УДК 511.3

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ И ПОВЕДЕНИЕ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

О. А. Матвеева

Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

Строится последовательность полиномов Дирихле, аппроксимирующих L-функции Дирихле, что позволяет эффективно вычислять нули и высказать предположения относительно поведения L-функций Дирихле в критической полосе.

Ключевые слова: L-функции Дирихле, аппроксимирующие полиномы.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается один из подходов к изучению таких аналитических свойств L-функций Дирихле в критической области, как распределение нулей, порядок роста модуля вдоль критической оси, свойство универсальности значений. В основе этого подхода лежит метод редукции к степенным рядам в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле, основные положения которого были разработаны в работе [1]. Этот метод позволяет конструктивно строить последовательность полиномов Дирихле, которые сходятся к L-функциям Дирихле с показательной скоростью в любом прямоугольнике, лежащем в критической полосе. Это позволило [2] получить эффективную схему определения нулей L-функций. В данной работе показано, что численные эксперименты, связанные с поведением аппроксимирующих полиномов, позволяют сформулировать ряд задач для таких полиномов, решение которых позволит опрелить порядок роста модуля вдоль мнимой оси и получить доказательство свойства универсальности, отличное от приведённого в [3] для L-функций Дирихле.

1. КОНСТРУКЦИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ

Рассмотрим L-функцию Дирихле, заданную рядом Дирихле

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \tag{1}$$

где χ — неглавный характер Дирихле, и соответствующий степенной ряд:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) z^n. \tag{2}$$

Так как $g(z)$ — рациональная функция, регулярная в точке 1 и имеющая простые полюсы в корнях из 1 степени d, то существует последовательность полиномов $P_n(x)$, приближающих функцию $g(x)$ на отрезке [0, 1] с показательной скоростью:

$$\max_{x\subseteq[0,1]} |g(x) - P_n(x)| = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \qquad \rho > 1. \tag{3}$$

На основе свойств преобразований Меллина для функций $L(s)$ и $g(e^{-x})$

$$L(s,\chi)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} g(e^{-x}) x^{s-1}\, dx,$$

$$g(e^{-x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s,\chi)\Gamma(s) x^{-s}\, ds, \qquad x > 1,$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера, в работе [4] показано, что полиномы Дирихле $T_n(s)$, которые имеют те же коэффициенты, что и алгебраические полиномы $P_n(x)$, приближают L-функцию Дирихле $L(s,\chi)$ в любом прямоугольнике $0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1$, $0 \le t \le T$ с той же скоростью, что и полиномы $P_n(x)$ приближают функцию $g(x)$ на отрезке [0, 1], а именно имеет место оценка вида

$$|L(s,\chi) - T_n(s)| = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{4}$$

где константа в символе «O» не зависит от n и σ_0. Отметим, что в зависимости от T эта константа растёт как величина $e^T/\sqrt{T}$.

В работе [2] указана вычислительная схема построения полиномов $P_n(x)$, удовлетворяющих оценке (3), а следовательно, и полиномов Дирихле $T_n(s)$, удовлетворяющих оценке (4). Показано, что в случае, когда $g(z)$ регулярна в точке $z = -1$ в качестве полиномов $P_n(x)$ можно взять частичные суммы разложения функции $g(x)$ на отрезке [-1, 1] по полиномам Чебышёва. В противном случае нужно рассматривать разложение по сдвинутым полиномам Чебышёва. В любом случае константа $\rho > 1$ явно вычисляется.

2. ОЦЕНКА СТЕПЕНИ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ПОЛИНОМОВ, НУЛИ КОТОРЫХ В ЗАДАННОМ ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ СОВПАДАЮТ С НУЛЯМИ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ

Рассмотрим прямоугольник $0 < \sigma_0 \le \sigma \le 1$, $0 \le t \le T$. Так как полиномы Дирихле $T_n(s)$ равномерно сходятся к L-функции $L(s,\chi)$, то в силу теоремы Гурвица [5] нули L-функции являются пределами нулей аппроксимирующих полиномов.

Важной задачей является задача определения такого числа n_0, что при $n \ge n_0$ нули полинома $T_n(s)$, лежащие в данном прямоугольнике, совпадают с нулями L-функции. Остановимся на двух моментах, связанных с оценкой величины n_0.

Во-первых, известно [6], что для числа $N(T)$ нулей L-функции, лежащих в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$, имеет место асимптотическая формула:

$$N(T) = \frac{T \ln T}{2\pi} + AT + O(\ln T). \tag{5}$$

Таким образом, среднее расстояние между нулями L-функции не меньше величины

$$\varepsilon = \frac{T}{N(T)} \approx \frac{2\pi}{\ln T}. \tag{6}$$

Выберем такую степень аппроксимирующего полинома, чтобы величина приближения в этом прямоугольнике не превосходила величины ε. Тогда в силу (4) и (6) получим:

$$n > \frac{T}{\ln \rho}. \tag{7}$$

Во-вторых, функция

$$f(t) = T_n\left(\frac{1}{2} + it\right) \tag{8}$$

является целой почти периодической функцией класса $\Delta = \dfrac{\ln n}{2}$. Как показано в [7], для числа нулей $n(T)$ этой функции, лежащих в нашем прямоугольнике, имеет место оценка

$$n(T) \le \frac{\Delta}{\pi} T + \omega(t), \tag{9}$$

где $\omega(t)$ — функция, ограниченная на отрезке [0, T]. В силу (9) при предположении, что нули функции (8) в прямоугольнике с учетом кратности совпадут с нулями L-функции, получаем оценку

$$n \ge 2[T] + 1. \tag{10}$$

В работе [2] было показано, что в результате численных экспериментов при условии

$$n \geq 2T \tag{11}$$

нули аппроксимирующих полиномов $T_n(s)$ в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 \leq t \leq T$, совпадают с нулями L-функций в этом прямоугольнике. В дальнейшем будем считать, что $n \geq 2T$.

3. АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ И ПОВЕДЕНИЕ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

Отметим, что численная схема, приведенная в работе [2], основанная на построении аппроксимирующих полиномов, позволяет достаточно быстро определять нули L-функций, лежащие в критической полосе. Результаты численных экспериментов говорят в пользу расширенной гипотезы Римана. Покажем, что свойства аппроксимирующих полиномов позволяют говорить и о поведении L-функции в критической полосе.

Во-первых, рассмотрим проблему роста модуля L-функции на критической прямой.

Аналогом известной гипотезы Линделёфа о порядке роста модуля дзета-функции Римана на критической прямой в случае L-функций Дирихле является следующее утверждение [8]:

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| = O\left(|t|^{\varepsilon}\right),$$

где ε — любое положительное число.

Легко показать, что это утверждение эквивалентно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого n

$$\max_{0<t\leq n/2} \left| T_n\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = O(n^{\varepsilon}).$$

Численная схема определения полиномов $T_n(s)$ позволяет вычислять величины $\max\limits_{0<t\leq n/2} |T_n(1/2+it)|$.

Результаты численного эксперимента для различных характеров говорят о том, что

$$\max_{0<t\leq n/2} \left| T_n\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = O(\ln n).$$

Если это так, то

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| = O(\ln |t|).$$

В этом направлении необходимо продолжить серию вычислений.

Во-вторых, можно описать область значений полинома $T_n(s)$ в случае $s = \sigma + it$, $0 < \sigma < 1$, t — любое. Она содержит круг (без нуля), радиус которого стремится к бесконечности, когда $n \to \infty$. Отсюда сразу получается ряд утверждений относительно значений L-функций Дирихле в критической полосе, аналогичных утверждениям относительно значений дзета-функции Римана, приведенным в [9].

Рассмотрим известное свойство универсальности, сформулированное в следующем виде. Дан отрезок $I = [\sigma + it_0, 1/2]$. Пусть $\varphi(s)$ — функция, регулярная в некоторой области, содержащей этот отрезок, и не равная нулю в точках отрезка. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует T такое, что

$$|\varphi(s) - L\left(s + iT\right)| < \varepsilon, \qquad s \in I.$$

Это утверждение допускает переформулироку в терминах полиномов $T_n(s)$: для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие n и $T \leq n/2$, что

$$|\phi(s) - T_n\left(s + iT\right)| < \varepsilon, \qquad s \in I.$$

Последнее условие легко доказывается с помощью теоремы Кронекера, если только величина почти периода $l \leq n/2$.

Результаты численных экспериментов говорят в пользу этого неравенства. Отметим, что аналогичные факты имеют место в случае целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Библиографический список

1. *Кузнецов В. Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 6. С. 805–812.
2. *Коротков А. Е., Матвеева. О. А* Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определённых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2011. Т. 24, вып. 17. С. 47–53
3. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М. : Физматлит, 1994. 376 с.
4. *Кузнецов В. Н., Водолазов А. М.* Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 2. С. 2–11.
5. *Титчмарш Е. К.* Теория функций. М. : Наука, 1980. 464 с.
6. *Прахар К.* Распределение простых чисел. М. : Мир, 1967. 511 с.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М. : Изд-во техн.-теоретич. лит., 1956. 632 с.
8. *Туран П.* О новых результатах в аналитической теории чисел // Проблемы аналитической теории чисел. М. : Мир, 1975. С. 118–142.
9. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М. : Изд-во иностр. лит., 1953. 409 с.

Approximation Polynomials and Dirichlet L-functions Behavior in the Critical Strip

O. A. Matveeva

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrakhanskaya st., 83, olga.matveeva.0@gmail.com

In this paper a sequence of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions is constructed. This allows to calculate zeros of L-functions in an effective way and make an assumptions about Dirichlet L-function behavior in the critical strip.

Key words: Dirichlet L-functions, approximation polynoms.

References

1. Kuznetsov V. N. Analog of Szegö's theorem for a class of Dirichlet series. *Math. Notes*, 1984, vol. 35, iss. 6, pp. 903–907.
2. Korotkov A. E., Matveeva O. A. Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej celyh funkcij, opredeljonnyh rjadami Dirihle s periodicheskimi kojefficientami. [On a computing algorithm of calculation of zeroes of the integral functions]. *Nauch. vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo un-ta. Ser. Matematika. Fizika*, 2011, vol. 24, iss. 17, pp. 47–53 (in Russian).
3. Voronin S. M., Karacuba A. A. *Dzeta-funktsiia Rimana* [The Riemann Zeta-Function]. Moscow, Fizmatlit, 1994, 376 p. (in Russian).
4. Kuznetsov V. N., Vodolazov A. M. Approksimacionnyj kriterij periodichnosti konechnoznachnyh funkcij natural'nogo argumenta [Approximated criterion for periodicity of the finitely valued functions of a natural argument]. *Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkc. analizu i smezhnym voprosam : Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2003, iss. 2, pp. 2–11 (in Russian).
5. Titchmarsh E. K. *Teoriia funktsii* [Function theory]. Moscow, Nauka, 1980, 464 p. (in Russian).
6. Prahar K. *Raspredelenie prostykh chisel* [Distribution of primes]. Moscow, Mir, 1967, 511 p. (in Russian).
7. *Levin B. Ja.* Raspredelenie kornej celyh funkcij [Distribution of roots of integer functions]. Moscow, Izd-vo tehniko-teoretich. literat., 1956, 632 p. (in Russian).
8. Turan P. O novyh rezul'tatath v analiticheskoj teorii chisel [On a new results in number theory]. *Problemy analiticheskoj teorii chisel*, Moscow, Mir, 1975, pp. 118–142 (in Russian).
9. Titchmarsh E.C. *Teoriia dzeta-funktsii Rimana* [The Theory of the Riemann Zeta-Function]. Moscow, 1930, 409 p. (in Russian).