$$

Говорят, что функция $p(x,y)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица порядка $\alpha \ge 0$, если

$$\omega(p,E,\delta)\Big(\ln\frac{1}{\delta}\Big)^\alpha \le c \qquad (0 < \delta \le 1),$$

где $c = c(E,p,\alpha)$, $\alpha \ge 0$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. *Для того чтобы для любой функции $f \in L^{p(x,y)}(E)$ прямоугольные частичные суммы*

$$S_{NM}(f,x,y) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} c_{nm}\chi_{nm}(x,y)$$

сходились в пространстве $L^{p(x,y)}$ к функции $f(x,y)$ при $N, M \to \infty (N \asymp M)$, необходимо и достаточно, чтобы показатель $p(x,y)$ удовлетворял условию Дини–Липшица порядка $\alpha \geq 1$.

Доказательство. *Достаточность.* Как известно [6, с. 215], для сходимости последовательности линейных операторов $S_{NM}(f)$ к тождественному оператору $I(f) = f$ достаточно выполнения следующих условий:

1) линейные операторы $S_{NM}(f)$ равномерно ограничены на единичном шаре $\|f\|_p \leq 1$ пространства $L^{p(x,y)}(E)$, т. е.

$$\sup_{N,M} \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|S_{NM}(f)\|_p < \infty; \tag{2}$$

2) $S_{NM}(f) \to I(f)$ для любого $f \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ всюду плотно в $L^{p(x,y)}(E)$.

Условие 2) следует из утверждения 1 и того факта, что множество $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} D_{2^k, 2^l}$ всюду плотно в $L^{p(x,y)}(E)$.

Покажем равномерную ограниченность. Пусть $f \in L^{p(x,y)}(E)$ и

$$\|f\|_p \leq 1. \tag{3}$$

Обозначим через $M_{sq} = (x_s, y_q)$ точку минимума функции $p(x,y)$ на $\overline{\lambda_{Ns} \times \lambda_{Mq}}$, где $\overline{G}$ означает замыкание множества G. Тогда в силу (1) имеем:

$$\mathfrak{I} = \int_0^1 \int_0^1 |S_{NM}(f,x,y)|^{p(x,y)}\, dx\, dy = \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} \int_{\lambda_{Ns}} \int_{\lambda_{Mq}} |S_{NM}(f,x,y)|^{p(x,y)}\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} \int_{\lambda_{Ns}} \int_{\lambda_{Mq}} \underbrace{\left| \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \int_{\lambda_{Ns}} \int_{\lambda_{Mq}} f(u,v)\, du\, dv \right|}_{\mathfrak{I}_{sq}}^{p(x,y) - p(M_{sq}) + p(M_{sq})} dx\, dy =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \sum_{q=1}^{M} \int_{\lambda_{Ns}} \int_{\lambda_{Mq}} |\mathfrak{I}_{sq}|^{p(x,y) - p(M_{sq}) + p(M_{sq})}\, dx\, dy. \tag{4}$$

Применяя лемму и неравенство (3), выводим следующее соотношение

$$|\mathfrak{I}_{sq}|^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq \Big(\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \Big(\int_{\lambda_{Ns}} \int_{\lambda_{Mq}} |f(u,v)| du dv \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq$$

$$\leq \Big(\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \cdot C_0 \cdot \|f\|_p^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq C_0 \Big(\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})}.$$

Так как $p(x,y)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, то при $\alpha \geq 1$ получим:

$$\Big(\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq \Big(\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{\frac{C}{\ln \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{Ns}|^2 + |\lambda_{Mq}|^2}}}}.$$

Из того, что $N \asymp M$, следует

$$C_1 |\lambda_{Mq}| \leq |\lambda_{Ns}| \leq C_2 |\lambda_{Mq}|, \quad 0 < C_1 \leq C_2.$$

Тогда

$$|\mathfrak{I}_{sq}|^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq C_0 \Big(\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|} \Big)^{p(x,y)-p(M_{sq})} \leq$$

$$\leq C_0 \Big(\frac{1}{C_1 |\lambda_{Mq}|^2} \Big)^{\frac{C}{\ln \frac{1}{|\lambda_{Mq}| \sqrt{C_2^2 + 1}}}} = C_0 \Big(\frac{1}{\widetilde{C_1} |\lambda_{Mq}|} \Big)^{\frac{2C}{\ln \frac{1}{\widetilde{C_2} |\lambda_{Mq}|}}} = O(1).$$

Для $|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(M_{sq})}$ с помощью утверждения 2 получим

$$|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(M_{sq})} = \Big|\frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|}\int\limits_{\lambda_{Ns}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} f(u,v)dudv\Big|^{p(M_{sq})} \le \frac{1}{|\lambda_{Ns}||\lambda_{Mq}|}\int\limits_{\lambda_{Ns}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} |f(u,v)|^{p(M_{sq})}dudv.$$

Используя соотношения, полученные для $|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(u,v)-p(M_{sq})}$ и $|\mathfrak{J}_{sq}|^{p(M_{sq})}$, из (4) имеем

$$\mathfrak{J} = O(1)\sum_{s=1}^{N}\sum_{q=1}^{M}\int\limits_{\lambda_{Ns}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} |f(u,v)|^{p(M_{sq})}dudv. \qquad (5)$$

Обозначим через $h(u,v)$ такую ступенчатую функцию, что $h(u,v) = p(M_{sq})$ при $(u,v) \in \lambda_{Ns} \times \lambda_{Mq}$. Поскольку $h(u,v) \le p(u,v)$, то из (3) и (5) с помощью леммы находим

$$\mathfrak{J} = O(1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f(u,v)|^{h(u,v)}\,du\,dv = O(1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\frac{f(u,v)}{\|f\|_h}\right|^{h(u,v)}\cdot\|f\|_h^{h(u,v)}\,du\,dv \le$$

$$\le O(1)\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\frac{f(u,v)}{\|f\|_h}\right|^{h(u,v)}\cdot 2^{h(u,v)}\|f\|_p^{h(u,v)}\,du\,dv \le$$

$$\le O(1)\cdot 2^{\overline{p}}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left|\frac{f(u,v)}{\|f\|_h}\right|^{h(u,v)}\,du\,dv = O(1)\cdot 2^{\overline{p}}. \qquad (6)$$

Неравенство (6) эквивалентно неравенству (2).

Необходимость. Покажем, что в классе функций, удовлетворяющих условию Дини–Липшица порядка $0 < \alpha < 1$, найдется такая функция $\widetilde{p}_\alpha(u,v)$, что для некоторой $\widetilde{f} \in L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}$ прямоугольные частичные суммы не будут сходиться к этой функции. Для этого обобщим функции $p_\alpha(t)$ и $f(t)$, приведенные в работе [2, доказательство теоремы 1], на случай двух переменных следующим образом:

$$\widetilde{p}_\alpha(u,v) = p_\alpha(u), \qquad (u,v) \in E, \qquad (7)$$

$$\widetilde{f}(u,v) = f(u), \qquad (u,v) \in E. \qquad (8)$$

Легко убедиться, что $\widetilde{p}_\alpha(u,v)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица порядка α. Далее, так как $\int\limits_0^1 |f(u)|^{p_\alpha(u)}\,dt < \infty$ (см. [2, доказательство теоремы 1]) и

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |\widetilde{f}(u,v)|^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}\,du\,dv = \int\limits_0^1 |f(u)|^{p_\alpha(u)}\,du\cdot\int\limits_0^1 dv = \int\limits_0^1 |f(u)|^{p_\alpha(u)}\,du,$$

то $\widetilde{f} \in L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}$.

Покажем теперь, что прямоугольные частичные суммы Фурье–Хаара функции $\widetilde{f}$ не ограничены в топологии пространства $L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}(E)$. Рассмотрим подпоследовательность $S_{2^{2n+1},M}(\widetilde{f})$. В силу (1),(7) и (8) имеем при $(u,v) \in \lambda_{2^{2n+1},s} \times \lambda_{Mq}$

$$S_{2^{2n+1},M}(\widetilde{f},u,v) = 2^{2n+1}\frac{1}{|\lambda_{Mq}|}\int\limits_{\lambda_{2^{2n+1},s}}\int\limits_{\lambda_{Mq}} \widetilde{f}(u,v)\,du\,dv = 2^{2n+1}\int\limits_{\lambda_{2^{2n+1},s}} f(u)\,du. \qquad (9)$$

Последнее выражение в равенствах (9) представляет собой значение на интервале $\lambda_{2^{2n+1},s}$ одномерной частичной суммы Фурье–Хаара $Q_{2^{2n+1}}(f,u)$ для функции f. Повторяя далее рассуждения, проведенные в работе [2, доказательство теоремы 1], придем к соотношению

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |S_{2^{2n+1},M}(\widetilde{f},u,v)|^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}\,du\,dv \to \infty \qquad (n\to\infty),$$

а это и означает, что прямоугольные частичные суммы $S_{NM}(\widetilde{f})$ не сходятся в пространстве $L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}(E)$ к функции $\widetilde{f}$. $\square$

Автор благодарит И. И. Шарапудинова за постановку задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632. [*Sharapudinov I. I.* Topology of the space $L^{p(x)}([0,1])$ // Math. Notes. 1979. Vol. 26, № 4. P. 796—806.]

2. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283. [*Sharapudinov I. I.* On the basis property of the Haar system in the space $L^{p(x)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean // Math. USSR Sb. 1986. Vol. 58, № 1. P. 279–287.]

3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с. [*Kashin B. S., Saakyan A. A.* Orthogonal series. Moscow : AFC, 1999. 560 p.]

4. *Соболь И. М.* Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. М. : Наука, 1969. 288 с. [*Sobol I. M.* Multidimensional quadratic Haar formulas and functions. Moscow : Nauka, 1969. 288 p.]

5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 456 с. [*Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. Cambridge : University Press, 1934. 329 p.]

6. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М. : Наука, 1967. 416 с. [*Vulih B. Z.* Introduction to functional analysis. Moscow : Nauka, 1967. 416 p.]

УДК 517.51

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ БИРКГОФА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ

В. В. Новиков

Саратовский государственный университет
E-mail: vvnovikov@yandex.ru

В терминах обобщенной упорядоченной Λ-вариации получено достаточное условие равномерной сходимости на всей числовой прямой интерполяционного процесса Лагранжа и (0,2,3)-интерполяционного процесса Биркгофа.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, интерполяция Биркгофа, лакунарная интерполяция, упорядоченная Λ-вариация.

On Birkhoff Interpolation of Functions of Ordered Λ-bounded Variation

V. V. Novikov

A sufficient condition for the uniform convergence of Lagrange and (0,2,3) Birkhoff interpolation on the whole real line is obtained. The condition is in terms of ordered Λ-bounded variation.

Key words: Lagrange interpolation, Birkhoff interpolation, lacunary interpolation, ordered Λ-variation.

ВВЕДЕНИЕ

Определение 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_k} = +\infty$. Говорят, что f есть *функция ограниченной* Λ*–вариации* (обозначение: $f \in \Lambda BV$), если

$$\sup_{\Pi} \sum_{k} \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем системам Π непересекающихся интервалов вида

$$I_k := (t_{2k-1}, t_{2k}) \subset [-\pi, \pi], \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Определение 2. Функция f называется *функцией ограниченной упорядоченной* Λ*–вариации* (обозначение: $f \in O\Lambda BV$), если выполнено (1), причем супремум берется по всевозможным системам неналегающих интервалов (2) таких, что $I_k < I_{k+1}, k = 1, 2, \dots$, или $I_k > I_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ (запись $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ означает, что I_k расположен левее, соответственно правее, чем I_{k+1}).

При $\Lambda = \{k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующие классы обозначаются HBV и $OHBV$ (*гармоническая вариация*).

