metical equivalent of analytic property of Dirichlet L-series on $\mathrm{Re}\, s = 1$ line]. *Izbrannye trudy* [Selectas], Moscow, Nauka, 1973. pp. 310–328 (in Russian).
4. Matveev V. A., Matveeva O. A. On behavior in critical strip of Dirichlet series with finite-valued coefficients and bounded summatory function. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2012, vol. 13, iss. 2, pp. 106–116 (in Russian).

УДК 511.3

ОБ ОДНОМ ЭКВИВАЛЕНТЕ РАСШИРЕННОЙ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА ДЛЯ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Матвеев[1], О. А. Матвеева[2]

[1]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com

[2]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

Для L-функций Дирихле числовых полей получено условие на сумматорную функцию, рассматриваемую на множестве простых идеалов, эквивалентное расширенной гипотезе Римана. Изучаются аналитические свойства эйлеровых произведений, связанных с этим эквивалентом.

Ключевые слова: расширенная гипотеза Римана, L-функции Дирихле, числовые поля.

ВВЕДЕНИЕ

Харди и Литлвуд в [1] высказали предположение о том, что нетривиальные нули L-функций Дирихле в случае числовых характеров лежат на критической прямой. Это предположение получило название расширенной гипотезы Римана. Соответствующее предположение о нетривиальных нулях L-функций числовых полей также называют расширенной гипотезой Римана.

В данной работе будет доказано утверждение о том, что расширенная гипотеза Римана для L-функций числового поля эквивалентна определённой асимптотике для сумматорной функции характера Дирихле, рассматриваемой на множестве простых идеалов данного поля, и будут рассмотрены аналитические свойства эйлеровых произведений, связанных с этим эквивалентом.

1. УСЛОВИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ L-ФУНКЦИИ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Пусть χ — неглавный первообразный характер Дирихле по модулю m числового поля $\mathbb{K}$, и $L(s,\chi,\mathbb{K})$, $s = \sigma + it$ — соответствующая L-функция, определённая при $\sigma > 1$ следующим образом:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \tag{1}$$

где произведение берётся по всем простым, а сумма — по всем целым идеалам поля $\mathbb{K}$.

В данной работе приведём доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Расширенная гипотеза Римана для L-функции Дирихле* (1) *эквивалентна оценке вида*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p},\\ N(\mathfrak{p})\le x}} \chi(\mathfrak{p}) = O(x^{1/2+\varepsilon}), \tag{2}$$

где суммирование рассматривается по всем простым идеалам, норма которых не превосходит x, ε — произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от x.

Доказательству теоремы 1 предпошлём доказательства двух лемм.

Лемма 1. *Пусть ряд Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \tag{3}$$

таков, что соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

при подходе к точке $z = 1$ вдоль вещественной оси ведёт себя следующим образом:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = O\left((1-x)^{1/2+\varepsilon}\right), \tag{4}$$

где ε — произвольное положительное число.

Тогда ряд Дирихле (3) *аналитически продолжим в полуплоскость $\sigma > 1/2$.*

Доказательство. Запишем известное преобразование Меллина:

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} \right) x^{s-1}\, dx, \qquad \sigma \geq 1, \tag{5}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

В силу оценки (4) интеграл, стоящий в правой части этого равенства, абсолютно сходится при любом s, если $\sigma > 1/2$. Действительно, оценка (4) равносильна оценке

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} = O(x^{1/2+\varepsilon}), \qquad x \to 0.$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_0^{1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} \right) x^{s-1}\, dx$$

абсолютно сходится при $\sigma > 1/2$, а интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} \right) x^{s-1}\, dx$$

абсолютно сходится при любом s, что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 2. *Следующие оценки эквивалентны:*

$$1.\quad \sum_{N(\mathfrak{p})\leq x} \chi(\mathfrak{p}) = O(x^{1/2+\varepsilon});$$

$$2.\quad \sum_{N(\mathfrak{p})\leq x} \chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p}) = O(x^{1/2+\varepsilon}). \tag{6}$$

Доказательство. Применяя метод суммирования Абеля, получим эквивалентность вида

$$\sum_{N(\mathfrak{p})\leq x} \chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p}) \sim \ln x \sum_{N(\mathfrak{p})\leq x} \chi(\mathfrak{p}),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Доказательство основной теоремы. Пусть имеет место расширенная гипотеза Римана. Используя приём оценки сумматорной функции, приведённый в работе [2], получим оценку (6), а в силу леммы 2 — и оценку (2).

Обратно, пусть имеет место оценка (2), а следовательно, и оценка (6). Обозначим

$$a_n = \sum_{N(\mathfrak{p})=n} \chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p})$$

и рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Применяя приём суммирования Абеля, получаем следующее интегральное представление этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\ln x \int_2^{+\infty} S(u) x^u du, \tag{7}$$

где $S(u) = \sum\limits_{n \le u} a_n$.

В силу оценки (6) имеем:

$$S(u) = O(u^{1/2+\varepsilon}).$$

Отсюда и из формулы (7) получаем:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right| = O\left(|\ln x| \int_2^{+\infty} u^{1/2+\varepsilon} x^u du \right).$$

Запишем последний интеграл в виде

$$\int_2^{+\infty} u^{1/2+\varepsilon} x^u du = \int_2^{(1-x)^{-1}} u^{1/2+\varepsilon} x^u du + \int_{(1-x)^{-1}}^{+\infty} u^{1/2+\varepsilon} x^u du.$$

Применяя к последнему слагаемому формулу интегрирования по частям, получаем оценку вида

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right| = O\left(\ln x \left[(1-x)^{-1/2+\varepsilon} + \frac{(1-x)^{-1/2+\varepsilon}}{\ln x} + \frac{(1-x)^{1/2+\varepsilon}}{\ln^2 x} \right] \right) = O\left((1-x)^{-1/2+\varepsilon} \right)$$

при $x \to 1$.

Отсюда в силу леммы 1 получаем, что ряд Дирихле

$$\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}$$

аналитически продолжим в полуплоскость $\sigma > 1/2$.

Так как

$$-\frac{L'(s,\chi,\mathbb{K})}{L(s,\chi,\mathbb{K})} = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p}) \ln N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g(s,\chi),$$

где $g(s,\chi)$ — функция, голоморфная при $\sigma > 1/2$, то $L(s,\chi,\mathbb{K})$ не имеет нулей в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Тогда в силу функционального уравнения для L-функции (1) имеет место расширенная гипотеза Римана. Тем самым теорема полностью доказана. □

2. ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЭЙЛЕРОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ С «ИСПОРЧЕННЫМИ» НА РЕДКОМ МНОЖЕСТВЕ ПРОСТЫХ ИДЕАЛОВ ХАРАКТЕРАМИ ДИРИХЛЕ

Рассмотрим характер Дирихле χ числового поля $\mathbb{K}$ и мультипликативную функцию h, заданную на целых идеалах поля, которая на множестве простых идеалов $\mathfrak{p}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{N(\mathfrak{p}) \le x}{}' 1 = O(x^{1/2+\varepsilon}), \tag{8}$$

принимает значения, равные корням из единицы, отличные от значений $\chi(\mathfrak{p})$. Такие функции будем называть «испорченными» на редком множестве характерами Дирихле.

Рассмотрим эйлерово произведение:

$$f(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{h(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}, \qquad \sigma > 1. \tag{9}$$

Относительно таких функций имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция $f(s)$ вида (9) аналитически продолжима в полуплоскость $\sigma > 1/2$, и в этой полуплоскости возможные нули $f(s)$ совпадают с нулями L-функции Дирихле $L(s,\chi)$.*

Доказательство. Функцию $f(s)$ представим в виде

$$f(s) = L(s,\chi) \cdot f_1(s) \cdot f_2(s),$$

где

$$f_1(s) = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}, \qquad f_2(s) = \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1 - \frac{h(p)}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

причём произведение берётся по редкому множеству простых идеалов, для которых $\chi(\mathfrak{p}) \neq h(\mathfrak{p})$. При $\sigma > 1$ логарифмы этих функций представимы в виде

$$\ln f_1(s) = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{N(\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g_1(s,\chi),$$

$$\ln f_2(s) = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h(\mathfrak{p}^m)}{N(\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{\mathfrak{p}}{}' \frac{h(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} + g_2(s,h),$$

где $g_1(s,\chi)$ и $g_2(s,h)$ — функции, голоморфные в полуплоскости $\sigma \geq 1/2$.

Отсюда в силу условия (8) и рассуждений, приведённых при доказательстве теоремы 1, следует возможность аналитических продолжений функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$ в полуплоскость $\sigma > 1/2$. При этом в этой полуплоскости данные функции не имеют нулей, что и доказывает утверждение теоремы 2. □

Библиографический список

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some problems of partitio numerorum III : On the expression of a number as a sum of primes // Acta Mathematica. 1923. Vol. 44. P. 1–70.
2. *Хейльбронн Х.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1969. С. 310–346.

On a Particular Equivalent of Extended Riemann Hypothesis for Dirichlet L-functions on Numerical Fields

V. A. Matveev, O. A. Matveeva

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, vladimir.matweev@gmail.com, olga.matveeva.0@gmail.com

A condition on summatory function over a set of prime ideals for Dirichlet L-functions on numerical fields is obtained. This condition is equivalent to extended Riemann hypothesis. Analytical properties of Euler products associated with this equivalent are studied.

Key words: extended Riemann hypothesis, Dirichlet L-functions, numerical fields.

References

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of partitio numerorum III : On the expression of a number as a sum of primes. *Acta Mathematica*, 19232, vol. 44, pp. 1–70.
2. Kheil'bronn Kh. ζ-funktsii i L-funktsii [ζ-functions and L-functions]. *Algebraicheskaia teoriia chisel* [Algebraic number theory], Moscow, Mir, 1969, pp. 310–346 (in Russian).