4. *Heyer H.* Probability Measures on Locally Compact Groups. Berlin : Springer, 1977. 531 p.
5. *Billingsley P.* Convergence of Probability Measures. N.Y. : Wiley, 1968. 272 p.
6. *Javtokas A., Laurinčikas A.* On the periodic zeta-function // Hardy-Ramanujan J. 2006. Vol. 29. P. 18–36.
7. *Mergelyan S. N.* Uniform approximation to functions of complex variable // Usp. Matem. Nauk. 1952. Vol. 7. P. 31–122.

On Universality of Certain Zeta-functions

A. Laurinčikas[1], R. Macaitienė[2], D. Mokhov[3], D. Šiaučiūnas[4]

[1]Vilnius University, Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania, antanas.laurincikas@mif.vu.lt

[2]Šiauliai University, P. Višinskio st. 19, LT-77156 Šiauliai, Lithuania, renata.macaitiene@mi.su.lt

[3]Vilnius University, Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania, dmitrij.mochov@mif.vu.lt

[4]Šiauliai University, P. Višinskio st. 19, LT-77156 Šiauliai, Lithuania, siauciunas@fm.su.lt

It is well known that a generalization of the Hurwitz zeta-function — the periodic Hurwitz zeta-function with transcendental parameter is universal in the sense that its shifts approximate any analytic function. In the paper, the transcendence condition is replaced by a simpler one on the linear independence of a certain set.

Key words: periodic Hurwitz zeta-function, space of analytic functions, universality, weak convergence.

References

1. Javtokas A., Laurinčikas A. The universality of the periodic Hurwitz zeta-function. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2006, vol. 17, no. 10, pp. 711–722.
2. Cassels J. W. S. Footnote to a note of Davenport and Heilbronn. *J. London Math. Soc.*, 1961, vol. 36, pp. 171–184.
3. Laurinčikas A., Garunkštis R. *The Lerch Zeta-Function*. Dordrecht, Kluwer, 2002, 189 p.
4. Heyer H. *Probability Measures on Locally Compact Groups*. Berlin, Springer, 1977, 531 p.
5. Billingsley P. *Convergence of Probability Measures*. New York, Wiley, 1968, 272 p.
6. Javtokas A., Laurinčikas A. On the periodic zeta-function. *Hardy-Ramanujan J.*, 2006, vol. 29, pp. 18–36.
7. Mergelyan S. N. Uniform approximation to functions of complex variable. *Uspekhi Matem. Nauk*, 1952, vol. 7, pp. 31–122.

УДК 511.3

К ОЦЕНКЕ ОДНОГО КЛАССА СУММАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. Матвеев

Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com

Для конечнозначных функций натурального аргумента $h(n)$, имеющих ограниченную сумматорную функцию, оцениваются сумматорные функции вида $\sum\limits_{n\le x} h(n)n^{it}$, $1 \le |t| \le T$.

Ключевые слова: числовые характеры, сумматорные функции, степенные ряды.

В работе [1] было показано, что для числовых характеров Дирихле χ при любом действительном t имеет место оценка вида

$$\sum_{n\le x} \chi(n)n^{it} = O(1).$$

В данной работе этот результат обобщается на случай конечнозначных функций натурального аргумента $h(n)$, для которых выполняются условия:

1) $S(x) = \sum\limits_{n\le x} h(n) = O(1)$;

2) функция $g(x)$, заданная степенным рядом вида $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h(n)x^n$, имеет конечный предел в точке $x = 1$.

Для таких функций имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *В любом прямоугольнике* $\{s = \sigma + it \mid 0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1,\ 2 \le |t| \le T\}$ *функция, заданная рядом Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

обладает свойством

$$|f(s)| = O(1),$$

где константа в оценке зависит только от T.

Доказательство. Воспользуемся формулой суммирования Абеля для функций $f(s)$ и $h(n)$ и получим:

$$f(s) = s \int\limits_1^{\infty} \frac{S(u)}{u^{s-1}}\, du,$$

где $S(u) = \sum\limits_{n \le x} h(n)$, что даёт аналитическое продолжение $f(s)$ в полуплоскость $\sigma > 0$.

Рассмотрим преобразование Меллина:

$$f(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int\limits_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h(n) e^{-nx} x^{s-1}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx, \tag{2}$$

где $g(e^{-x}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h(n) e^{-nx}$, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Разобьём интеграл в правой части (2) на два:

$$\int\limits_0^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx = \int\limits_1^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx + \int\limits_0^{1} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx.$$

Так как $g(e^{-x})$ ограничена при $x \in (0, 1)$, то из этого равенства следует, что интеграл в правой части (2) абсолютно сходится при $\sigma > 0$.

По условию $g(x)$ непрерывна на $[0, 1]$. Пусть $P_n(x)$ — последовательность полиномов наилучшего приближения для $g(x)$ на этом отрезке.

Как показано в теореме 6.1 работы [2], в силу того что $g(x)$ на отрезке $(-1, 1)$ определяется степенным рядом с ограниченными коэффициентами, последовательность коэффициентов полиномов $P_n(x)$ равномерно ограничена, т. е. если $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$, то для любых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \overline{0, n}$ имеет место неравенство $|a_k^{(n)}| \le M$.

С помощью (2) представим $f(s)$ в виде

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int\limits_1^{+\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx + \int\limits_0^{1} [g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})] x^{s-1}\, dx + \int\limits_0^{1} P_n(e^{-x}) x^{s-1}\, dx \right).$$

Отсюда при $\sigma > 0$ получаем оценку вида

$$|f(s)| \le \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left[\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_n}{\sigma} + \left| \int\limits_0^{1} P_n(e^{-x}) x^{s-1}\, dx \right| \right].$$

При надлежащем выборе n получаем:

$$|f(s)| \le \frac{1}{|\Gamma(s)|} \left[C_1 + \left| \int\limits_0^{1} P_n(e^{-x}) x^{\sigma-1}\, dx \right| \right], \tag{3}$$

где C_1 не зависит от σ.

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx.$$

Применяя последовательно формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx = \frac{e^{-k}}{s} + \frac{ke^{-k}}{s(s+1)} + \frac{k^2e^{-k}}{s(s+1)(s+2)} + \ldots .$$

Отсюда

$$\int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} e^{-kx}x^{s-1}\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} e^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\ldots(s+m)}\,. \qquad (4)$$

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора в окрестности $x=0$ функции e^x:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}x^m.$$

Проинтегрируем это выражение по $t =: x$ от 0 до x дважды:

$$\int_0^x e^t\,dt = e^x - 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{x^{m+1}}{m+1}\,,$$

$$\int_0^x (e^t-1)\,dt = e^x - 1 - x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = x^2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}\,,$$

$$\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}\,.$$

С учётом этого при $|t| \geq 2$ из (4) получаем:

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\ldots(s+m)}\right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m+2)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{(m+2)!} = \frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\,.$$

Таким образом,

$$\left|\int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}\,dx\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|a_k^{(n)}\right| e^{-k}\left(\frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\right) \leq M\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{e^{-k}}{k^2} - \frac{e^{-k}}{k}\right) \leq M_0,$$

где M_0 не зависит от σ_0.

Отсюда и из (3) получаем:

$$|f(s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s)|}[C_1 + M_0] \leq \frac{C}{|\Gamma(s)|}, \qquad s \in \{\sigma + it \mid 0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1,\ 2 \leq t \leq T\},$$

т. е.

$$|f(s)| = O(1),$$

где константа зависит только от T, что и завершает доказательство теоремы. □

Далее, наряду с рядом Дирихле (1), рассмотрим функциональный ряд вида

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n}\frac{it}{n^s}, \qquad \sigma > 0, \qquad (5)$$

где $S(n) = \sum\limits_{k\leq n} h(k)$. Этот ряд сходится абсолютно при любых $\sigma > 0$ и $|t| \leq T$.

Следующая лемма определяет соотношение между частичными суммами рядов (1) и (5) при $s = it$.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{N} h(n)n^{-it} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S(n)}{n} \frac{it}{n^{it}} + O(1), \tag{6}$$

где константа в оценке не зависит от N и t.

Доказательство. В результате применения формулы суммирования по частям получим:

$$\sum_{n=1}^{N} h(n)n^{-it} = \sum_{n=1}^{N-1} S(n)[n^{-it} - (n+1)^{-it}] + O(1), \tag{7}$$

где константа в оценке не зависит от t и N. Воспользуемся оценкой, полученной в работе [3]:

$$n^{-it} - (n-1)^{-it} + itn^{-1-it} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Из этой оценки и из равенства (7) следует утверждение леммы. □

Теорема 1 и лемма 1 позволяют доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть функция $f_1(s)$ вида (5) при стремлении σ к нулю определяет функцию, непрерывную на каждом отрезке $[2, T]$ мнимой оси. Тогда для любого t, $2 \le |t| \le T$ имеет место оценка*

$$S_t(x) = \sum_{n \le x} h(n)n^{it} = O(1),$$

где константа зависит только от T.

Доказательство теоремы 2 проводится точно так же, как и доказательство аналогичного утверждения в работе [4], имеющего место, в отличие от нашего случая, при более сильных ограничениях.

Библиографический список

1. *Чудаков Н. Г., Бредихин Б. М.* Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп // УМН. 1956. Т. 9. С. 347–360.
2. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1982.
3. *Гельфонд А. О.* Об арифметическом эквиваленте аналитичности L-ряда Дирихле на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$ // Избранные труды. М. : Наука, 1973. С. 310–328.
4. *Матвеев В. А., Матвеева О. А.* О поведении в критической полосе рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами и с ограниченной сумматорной функцией // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 2. С. 106–116.

An Estimate of a Certain Summatory Functions Class

V. A. Matveev

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, vladimir.matweev@gmail.com

In this paper summatory functions of form $\sum\limits_{n \le x} h(n)n^{it}$, $1 \le |t| \le T$ for finite-valued functions $h(n)$ of natural argument with bounded sum function are estimated.

Key words: dirichlet character, summatory functions, power series.

References

1. Chudakov N. G., Bredikhin B. M. Application of Parseval's identity in estimations of summatory functions of Dirichlet characters on numerical semigroups. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1956, vol. 9, pp. 347–360 (in Russian).
2. Dem'ianov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks* [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).
3. Gel'fond A. O. Ob arifmeticheskom ekvivalente analitichnosti L-riada Dirikhle na priamoi [On certain arith-

metical equivalent of analytic property of Dirichlet L-series on $\mathrm{Re}\, s = 1$ line]. *Izbrannye trudy* [Selectas], Moscow, Nauka, 1973. pp. 310–328 (in Russian).
4. Matveev V. A., Matveeva O. A. On behavior in critical strip of Dirichlet series with finite-valued coefficients and bounded summatory function. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2012, vol. 13, iss. 2, pp. 106–116 (in Russian).

УДК 511.3

ОБ ОДНОМ ЭКВИВАЛЕНТЕ РАСШИРЕННОЙ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА ДЛЯ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

В. А. Матвеев[1], О. А. Матвеева[2]

[1]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com

[2]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

Для L-функций Дирихле числовых полей получено условие на сумматорную функцию, рассматриваемую на множестве простых идеалов, эквивалентное расширенной гипотезе Римана. Изучаются аналитические свойства эйлеровых произведений, связанных с этим эквивалентом.

Ключевые слова: расширенная гипотеза Римана, L-функции Дирихле, числовые поля.

ВВЕДЕНИЕ

Харди и Литлвуд в [1] высказали предположение о том, что нетривиальные нули L-функций Дирихле в случае числовых характеров лежат на критической прямой. Это предположение получило название расширенной гипотезы Римана. Соответствующее предположение о нетривиальных нулях L-функций числовых полей также называют расширенной гипотезой Римана.

В данной работе будет доказано утверждение о том, что расширенная гипотеза Римана для L-функций числового поля эквивалентна определённой асимптотике для сумматорной функции характера Дирихле, рассматриваемой на множестве простых идеалов данного поля, и будут рассмотрены аналитические свойства эйлеровых произведений, связанных с этим эквивалентом.

1. УСЛОВИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ НУЛЕЙ L-ФУНКЦИИ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Пусть χ — неглавный первообразный характер Дирихле по модулю m числового поля $\mathbb{K}$, и $L(s,\chi,\mathbb{K})$, $s = \sigma + it$ — соответствующая L-функция, определённая при $\sigma > 1$ следующим образом:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \tag{1}$$

где произведение берётся по всем простым, а сумма — по всем целым идеалам поля $\mathbb{K}$.

В данной работе приведём доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Расширенная гипотеза Римана для L-функции Дирихле* (1) *эквивалентна оценке вида*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p},\\ N(\mathfrak{p})\le x}} \chi(\mathfrak{p}) = O(x^{1/2+\varepsilon}), \tag{2}$$

где суммирование рассматривается по всем простым идеалам, норма которых не превосходит x, ε — произвольное положительное число, а константа в оценке не зависит от x.

Доказательству теоремы 1 предпошлём доказательства двух лемм.