НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.95

МОРФИЗМЫ ПО СТАБИЛЬНЫМ ТОЛЕРАНТНОСТЯМ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

И.П. Мангушева

Саратовский государственный университет,
кафедра теоретических основ информатики и информационных технологий
E-mail: MangushevaIP@info.sgu.ru

В работе предлагается метод построения по некоторой тройке толерантностей на множествах состояний, входных и выходных символов конечного детерминированного автомата другого автомата, связанного определенным морфизмом с исходным.
Рассматриваемые построения обобщают известный метод нахождения гомоморфных образов автомата по тройке эквивалентностей, удовлетворяющей определенным условиям.

Ключевые слова: конечный детерминированный автомат, гомоморфный образ, конгруэнция, стабильная толерантность, толерантный образ, разбиение, покрытие.

Morphismes Based on Compatible Tolerances of Finite Automata

I.P. Mangusheva

It is suggested a method of a construction with the help of some triple of tolerances defined on the sets of states, input and output symbols of an finite definite automaton an another automaton which is connected with the original automaton by a certain morphism.
Considered construction generalizes the known method of finding of the homomorphic images of an automaton with the help of a triple of equivalences, which satisfies to the certain conditions.

Key words: finite determined automaton, homomorphic image, congruence, compatible tolerances, tolerant image, partition, covering.

1. СТАБИЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В АВТОМАТАХ

Пусть S — непустое множество. Любое подмножество $\rho \subseteq S \times S$, где $S \times S$ — декартов квадрат множества S, называется *бинарным отношением* на множестве S. Бинарное отношение ρ на множестве S называется:
рефлексивным, если

$$(\forall s \in S)((s, s) \in \rho), \tag{1}$$

симметричным, если

$$(\forall s_1, s_2 \in S)((s_1, s_2) \in \rho \to (s_2, s_1) \in \rho), \tag{2}$$

транзитивным, если

$$(\forall s_1, s_2, s_3 \in S)((s_1, s_2) \in \rho \ \& \ (s_2, s_3) \in \rho \to (s_1, s_3) \in \rho). \tag{3}$$

Бинарное отношение, обладающее свойствами (1),(2) и (3) одновременно, называется *отношением эквивалентности* и обычно обозначается через ε. Если отношение обладает свойствами (1) и (2), то оно называется *отношением толерантности* и обычно обозначается через τ.

Бинарное отношение $\rho \subseteq S \times S$ называется *антисимметричным*, если

$$(\forall s_1, s_2 \in S)((s_1, s_2) \in \rho \ \& \ (s_2, s_1) \in \rho \to s_1 = s_2).$$

© И.П. Мангушева, 2008

Отношение ρ на множестве S называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Отношение порядка на произвольном множестве S обычно обозначается знаком $\leq$.

Если S — непустое множество, а $\leq$ — отношение порядка на нем, то пара $(S, \leq)$ называется *упорядоченным* (или частично упорядоченным) множеством. Упорядоченное множество $(S, \leq)$ называется *решеткой*, если каждое его конечное подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани [1].

Дальнейшие исследования связаны с отношением толерантности, поэтому приведем некоторые определения и результаты из [1, 2], касающиеся этого отношения.

Множество S с заданным на нем отношением толерантности τ называется *пространством толерантности* и обозначается $\langle S, \tau \rangle$.

Покрытием множества S называется совокупность непустых подмножеств этого множества, объединение которых совпадает с S.

Разбиением множества S называется совокупность непустых, попарно непересекающихся подмножеств множества S, объединение которых совпадает с S.

Известно [1, 2], что с каждым отношением эквивалентности ε на произвольном множестве S взаимно однозначным образом связано некоторое разбиение множества S, причем классы эквивалентности совпадают с классами разбиения. Поэтому часто понятия эквивалентности и разбиения отождествляют, если это не приводит к недоразумениям. *Фактор-множеством* множества S по эквивалентности (разбиению) ε называется множество S/ε, элементами которого являются классы эквивалентности (разбиения) ε. Класс, содержащий элемент s из множества S, обозначают s_ε или $(s)_\varepsilon$.

Множество $L \subseteq S$ называется *предклассом* в $\langle S, \tau \rangle$ (или τ-предклассом), если любые два его элемента s и t толерантны (т.е. находятся в отношении τ).

Множество $B \subseteq S$ называется *классом толерантности* в $\langle S, \tau \rangle$ (или τ-классом), если B есть максимальный предкласс. Множество всех классов толерантности образуют покрытие базового множества. Далее покрытие множества S всеми классами толерантности τ будем обозначать B_τ.

Совокупность $H_\tau = \{B_1, B_2, \ldots\}$ классов в пространстве толерантности $\langle S, \tau \rangle$ называется *базисом*, если 1) для всякой толерантной пары (s, t) существует класс B_k, содержащий оба этих элемента; 2) удаление из H_τ хотя бы одного класса приводит к потере свойства 1).

В общем случае базис H_τ определяется неоднозначно. Но если отношение τ на S помимо рефлексивности и симметричности обладает свойством транзитивности, то толерантность τ переходит в эквивалентность. При этом базис в $\langle S, \tau \rangle$ является разбиением и, следовательно, определяется единственным образом.

В дальнейших рассуждениях предполагаем, что множество S не пусто и конечно.

Утверждение 1 [1]. *Пусть τ — отношение толерантности на множестве S. Тогда для любых двух элементов, находящихся в отношении τ, существует по крайней мере один содержащий их τ-класс.*

Следствие. *Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — всевозможные классы толерантности τ. Тогда* $\tau = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (B_i, \times B_i)$.

На основе утверждения 1 легко доказать

Утверждение 2. *Если B_τ — покрытие множества S всеми классами отношения толерантности τ на S, то $(s, t) \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует класс покрытия B_τ, содержащий s и t.*

Доказательство. Необходимость следует из утверждения 1, достаточность — из определения класса толерантности.

Утверждение 3 (о пополнении предкласса) [2]. *Всякий предкласс содержится хотя бы в одном классе.*

Утверждение 4. *Если τ_1 и τ_2 — отношения толерантности на множестве S, то $\tau_1 \subseteq \tau_2$ тогда и только тогда, когда каждый класс толерантности τ_1 включается в некоторый класс толерантности τ_2.*

Доказательство. Необходимость. Если $\tau_1 \subseteq \tau_2$, то каждый τ_1-класс B_i является одновременно τ_2-предклассом. Тогда в силу утверждения 3 существует класс C_j в $\langle S, \tau_2 \rangle$, содержащий B_i.

Достаточность. Если $B_i - \tau_1$-класс, а $C_j - \tau_2$-класс, то из условия $B_i \subseteq C_j$ следует $B_i \times B_i \subseteq C_j \times C_j$. Отсюда, по определению операции $\subseteq$, следует $\bigcup_i (B_i \times B_i) \subseteq \bigcup_j (C_j \times C_j)$, а тогда включение $\tau_1 \subseteq \tau_2$ выполняется на основе следствия из утверждения 1.

Через $E(S)$ обозначается множество всех эквивалентностей на произвольном множестве S.

Через $T(S)$ будем обозначать множество всех толерантностей произвольного множества S. В [3] показано, что $T(S)$ есть решетка по включению относительно операций объединения и пересечения. Отношение включения в решетке $T(S)$ будем обозначать $\subseteq$.

Рассмотрим конечный детерминированный автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y — конечные алфавиты состояний, входных и выходных символов соответственно, $\delta : S \times X \to S$ — функция переходов, $\lambda : S \times X \to Y$ — функция выходов [1, 4].

Отношение μ на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ назовем *стабильным* [3], если

$$(\forall s_1, s_2 \in S)(\forall x \in X)((s_1, s_2) \in \mu \to (\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \mu). \tag{4}$$

Особый интерес представляют отношения эквивалентности ε и толерантности τ, обладающие свойством стабильности. Они называются соответственно конгруэнциями и стабильными толерантностями. Такие отношения имеют простую интерпретацию и могут быть использованы для построения контролирующих автоматов. С эквивалентностью ε однозначно связано разбиение множества $B_\varepsilon = \{B_i\}$, где B_i — классы разбиения B_ε. Если ε является конгруэнцией, то

$$(\forall B_i \in B_\varepsilon)(\forall x \in X)(\exists B_j \in B_\varepsilon)(\forall s \in B_i)(\delta(s, x) \in B_j),$$

или

$$(\forall B_i)(\forall x \in X)(\exists B_j)(\{\delta(s, x)\}_{s \in B_i} \subseteq B_j). \tag{5}$$

Это означает, что функция переходов под действием любого входного сигнала переводит все элементы класса разбиения целиком в другой класс. В [5] разбиения, обладающие таким свойством, называются СП-разбиениями или разбиениями со свойством подстановки.

Аналогичным образом с толерантностью τ на множестве связывается покрытие, также обладающее свойством (5).

Утверждение 5. *Толерантность τ является стабильной толерантностью на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ тогда и только тогда, когда для ее покрытия классами $B_\tau = \{B_i\}$ выполняется условие* (5).

Доказательство. Необходимость. Пусть для толерантности τ выполняется (4). Рассмотрим класс толерантности B_i. По определению, все элементы s в нем попарно толерантны. В силу (4) для любого $x \in X$ попарно толерантными являются тогда все элементы $\delta(s, x)$ для $s \in B_i$. Это означает, что множество $\{\delta(s, x)\}_{s \in B_i}$ является предклассом толерантности τ. Но тогда в силу утверждения 3 существует некоторый класс B_j, содержащий это множество. Это означает, что выполняется (5).

Достаточность. Пусть для покрытия классами $B_\tau = \{B_i\}$ некоторой толерантности τ на множестве S автомата A выполняется (5). Рассмотрим произвольную пару $(s_1, s_2) \in \tau$. В силу утверждения 1, существует класс B_i, содержащий s_1 и s_2. Тогда из (5) следует, что для любого x существует класс B_j, содержащий $\delta(s_1, x)$ и $\delta(s_2, x)$. Отсюда в силу утверждения 2 следует, что $(\delta(s_1, x), \delta(s_2, x)) \in \tau$. Тем самым показано, что выполняется (4).

Толерантность τ на множестве S называется 2-*порожденной* и обозначается τ_{s_1, s_2}, если она является наименьшей стабильной толерантностью, содержащей некоторую наперед выбранную неупорядоченную пару s_1, s_2, $s_1 \neq s_2$, $s_1, s_2 \in S$. Пара (s_1, s_2) при этом называется характеристической парой толерантности τ.

В [6] показано, что множество $ST(A)$ стабильных толерантностей автомата A образует решетку относительно операций пересечения и объединения. Эта решетка является порешеткой решетки всех толерантностей на множестве S. Там же описана процедура нахождения стабильных толерантностей автомата A. Она основана на нахождении некоторого базисного множества стабильных толерантностей — 2-порожденных толерантностей, а затем комбинации элементов этого множества с помощью операции объединения.

В [7] изучались свойства разбиений и покрытий, связанных с конгруэнциями и стабильными толерантностями.

2. КВАЗИФАКТОРИЗАЦИЯ И МОРФИЗМЫ ПО ТОЛЕРАНТНОСТЯМ

Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. *Гомоморфизмом* автомата A на автомат $A^* = (S^*, X^*, Y^*, \delta^*, \lambda^*)$ называется тройка сюръективных отображений (φ, ψ, θ), где $\varphi : S \to S^*$, $\psi : X \to X^*$, $\theta : Y \to Y^*$, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi(\delta(s, x)) = \delta^*(\varphi(s), \psi(x)), \tag{6}$$

$$\theta(\lambda(s, x)) = \lambda^*(\varphi(s), \psi(x)), \tag{7}$$

для всех $s \in S$, $x \in X$.

Автомат A^* при этом называется *гомоморфным образом* A.

Если отображения φ, ψ, θ взаимно однозначны, то гомоморфизм называется изоморфизмом.

Для произвольного автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ тройка эквивалентностей $\Theta = (\varepsilon, \rho, \varkappa)$, где $\varepsilon \in E(S)$, $\rho \in E(X)$, $\varkappa \in E(Y)$, называется *согласованной* с функциями δ и λ переходов и выходов автомата A [1], если для любых $s_i \in S$ и $x_i \in X$ истинна импликация:

$$(s_1, s_2) \in \varepsilon \ \& \ (x_1, x_2) \in \rho \to (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \varepsilon \ \& \ (\lambda(s_1, x_1), \lambda(s_2, x_2)) \in \varkappa.$$

В согласованной тройке $\Theta = (\varepsilon, \rho, \varkappa)$ отношение ε есть конгруэнция на множестве S автомата A.

Фактор-автоматом автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ по согласованной тройке эквивалентностей $\Theta = (\varepsilon, \rho, \varkappa)$ называется автомат $A/_{\Theta} = (S/_{\varepsilon}, X/_{\rho}, Y/_{\varkappa}, \delta, \lambda)$, где $\delta(s_{\varepsilon}, x_{\rho}) = (\delta(s, x))_{\varepsilon}$, $\lambda(s_{\varepsilon}, x_{\rho}) = (\lambda(s, x))_{\varkappa}$ для любых s, x.

В работах [1, 8, 9] рассматривался вопрос построения всех гомоморфных образов абстрактного автомата, используя конгруэнции на множестве состояний. Процедура построения состояла в переборе всевозможных согласованных троек эквивалентностей (разбиений) автомата по определенным формулам. Фактор-автомат, построенный по согласованной тройке $(\varepsilon, \rho, \varkappa)$, есть гомоморфный образ автомата. Верно и обратное, всякий гомоморфный образ изоморфен фактор-автомату по некоторой тройке $(\varepsilon, \rho, \varkappa)$. Далее предлагается метод, обобщающий результаты, полученные для конгруэнций и гомоморфизмов. Вместо конгруэнции рассматривается более общее отношение стабильной толерантности. Понятие факторизации распространяется на покрытие.

Пусть τ — стабильная толерантность на множестве S автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, $\tau \in ST(A)$.

Построим отношение $\rho(\tau)$ на X по заданной стабильной толерантности τ и отношение $\xi(\tau, \rho)$ на Y по τ и заданному отношению толерантности ρ на X согласно (8) и (9):

$$(x_1, x_2) \in \rho(\tau) \leftrightarrow (\forall s_1, s_2 \in S)((s_1, s_2) \in \tau \to (\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau), \tag{8}$$

$$(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho) \leftrightarrow (\exists (s_1, s_2) \in \tau)(\exists (x_1, x_2) \in \rho)(y_1 = \lambda(s_1, x_1) \& y_2 = \lambda(s_2, x_2)). \tag{9}$$

Легко проверить, что поскольку τ, ρ — толерантности, то $\rho(\tau)$ и $\xi(\tau, \rho)$ — рефлексивные и симметричные отношения, однако транзитивность выполняется не всегда.

Таким образом, $\rho(\tau)$ и $\xi(\tau, \rho)$ — толерантности.

Утверждение 6. *Пусть для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ $\rho(\tau)$ определяется* (8), *где $\tau \in ST(A)$, $B_\tau = \{B_i\}$ — покрытие S классами толерантности τ, тогда для него истинны следующие утверждения.*

1. *Если $C_{\rho(\tau)} = \{C_j\}$ — покрытие X классами толерантности $\rho(\tau)$, то справедливо*

$$(\forall B_i)(\forall C_j)(\exists B_{i'}) \left(\{\delta(s, x)\}_{\substack{s \in B_i \\ x \in C_j}} \subseteq B_{i'} \right). \tag{10}$$

2. *Обратно, если толерантность $\rho \in T(X)$ такова, что для ее покрытия классами $C_\rho = \{C_j\}$ выполняется* (10), *то $\rho \subseteq \rho(\tau)$.*

Доказательство. 1. Пусть для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ $\tau \in ST(A)$ и выполняется (8). Рассмотрим класс B_i покрытия B_τ и класс C_j покрытия $C_{\rho(\tau)}$. Пусть $x^\circ \in C_j$. Поскольку τ — стабильная толерантность, то множество $B = \{\delta(s, x^\circ)\}_{s \in B_i}$ образуют предкласс. Пусть теперь x — произвольный элемент из C_j, а $s^\circ \in B_i$. В силу (8) элемент $\delta(s^\circ, x)$ находится в отношении τ с любым элементом

$\delta(s, x^\circ)$ предкласса B, так как $s, s^\circ \in B_i$, а $x, x^\circ \in C_j$, что в силу утверждения 2 означает, что $(s, s^\circ) \in \tau$, а $(x, x^\circ) \in \rho(\tau)$. Отсюда следует, что множество $B \cup \{\delta(s^\circ, x)\}$ также является предклассом. Поскольку s° — произвольный элемент из B_i, а x — произвольный элемент из C_j, то тем самым показано, что $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}}$ является предклассом. Тогда в силу утверждения 3 существует класс $B_{i'}$, содержащий это множество.

2. Пусть для толерантности $\rho \in T(X)$ автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ выполняется (10). Возьмем $(x_1, x_2) \in \rho$ и покажем, что $(x_1, x_2) \in \rho(\tau)$. Тем самым включение $\rho \subseteq \rho(\tau)$ будет показано. Если $(x_1, x_2) \in \rho$, то существует класс $C_j \in C_\rho$, содержащий x_1 и x_2. Пусть $(s_1, s_2) \in \tau$, тогда существует класс B_i, содержащий s_1 и s_2. Но тогда в силу (10) существует класс $B_{i'}$, такой, что $\delta(s_1, x_1)$,$\delta(s_2, x_2) \in B_{i'}$. В силу утверждения 2 это означает, что $(\delta(s_1, x_1), \delta(s_2, x_2)) \in \tau$. Согласно (8), отсюда следует, что $(x_1, x_2) \in \rho(\tau)$.

Замечание. Утверждение 6 показывает, что отношение $\rho(\tau)$ является максимальным отношением толерантности на X, для которого выполняется (10).

Таким образом, (8) означает, что если $B_\tau = \{B_i\}$ — покрытие на S по толерантности τ, то отношению $\rho(\tau)$ принадлежат все те пары из X, элементы которых реализуют одинаковые переходы из класса в класс B_τ, то есть

$$(x_1, x_2) \in \rho(\tau) \leftrightarrow (\forall B_i \in B_\tau)(\exists B_j \in B_\tau)(\{\delta(s, x_1)\}_{s\in B_i} \subseteq B_j \ \& \ \{\delta(s, x_2)\}_{s\in B_i} \subseteq B_j).$$

Утверждение 7. *Для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ и его толерантностей $\tau \in ST(A)$ и $\rho \in T(X)$ справедливы следующие предложения.*

1. *Если $\xi(\tau, \rho) \in T(Y)$ определяется* (9), *а $B_\tau = \{B_i\}$, $C_\rho = \{C_j\}$, $D_{\xi(\tau,\rho)} = \{D_k\}$ – покрытия классами толерантностей $\tau, \rho, \xi(\tau, \rho)$ соответственно, то истинны следующие утверждения:*

$$а)\quad (\forall B_i)(\forall C_j)(\exists D_k)\left(\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}} \subseteq D_k\right), \tag{11}$$

$$б)\quad (\forall D_k)(\exists B_i)(\exists C_j)\left(D_k = \{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}}\right). \tag{12}$$

2. *Обратно, если толерантности τ, ρ, ξ, где $\tau \in ST(A)$, $\rho \in T(X)$, $\xi \in T(Y)$, таковы, что для их покрытий классами $B_\tau = \{B_i\}$, $C_\rho = \{C_j\}$ и $D_\xi = \{D_k\}$ соответственно выполняется* (11), *то $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$, где $\xi(\tau, \rho)$ определяется формулой* (9) *для выбранных τ и ρ. Если, кроме* (11), *выполняется* (12), *то $\xi = \xi(\tau, \rho)$.*

Доказательство. Докажем 1. Пусть $\xi(\tau, \rho)$ определяется (9) для $\tau \in ST(A)$, $\rho \in T(X)$. Рассмотрим произвольные классы $B_i \in B_\tau$ и $C_j \in C_\rho$. Пусть в (9) часть формулы справа от знака $\leftrightarrow$ обозначается через F. Поскольку выполнение (9) предполагает, что выполняется импликация $F \to (y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho)$, а в классах B_i и C_j элементы попарно толерантны, то это означает, что множество $D = \{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_i\\ x\in C_j}}$ является предклассом в $\langle Y, \xi(\tau, \rho)\rangle$. Но тогда существует класс D_k, такой, что $D_k \supseteq D$. Тем самым (11) доказано.

Докажем (12). Рассмотрим произвольный класс D_k покрытия D_ξ. Сохраним обозначения предыдущей части доказательства.

Выполнение (9) предполагает справедливость импликации $(y_1, y_2) \in \xi(\tau, \rho) \to F$. Отсюда следует, что поскольку все элементы y в классе D_k попарно толерантны, а $y = \lambda(s, x)$ для некоторых s и x, то попарно толерантны все элементы s в множестве S и x в множесве X соответственно, для которых $y = \lambda(s, x) \in D_k$. Обозначим множество всех прообразов элементов $y \in D_k$ в множестве S через B, а прообразов в множестве X — через C. Таким образом, B и C являются предклассами в $\langle S, \tau\rangle$ и $\langle X, \rho\rangle$ соответственно. Покажем, что B и C являются классами. Пусть B не является классом. Поскольку B — предкласс, то существует класс B_i, такой, что $B_i \supset B$. Рассмотрим элементы $s \in B_i \backslash B$ (дополнение B до класса B_i) и $x^\circ \in C$. Если $s^\circ \in B$, то из условия $B \subset B_i$ следует, что $(s, s^\circ) \in \tau$, но тогда в силу (9) $(\lambda(s, x^\circ), \lambda(s^\circ, x^\circ)) \in \xi(\tau, \rho)$. Заметим, что $\lambda(s^\circ, x^\circ) \in D_k$, так как $s^\circ \in B$, $x^\circ \in C$. Далее возможны 2 случая:

1) $y = \lambda(s, x^\circ) \in D_k$, но тогда $s \in B$ и мы получили противоречие, так как $s \in B_i \backslash B$.

2) $y = \lambda(s, x^\circ) \notin D_k$, но так как $s \in B_i$, то s находится в отношении τ с любым элементом из B. Тогда в силу (9) y должен быть связан отношением $\xi(\tau,\rho)$ с любым элементом из D_k. Так как D_k — класс, то отсюда $y \in D_k$. Мы опять получили противоречие, что и доказывает равенство $B = B_i$, т.е. B является классом.

Аналогичным образом можно доказать, что C — класс в $\langle X, \rho\rangle$. Тем самым показано (12).

Докажем 2, сохранив обозначения предыдущей части утверждения. Пусть для покрытий классами B_τ, C_ρ и D_ξ тройки толерантностей (τ,ρ,ξ), где $\tau \in ST(A)$, $\rho \in T(X)$, $\xi \in T(Y)$ выполняется (11). Покажем, что $\xi(\tau,\rho) \subseteq \xi$, где $\xi(\tau,\rho)$ определяется (9). Пусть $(y_1, y_2) \in \xi(\tau,\rho)$, тогда в силу (9) $y_1 = \lambda(s_1, x_1)$, $y_2 = \lambda(s_2, x_2)$, для некоторых $(s_1, s_2) \in \tau$, $(x_1, x_2) \in \rho$. В силу утверждения 2 тогда существуют классы $B_i \in B_\tau$ и $C_j \in C_\rho$, такие, что $s_1, s_2 \in B_i$, $x_1, x_2 \in C_j$. В силу (11) найдется класс $D_k \in D_\xi$, такой, что $y_1, y_2 \in D_k$, но тогда $(y_1, y_2) \in \xi$. Тем самым показано, что $\xi(\tau,\rho) \subseteq \xi$.

Покажем, что $\xi \subseteq \xi(\tau,\rho)$, если выполняется (12). Пусть $(y_1, y_2) \in \xi$. Тогда существует класс D_k содержащий y_1 и y_2. В силу (12) найдутся классы $B_i \in B_\tau$ и $C_j \in C_\rho$, такие, что $y_1 = \lambda(s_1, x_1)$, $y_2 = \lambda(s_2, x_2)$, причем $s_1, s_2 \in B_i$, $x_1, x_2 \in C_j$. Но последнее означает, что $(s_1, s_2) \in \tau$, $(x_1, x_2) \in \rho$, а значит, для (y_1, y_2) выполняется F. В силу задания $\xi(\tau,\rho)$ формулой (9) отсюда следует, что $(y_1, y_2) \in \xi(\tau,\rho)$.

Мы получили, что если выполняется (11), то $\xi \supseteq \xi(\tau,\rho)$, а если (12), то $\xi \subseteq \xi(\tau,\rho)$. Ясно, что если выполняются (11) и (12) одновременно, то $\xi = \xi(\tau,\rho)$.

Замечание. Утверждение 7 позволяет сразу строить классы толерантности $\xi(\tau,\rho)$ с помощью (12), используя только классы B_i и C_j, минуя этап нахождения массива пар для $\xi(\tau,\rho)$.

Таким образом, содержательно (9) означает, что отношению $\xi(\tau,\rho)$ принадлежат те пары из Y, которые являются реакциями автомата, находящегося в состояниях из одного класса покрытия B_τ, на входные символы из одного класса покрытия C_ρ толерантности ρ на X.

Пусть B_τ, C_ρ и D_ξ — покрытия классами в пространствах толерантностей $\langle S, \tau\rangle$,$\langle X, \rho\rangle$,$\langle Y, \xi\rangle$ соответственно.

Рассмотрим следующую процедуру построения автомата по заданной тройке толерантностей (τ,ρ,ξ) и покрытиям B_τ, C_ρ, D_ξ.

Пусть $B_\tau = \{B_i\}$,$C_\rho = \{C_j\}$,$D_\xi = \{D_k\}$. Введем обозначения: $s_\tau = \cap\{B_i | s \in B_i\}$ — пересечение всех классов покрытия B_τ, содержащих элемент s, $x_\rho = \cap\{C_j | x \in C_j\}$, $y_\xi = \cap\{D_k | y \in D_k\}$. Через S/τ или S' будем обозначать множество классов покрытия B_τ, построенного по толерантности τ, и их всевозможных непустых пересечений. Аналогично, X/ρ или X' – классы и их всевозможные непустые пересечения из C_ρ, Y/ξ или Y' — классы и их непустые пересечения из D_ξ.

Рассмотрим три отображения:

$$\varphi'_\tau : S \to S/\tau, \qquad \varphi'_\tau(s) = s_\tau; \tag{13}$$

$$\psi'_\rho : X \to X/\rho, \qquad \psi'_\rho(x) = x_\rho; \tag{14}$$

$$\Theta'_\xi : Y \to Y/\xi, \qquad \Theta'_\xi(y) = y_\xi. \tag{15}$$

Пусть Q и G обозначают элементы множеств $S/_\tau$ и $X/_\rho$ соответственно, то есть $Q = B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}$, $G = C_{j_1} \cap \ldots \cap C_{j_l}$.

Определим функции δ' и λ' следующим образом:

$$\delta' : S/_\tau \times X/_\rho \to S/_\tau, \quad \delta'(Q, G) = \cap \left\{ B_i | B_i \supseteq \{\delta(s,x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right\} = \left(\{\delta(s,x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\tau ; \tag{16}$$

$$\lambda' : S/_\tau \times X/_\rho \to Y/_\xi, \quad \lambda'(Q, G) = \left(\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s \in Q \\ x \in G}} \right)_\xi . \tag{17}$$

Элементами множеств $S/_\tau, X/_\rho$ и $Y/_\xi$ являются подмножества множеств S, X и Y соответственно, поэтому на $S/_\tau, X/_\rho$ и $Y/_\xi$ существует частичный порядок по включению.

Рассмотрим автомат $A' = (S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$. Процедура его построения напоминает процедуру факторизации по конгруэнциям, описанную в [8], и совпадает с ней, если толерантности являются эквивалентностями. Будем называть ее *квазифакторизацией*, а автомат A' — *квазифактор-автоматом*. Квазифактор-автомат, построенный по покрытиям всеми классами толерантностей τ, ρ, ξ будем также обозначать $A_{\tau,\rho,\xi}$.

Анализируя шаги процедуры квазифакторизации, следует выделить один момент, заслуживающий особого внимания. При определении функций δ' и λ' по формулам (16) и (17) может оказаться, что множество $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q\\ x\in G}}$ или $\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q\\ x\in G}}$ не покрывается целиком ни одним классом соответствующих покрытий. В результате получается, что функции δ' и λ' не определены. Теорема 1 описывает условия корректности процедуры.

Лемма 1. *Для произвольного покрытия $B = \{B_i\}$ произвольного множества Z и произвольных непустых подмножеств $Z_1, Z_2 \subseteq Z$, где $Z_1 \subseteq Z_2$, справедливо*

$$\cap\{B_i | B_i \supseteq Z_1\} \subseteq \cap\{B_i | B_i \supseteq Z_2\}, \tag{18}$$

если Q_2 покрывается хотя бы одним классом покрытия B.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что каждый класс покрытия B, покрывающий множество Z_2, покрывает также и Z_1.

Теорема 1. *Процедура квазифакторизации для автомата $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ по заданным толерантностям τ, ρ и ξ на множествах S, X и Y соответственно корректна (функции переходов и выходов квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ определены) тогда и только тогда, когда $\tau \in ST(A)$, $\rho \subseteq \rho(\tau)$, $\xi \supseteq \xi(\tau,\rho)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть по покрытиям B_τ, C_ρ и D_ξ тройки толерантностей (τ, ρ, ξ) построен автомат $A_{\tau,\rho,\xi}$.

1. Покажем, что $\tau \in ST(A)$. Предположим противное, тогда, по определению стабильной толерантности,

$$(\exists (s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau)(\exists x_0 \in X)((\delta(s_1^\circ, x_0), \delta(s_2^\circ, x_0)) \notin \tau).$$

Пусть B_{i_o} — класс покрытия B_τ, содержащий s_1° и s_2°.

Рассмотрим множество $G = \{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x=x_0}}$. Ясно, что $\delta(s_1^\circ, x_0)$, $\delta(s_2^\circ, x_0) \in G$. Так как $(\delta(s_1^\circ, x_0), \delta(s_2^\circ, x_0)) \notin \tau$, то из утверждения 2 следует, что в покрытии B_τ не существует класса, целиком покрывающего множество G. Тогда $\left(\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x=x_0}}\right)_\tau = \varnothing$. Если C_{k_0} — произвольный класс покрытия C_ρ, содержащий x_0, то множество $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{k_0}}}$, содержащее G, обладает тем же свойством. Отсюда $\left(\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{k_0}}}\right)_\tau = \varnothing$. Это означает, что функция переходов квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ на паре (B_{i_0}, C_{k_0}) не определена. Мы получили противоречие с условием существования автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$. Тем самым доказано, что $\tau \in ST(A)$.

2. Покажем, что $\rho \subseteq \rho(\tau)$, где $\tau \in ST(A)$. Предположим, что это не так, то есть существует пара (x_1°, x_2°), такая, что $(x_1^\circ, x_2^\circ) \in \rho$, но $(x_1^\circ, x_2^\circ) \notin \rho(\tau)$.

Тогда из (8) следует

$$(x_1^\circ, x_2^\circ) \notin \rho(\tau) \to ((\exists (s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau)((\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ)) \notin \tau)).$$

Последнее в силу утверждения 2 означает, что пара $(\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ))$ не покрывается ни одним классом покрытия B_τ. Но тогда, проводя рассуждения, аналогичные п.1), можно показать, что функция переходов квазифактор-автомата не определена.

3. Пусть для автомата A выбраны стабильная толерантность τ на S и $\rho \subseteq \rho(\tau)$ на X. Покажем, что для построения квазифактор-автомата необходимо, чтобы на Y выбиралось $\xi \supseteq \xi(\tau, \rho)$.

Предположим противное, тогда существует пара (y_1°, y_2°), такая, что $(y_1^\circ, y_2^\circ) \in \xi(\tau, \rho)$, но $(y_1^\circ, y_2^\circ) \notin \xi$. Тогда, согласно (9), справедливо

$$(\exists (s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau)(\exists (x_1^\circ, x_2^\circ) \in \rho)(y_1^\circ = \lambda(s_1^\circ, x_1^\circ) \& y_2^\circ = \lambda(s_2^\circ, x_2^\circ)). \tag{19}$$

Так как $(s_1^\circ, s_2^\circ) \in \tau$, то в B_τ существует класс B_{i_0}, покрывающий эту пару. Аналогично для пары (x_1°, x_2°) и покрытия C_ρ на X существует класс C_{j_0}, покрывающий x_1°, x_2°.

Рассмотрим значение функции выходов λ' квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ на паре (B_{i_0}, C_{j_0}) : $\lambda'(B_{i_0}, C_{j_0}) = \left(\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{j_0}}}\right)_\xi$.

Из (19) следует, что $y_1^\circ, y_2^\circ \in \{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_0}\\ x\in C_{j_0}}}$. Однако так как $(y_1^\circ, y_2^\circ) \notin \xi$, не существует класса покрытия D_ξ, содержащего указанную пару. Поэтому значение $\lambda'(B_{i_0}, C_{j_0})$ — не определено.

Покажем достаточность. Пусть выбрана тройка толерантностей (τ, ρ, ξ), такая, что $\tau \in ST(A)$, $\rho \subseteq \rho(\tau)$, $\xi \supseteq \xi(\tau,\rho)$. Надо показать, что для квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi} = (S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$, построеннного по покрытиям $B_\tau = \{B_i\}$, $C_\rho = \{C_j\}$, $D_\xi = \{D_k\}$, определены функции δ' и λ', т.е. для любых $Q \in S/_\tau$, $G \in X/_\rho$ справедливо $\delta'(Q,G) \neq \varnothing$ и $\lambda'(Q,G) \neq \varnothing$.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть для некоторых $Q^\circ = B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k}$ и $G^\circ = C_{j_1} \cap C_{j_2} \cap \ldots \cap C_{j_l}$ справедливо $\delta'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$. По определению, $\delta'(Q^\circ, G^\circ)$ — пересечение классов покрытия B_τ, содержащих множество $\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q^\circ\\ x\in G^\circ}}$. Тогда условие $\delta'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$ означает, что для любого $B_i \in B_\tau$

$$(\exists s, s' \in Q^\circ)(\exists x, x' \in G^\circ)(\{\delta(s,x), \delta(s',x')\} \nsubseteq B_i). \tag{20}$$

Рассмотрим класс B_{i_0}, содержащий все элементы $\delta(s,x)$, где $s \in B_{i_1}$, $x \in C_{j_1}$. Такой класс обязательно найдется, так как для τ и $\rho(\tau)$ выполняются (5) и (10), а так как $\rho \subseteq \rho(\tau)$, то в силу утверждения 3 (10) выполняется и для ρ. Если для B_{i_0} выполняется (20), то существуют $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$, $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$, такие, что $\{\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \nsubseteq B_{i_0}$. Однако из условия $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$ следует $s_1^\circ, s_2^\circ \in B_{i_1}$, а из условия $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$ следует $x_1^\circ, x_2^\circ \in C_{j_1}$. Но тогда, согласно выбору B_{i_0}, $\{\delta(s_1^\circ, x_1^\circ), \delta(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \subseteq B_{i_0}$. Получили противоречие, которое доказывает, что $\delta'(Q,G) \neq \varnothing$ для любых $Q \in S/_\tau, G \in X/_\rho$.

Покажем, что $\lambda'(Q,G) \neq \varnothing$ аналогичным образом. Пусть для некоторых $Q^\circ = B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}$ и $G^\circ = C_{j_1} \cap \ldots \cap C_{j_l}$ справедливо $\lambda'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$. По определению, $\lambda'(Q^\circ, G^\circ)$ — пересечение классов покрытия D_ξ, содержащих множество $\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q^\circ\\ x\in G^\circ}}$. Тогда условие $\lambda'(Q^\circ, G^\circ) = \varnothing$ означает, что для любого $D_k \in D_\xi$

$$(\exists s, s' \in Q^\circ)(\exists x, x' \in G^\circ)(\{\lambda(s,x), \lambda(s',x')\} \nsubseteq D_k). \tag{21}$$

Рассмотрим класс $D_{k_0} \in D_\xi$, содержащий все элементы $\lambda(s,x)$, где $s \in B_{i_1}$, $x \in C_{j_1}$. Такой класс обязательно найдется, так как в силу определения отношения $\xi(\tau,\rho)$ (9) и соотношения (11) существует класс покрытия толерантности $\xi(\tau,\rho)$, содержащий множество $\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in B_{i_1}\\ x\in C_{j_1}}}$, а поскольку $\xi \supseteq \xi(\tau,\rho)$, то в силу утверждения 3 этим же свойством обладает и покрытие D_ξ.

Если для D_{k_0} выполняется (21), то существуют $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$, $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$, такие, что $\{\lambda(s_1^\circ, x_1^\circ), \lambda(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \nsubseteq D_{k_0}$. Но из условия $s_1^\circ, s_2^\circ \in Q^\circ$ следует $s_1^\circ, s_2^\circ \in B_{i_1}$, а из условия $x_1^\circ, x_2^\circ \in G^\circ$ следует $x_1^\circ, x_2^\circ \in C_{j_1}$. Но тогда, согласно выбору D_{k_0}, $\{\lambda(s_1^\circ, x_1^\circ), \lambda(s_2^\circ, x_2^\circ)\} \subseteq D_{k_0}$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Тем самым теорема доказана полностью.

3. СВОЙСТВА КВАЗИФАКТОР-АВТОМАТА. МОРФИЗМЫ ПО ТОЛЕРАНТНОСТЯМ. ТОЛЕРАНТНЫЕ ОБРАЗЫ

Отображение $\Theta : P \to Q$, где P, Q — частично упорядоченные множества, называется *изотонным* или сохраняющим порядок, если

$$(\forall x, y \in P)(x \leq y \to \Theta(x) \leq \Theta(y)).$$

Изотонное отображение, допускающее изотонное обратное отображение, называется изоморфизмом.

Теорема 2. *Пусть задан автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$. Для квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}$ автомата A, определяемого соотношениями* (13)–(17), *в котором τ, ρ, ξ удовлетворяют теореме* 1, *для любых $s \in S$ и $x \in X$ справедливо*

$$\varphi'(\delta(s,x)) \subseteq \delta'(\varphi'(s), \psi'(x)), \tag{22}$$

$$\Theta'(\lambda(s,x)) \subseteq \lambda'(\varphi'(s), \psi'(x)). \tag{23}$$

Доказательство. По определению, слева в (22) $\varphi'(\delta(s,x)) = (\delta(s,x))_\tau$. Справа в (22) $\delta'(\varphi'(s), \psi'(x)) = \left(\{\delta(s',x')\}_{\substack{s'\in\varphi'(s)\\ x'\in\psi'(x)}}\right)_\tau$. По определению функций φ и ψ, $\delta(s,x) \in \{\delta(s',x')\}_{\substack{s'\in\varphi'(s)\\ x'\in\psi'(x)}}$.

Тогда, по лемме 1, $((\delta(s,x))_\tau \subseteq \left(\{\delta(s',x')\}_{\substack{s'\in\varphi'(s)\\ x'\in\psi'(x)}}\right)_\tau$. Тем самым (22) доказано. Включение (23) доказывается аналогично.

Теорема 3. *Для произвольного автомата $A=(S,X,Y,\delta,\lambda)$ функции переходов и выходов его квазифактор-автомата $A_{\tau,\rho,\xi}=(S/_\tau, X/_\rho, Y/_\xi, \delta', \lambda')$ изотонны, то есть*

$$(\forall Q_1,Q_2\in S/_\tau)(\forall G_1,G_2\in X/_\rho)(Q_1\subseteq Q_2 \;\&\; G_1\subseteq G_2\to$$

$$\to \delta'(Q_1,G_1)\subseteq\delta'(Q_2,G_2) \;\&\; \lambda'(Q_1,G_1)\subseteq\lambda'(Q_2,G_2)).$$

Доказательство. Пусть квазифактор-автомат построен по некоторым покрытиям B_τ, C_ρ и D_ξ на множествах S,X и Y соответственно автомата A, $Q_1,Q_2\subseteq S/_\tau$, $G_1,G_2\subseteq X/_\rho$. Обозначим $Z_1=\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q_1\\ x\in G_1}}$, $Z_2=\{\delta(s,x)\}_{\substack{s\in Q_2\\ x\in G_2}}$. Поскольку $Q_1\subseteq Q_2 \;\&\; G_1\subseteq G_2$, то $Z_1\subseteq Z_2$, а тогда, по лемме 1, $(Z_1)_\tau\subseteq(Z_2)_\tau$. Но по определению квазифактор-автомата $(Z_1)_\tau=\delta'(Q_1,G_1)$, $(Z_2)_\tau=\delta'(Q_2,G_2)$. Тем самым включение для δ' доказано.

Если положить $Z_1'=\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q_1\\ x\in G_1}}$, $Z_2'=\{\lambda(s,x)\}_{\substack{s\in Q_2\\ x\in G_2}}$, то по лемме 1 $(Z_1')_\xi\subseteq(Z_2')_\xi$. По определению $(Z_1')_\xi=\lambda'(Q_1,G_1)$, $(Z_2')_\xi=\lambda'(Q_2,G_2)$. Тем самым включение для λ' доказано.

Автомат $A=(S,X,Y,\delta,\lambda)$ будем называть *упорядоченным*, если каждое из множеств S,X,Y частично упорядочено.

Пусть дан упорядоченный автомат $A=(S_A,X_A,Y_A,\delta_A,\lambda_A)$. Упорядоченный автомат $B=(S_B,X_B,Y_B,\delta_B,\lambda_B)$ назовем изоморфным автомату A, если существует тройка взаимно однозначных сюръективных отображений (φ,ψ,θ), где $\varphi: S_A\to S_B$, $\psi: X_A\to X_B$, $\theta: Y_A\to Y_B$, такая, что для любых $s\in S$, $x\in X$

$$\varphi(\delta_A(s,x))=\delta_B(\varphi(s),\psi(x)), \qquad \theta(\lambda_A(s,x))=\lambda_B(\varphi(s),\psi(x)),$$

причем каждое из отображений φ,ψ,θ есть изоморфизм соответствующих частично упорядоченных множеств.

Пусть задан автомат $A=(S,X,Y,\delta,\lambda)$. Упорядоченный автомат $\tilde A=(\tilde S,\tilde X,\tilde Y,\tilde\delta,\tilde\lambda)$ назовем *толерантным образом* A, если он изоморфен некоторому квазифактор-автомату автомата A.

Пусть (φ',ψ',θ') — отображения, определяемые (13)–(15) в процедуре квазифакторизации, автомата A в квазифактор-автомат A', $(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde\theta)$ — изоморфизм A' на некоторый толерантный образ $\tilde A$. Тогда тройку отображений $(\varphi,\psi,\theta)=(\tilde\varphi\cdot\varphi',\tilde\psi\cdot\psi',\tilde\theta\cdot\theta')$, где $(\tilde\varphi\cdot\varphi')(s)=\tilde\varphi(\varphi'(s))$, $\psi(x)=\tilde\psi(\psi'(x))$, $\theta(y)=\tilde\theta(\theta'(y))$ назовем *морфизмом по стабильной толерантности* автомата A в автомат $\tilde A$.

Следующие теоремы распространяют свойства квазифактор-автоматов на толерантные образы.

Теорема 4. *Пусть (φ,ψ,θ) — морфизм по стабильной толерантности автомата A в автомат $\tilde A$, тогда для любых $s\in S$, $x\in X$*

$$\varphi(\delta(s,x))\le\tilde\delta(\varphi(s),\psi(x)), \qquad \theta(\lambda(s,x))\le\tilde\lambda(\varphi(s),\psi(x)).$$

Доказательство. Теорема следует из теоремы 2 и изоморфности толерантного образа некоторому квазифактор-автомату.

Теорема 5. *Для произвольного автомата A функции переходов и выходов его толерантного образа $\tilde A=(\tilde S,\tilde X,\tilde Y,\tilde\delta,\tilde\lambda)$ изотонны, то есть*

$$(\forall x,x'\in\tilde X)(\forall s,s'\in\tilde S)(s\le s' \;\&\; x\le x'\to\tilde\delta(s,x)\le\tilde\delta(s',x') \;\&\tilde\lambda(s,x)\le\tilde\lambda(s',x')).$$

Доказательство. Теорема следует из теоремы 3 и определения толерантного образа.

4. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ТОЛЕРАНТНОГО ОБРАЗА

Пусть автомат A задается таблицами переходов (табл. 1) и выходов (табл. 2). Автомат A — простой, т.е. он не имеет нетривиальных конгруэнций. Рассмотрим $\tau_{1,2}$ — наименьшую стабильную толерантность, порожденную парой $(1,2)$.

В силу определения стабильной толерантности принадлежность пары состояний $(1,2)$ толерантности $\tau_{1,2}$ влечет принадлежность пары $(2,3) = (\delta(1,x_2), \delta(2,x_2))$, а значит, и пар $(1,5) = (\delta(2,x_1), \delta(3,x_1))$ и $(3,1) = (\delta(2,x_2), \delta(3,x_2))$ и т.д.

Таблица 1

$s \setminus x$	x_1	x_2	x_3
1	2	2	1
2	1	3	2
3	5	1	2
4	8	7	1
5	9	2	1
6	1	5	2
7	3	6	2
8	7	1	1
9	5	4	1

Таблица 2

$s \setminus x$	x_1	x_2	x_3
1	y_1	y_3	y_1
2	y_5	y_1	y_5
3	y_1	y_6	y_1
4	y_2	y_8	y_1
5	y_3	y_5	y_5
6	y_7	y_5	y_5
7	y_6	y_1	y_1
8	y_7	y_7	y_1
9	y_8	y_8	y_5

Процесс порождения пар толерантности $\tau_{1,2}$ удобно представить деревом с корнем, соответствующим паре $(1,2)$. Начальный фрагмент дерева представлен на рис. 1. Процесс ветвления в очередной вершине $\sigma = (s,t)$ заканчивается, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) пара (s,t) или (t,s) уже встречалась выше;
2) $s = t$.

Эти вершины на рис. 1 подчеркнуты.

Выполнение этих условий означает, что далее из этой вершины могут лишь получаться пары, уже полученные, либо симметричные к ним, либо пары с одинаковыми компонентами, т.е. пары вида (s,s). Обозначим через τ множество всех пар вида (s,t), где $s \neq t$, из дерева, порожденных парой $(1,2)$. Будем считать, что $(s,t) = (t,s)$ и поэтому для удобства в τ включаются пары (s,t), в которых $s < t$. Легко проверить, что для рассматриваемого примера будет получено следующее множество пар: $\tau = \{$(1,2); (2,3); (1,5); (1,3); (2,9); (2,5); (3,4); (1,9); (5,8); (1,7); (2,4); (7,9); (2,6); (1,8); (3,7); (3,5); (4,6); (2,7); (1,6); (5,9); (5,7); (3,6); (3,9); (1,4); (2,8)$\}$.

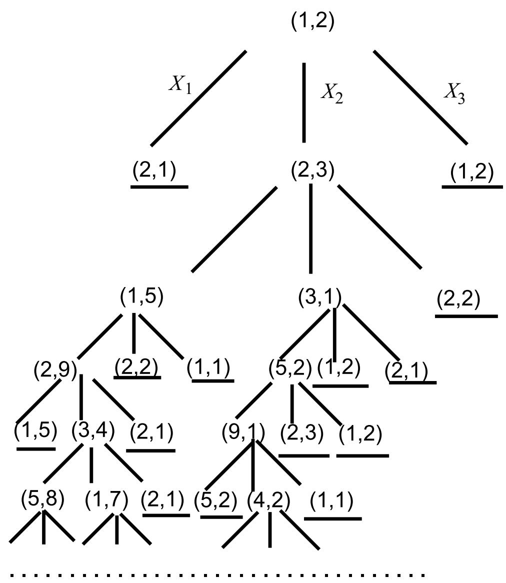

Рис. 1

В силу свойств рефлексивности и симметричности $\tau_{1,2}$ должна содержать все пары из τ, все пары, симметричные к ним (обозначим множество таких пар через τ^{-1}), а также множество Δ_S, состоящее из всех пар вида (s,s), т.е. $\Delta_S = \{(1,1);(2,2);\ldots;(9,9)\}$. Таким образом, $\tau_{1,2} = \tau \cup \tau^{-1} \cup \Delta_S$.

Толерантность $\tau_{1,2}$ имеет классы: $B_1 = \{1,2,3,5,7,9\}$, $B_2 = \{1,2,5,8\}$, $B_3 = \{1,2,3,4,6\}$.

Обозначим $B_4 = B_1 \cap B_2 = \{1,2,5\}$, $B_5 = B_1 \cap B_3 = \{1,2,3\}$, $B_6 = B_2 \cap B_3 = B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \{1,2\}$.

В табл. 3 представлены значения функции переходов на рассматриваемых классах.

Таблица 3

δ'	x_1	x_2	x_3
B_1	B_1	B_3	B_6
B_2	B_1	B_5	B_6
B_3	B_2	B_1	B_6
B_4	B_1	B_5	B_6
B_5	B_4	B_5	B_6
B_6	B_6	B_5	B_6

Для $\tau_{1,2}$ отношение $\rho(\tau_{1,2})$, определяемое (8) и утверждением 6, содержит пары (x_1,x_3) и (x_2,x_3). Компоненты этих пар реализуют одинаковые переходы из класса в класс B. Таким образом, $\rho(\tau)$ имеет классы: $\{x_1,x_3\}$ и $\{x_2,x_3\}$.

Утверждение 6 и теорема 1 позволяют для построения квазифактор-автомата рассмотреть отношение $\rho \subset \rho(\tau)$. В качестве такого отношения рассмотрим ρ, определяемое классами $C_1 = \{x_1\}$ и $C_2 = \{x_2,x_3\}$.

Формула (9) и утверждение 7 позволяют определить отношение $\xi(\tau_{1,2},\rho)$ с классами: $D_1 = \{y_1,y_3,y_6,y_5,y_8\}$, $D_2 = \{y_1,y_3,y_5,y_7\}$, $D_3 = \{y_1,y_2,y_5,y_7\}$.

Класс D_1 порождается реакциями автомата на состояния из класса B_1 и входной символ из класса C_1, D_2 порождается соответственно классами B_2 и C_1, D_3 — классами B_3 и C_1.

Обозначим $D_4 = D_1 \cap D_2 = \{y_1,y_3,y_5\}$, $D_5 = D_1 \cap D_3 = \{y_1,y_5\}$, $D_6 = D_2 \cap D_3 = \{y_1,y_5,y_7\}$.

Справедливо $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_1 \cap D_3 = D_5$.

Определяя функции δ' и λ' согласно формулам (16) и (17), получаем квазифактор-автомат

$A' = (S', X', Y', \delta', \lambda')$ автомата A с табл. 4 и 5 переходов и выходов соответственно, $S' = \{B_i\}$, $Y' = \{D_k\}$, $X' = \{C_j\}$.

Всякий автомат $\tilde{A}$, изоморфный A' будет толерантным образом A. На рис. 2 изображен частичный порядок на множестве состояний S', на рис. 3 — соответственно выходов Y'.

Порядок на множестве X — тривиальный.

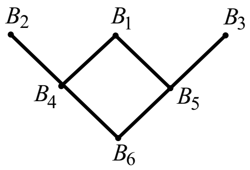

Рис. 2

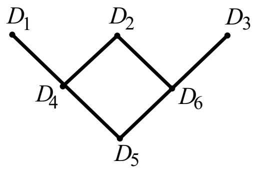

Рис. 3

Таблица 4

δ'	C_1	C_2
B_1	B_1	B_3
B_2	B_1	B_5
B_3	B_2	B_1
B_4	B_1	B_5
B_5	B_4	B_5
B_6	B_6	B_5

Таблица 5

δ'	C_1	C_2
B_1	D_1	D_1
B_2	D_2	D_2
B_3	D_3	D_1
B_4	D_4	D_4
B_5	D_5	D_1
B_6	D_5	D_4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Толерантный образ автомата представляет собой автомат, поведение которого существенным образом связано с поведением исходного автомата. Теорема 4 показывает эту связь.

Определения толерантного образа и морфизма по толерантности введены по аналогии с гомоморфным образом и гомоморфизмом соответственно. Подобно тому как всякий гомоморфный образ изоморфен некоторому фактор-автомату исходного автомата, построенному по некоторой конгруэнции на множестве состояний, толерантный образ изоморфен квазифактор-автомату, построенному по стабильной толерантности. С этой точки зрения морфизм по толерантности можно рассматривать как обобщение гомоморфизма, поскольку в том случае, когда стабильная толерантность является конгруэнцией, толерантный образ есть гомоморфный образ, а морфизм по толерантности совпадает с гомоморфизмом.

Отметим, однако, методологическую особенность в определении толерантного образа. Если гомоморфный образ определяется через тройку отображений (φ, ψ, θ), а затем устанавливается его изоморфность некоторому фактор-автомату, то толерантный образ изначально определяется через квазифактор-автомат, а затем устанавливаются свойства соответствующей тройки отображений.

Теорема 1 позволяет предложить процедуру построения всех толерантных образов автомата, аналогичную построению гомоморфных образов [8]. Она заключается в переборе стабильных толерантностей автомата и толерантностей на X и Y, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Особенность состоит в том, что вместо покрытия множества всеми классами толерантности можно рассматривать базисы покрытий, удаляя «лишние» классы, если это не приводит к ситуации неопределенности функций переходов и выходов квазифактор-автомата. Однако, как правило, покрытие всеми классами в конечном детерминированном автомате одновременно является единственным базисом.

Отметим, что в процессе построения всех толерантных образов будут построены все гомоморфные образы.

Библиографический список

1. *Богомолов А.М., Салий В.И.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, физмат. лит., 1997. 368 с.

2. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.

3. *Chajda I.* Characterization of Relational Blocks // Algebra universalis. 1980. V. 10. P. 65-69.

4. *Карпов Ю. Г.* Теория автоматов. СПб.: Питер, 2003. 208 с.

5. *Hartmanis J., Stearns R.* Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. N.Y.: Prentice-Hall Inc., 1966. 213 p.

6. *Мангушева И.П.* Построение решетки стабильных толерантностей конечного автомата // Методы и системы технической диагностики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. Вып. 2. С. 106–112.

7. *Хрусталев П.М.* Покрытия и разбиения со свойством подстановки в конечных автоматах // Методы и системы технической диагностики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1981. Вып. 2. С. 96–106.

8. *Дидидзе Ц.Е.* О гомоморфизмах автоматов // Тр. ВЦ АН Груз. ССР, 1973. Т. 12, № 1. С. 118–131.

9. *Ильичева И.П., Печенкин В.В.* Контроль структурных автоматов по стабильным отношениям // Методы и системы технической диагностики. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. Вып. 5. С. 35–43.