принадлежат $\Pi(\delta)$ и для каждого Γ_k конкретной группы существует натуральное t_k, что $\Gamma_k = \Gamma + it_k$, где Γ — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы. Аналогичное построение проводится и для второй полуполосы из леммы 4. Построенные в ней контуры обозначим через Γ_k $(k = -1, -2, \ldots)$.

Лемма 13. *Пусть J — любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел. Тогда имеет место оценка $\left\| \sum\limits_{k\in J} \int_{\Gamma_k} R(\mu) f\, d\mu \right\| \le C$, равномерная по J.*

Лемма 14. *Система с.п.ф. оператора L полна в $L_2^3[0,1]$.*

Из лемм 13 и 14 так же, как в [7], следует

Теорема 2. *Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2^3[0,1]$. При этом в скобки следует объединять те с.п.ф., которые соответствуют собственным значениям λ_m, для которых числа $i\lambda_m/\sqrt{d_1}$ попали внутрь контуров Γ_k области S и в аналогичные контуры из оставшихся нерассмотренных областей.*

Библиографический список

1. *Хромов А.П.* Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Доклады РАЕН. 2004. № 4. С. 80–87.

2.*Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 97–110.

3. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1982. № 6. С. 12–21.

4. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г.Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.

5. *Рапоппорт И.М.* О некоторых асимтотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР. 1954.

6. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием// Математика. Механика: Сб. науч.тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80–82.

7. *Курдюмов В.П., Хромов А.П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с интегральным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С.61–63.

УДК 514.772.2+517.97

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н.М. Медведева

Волгоградский государственный университет,
кафедра информатики и экспериментальной математики
E-mail: natasha_medvedeva@volsu.ru, nmedv@mail.ru

В данной работе вычисляются первая и вторая вариации функционала типа площади для поверхностей вращения; формулируется признак устойчивости и неустойчивости в терминах локальных координат на основе оценок специальных интегралов. Приводятся примеры нахождения областей устойчивости и неустойчивости, в том числе и для p-минимальных поверхностей.

Research of Stability for Extremal Rotation Surfaces

N.M. Medvedeva

In this work we obtain the first and second variations of area type functional for rotation surfaces formulas. We proof the feature of stability and instability in the terms of the local coordinates and special integrals. We consider some examples by application our results for research if stability for rotation surfaces.

Рассмотрим C^2-гладкую поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, заданную радиус-вектором $\vec{r}(u,v)$, где u, v — главные направления поверхности, и C^2-гладкую функцию $\phi:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\phi(-\xi) = \phi(\xi)$.

Если обозначить через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определена величина

$$F(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \phi(\xi_3) d\mathcal{M}, \tag{1}$$

где $d\mathcal{M}$ — элемент площади на $\mathcal{M}$. Заметим, что величина (1) не зависит от выбора нормали ξ.

Будем говорить, что поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной* (или — *экстремалью* функционала (1)), если первая вариация функционала (1) равна нулю (ниже подробно приведено построение вариаций).

Данная работа посвящена исследованию устойчивости экстремалей функционала типа площади (1). Рассматриваемые здесь функционалы являются многомерными, простейшим примером которых служит функционал площади [1, гл. 6, §37] (это частный случай функционала (1) при $\phi(\xi_3) \equiv 1$) на двумерной поверхности $\int\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,dxdy$, где $D \subset \mathbb{R}^2(x,y)$ — область изменения параметров x, y; $f(x,y) \in \mathbb{R}^3$ — двумерная поверхность; E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности.

Отметим, что при $\phi(\xi_3) \equiv 1$ экстремалями функционала (1) являются минимальные поверхности, и соответствующая вариационная задача ставится на минимум. Если же $\phi(\xi_3) = \sqrt{2\xi_3^2 - 1}$, то экстремалями функционала (1) являются максимальные поверхности [2] в пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}^3_1$, для которых вариационная задача ставится на максимум.

Известно, что одной из задач теории минимальных поверхностей является задача об определении условий устойчивости. Устойчивость понимается как знакоопределенность второй вариации функционала (1) при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$ с фиксированием границы $\partial\mathcal{M}$. Имеется ряд работ, посвященных исследованию устойчивости минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах: А.А. Тужилина, А.Т. Фоменко, Ю.А. Аминова, В.А. Клячина, В.М. Миклюкова, В.Г. Ткачева, А.В. Погорелова, do Carmo M., C.K. Penga, S.T. Yau, R. Finn, J. Simons и др. Подобные вопросы тесно связаны с физическими задачами о равновесии различных систем и описании их устойчивых и неустойчивых состояний. В большинстве случаев решение сводится к исследованию положительной определенности второй вариации специального функционала, связанного с потенциальной энергией системы.

Рассмотренные в данной работе экстремали функционала типа площади также имеют физический смысл и непосредственное применение в теории капиллярных поверхностей.

Введем понятие вариации функционала.

Пусть V — C^2-векторное поле, определенное в окрестности поверхности $\mathcal{M}$ и такое, что выполнены условия: $V|_{\partial\mathcal{M}} = 0$; $V|_{\mathcal{M}} = h \cdot \xi$, где $h \in C^2_0(\mathcal{M})$, ξ — поле единичных нормалей к поверхности; интегральными кривыми поля V являются прямые линии и вдоль каждой интегральной кривой $|V| = \mathrm{const}$.

Ясно, что любое векторное поле $V = h \cdot \xi$, заданное вдоль $\mathcal{M}$, можно продолжить в некоторую окрестность $\mathcal{M}$ так, что будут выполнены сформулированные выше условия.

Пусть $g_t(x):\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов векторного поля V, то есть $g_t(x)$ является решением задачи Коши:

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = V(g_t(x)), \qquad g_t(x)|_{t=0} = x.$$

Положим $\mathcal{M}_t = g_t(\mathcal{M})$. Ясно, что $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$.

Определение 1. Поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю, т. е. $\displaystyle \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{M}_t} \phi(\xi)\,d\mathcal{M}_t\Big|_{t=0} = 0.$

Определение 2. Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ *устойчива (неустойчива)*, если вторая вариация функционала (1) $\displaystyle \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{\mathcal{M}_t} \phi(\xi)\,d\mathcal{M}_t\Big|_{t=0}$ знакоопределена (не является знакоопределенной) при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$ с фиксированием границы $\partial\mathcal{M}$.

Замечание. Отметим, что возможен и иной подход к определению устойчивости экстремальной поверхности. Например, в работах [3], [4] применяется понятие индекса. Индекс минимальной поверхности определяет степень ее неустойчивости. Если индекс не равен нулю, то минимальная поверхность неустойчива.

Далее будем рассматривать поверхность $\mathcal{M}$, заданную радиус-вектором

$$\vec{r}(u,v) = \{r(u)\cos v, r(u)\sin v, u\}, \tag{2}$$

где $u \in (a,b) \subset \mathbb{R},\ v \in (0,2\pi)$, $r(u)$ — C^2-гладкая функция на (a,b) и функционал (1).

Обозначим

$$\begin{gathered}\Phi_1 = \phi'\dot{r}\sqrt{1+\dot{r}^2} + \phi(1+\dot{r}^2), \qquad \Phi_2 = \phi'' + \Phi_1,\\ \alpha = \alpha(u) = \Phi_2\frac{r}{(1+\dot{r}^2)^{3/2}}, \qquad \beta = \beta(u) = \Phi_1\frac{r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1}{r(1+\dot{r}^2)^{5/2}}.\end{gathered} \tag{3}$$

На основе работы [5] были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус-вектором* (2), *является экстремальной тогда и только тогда, когда $\Phi_1 = \Phi_2\, r\ddot{r}/(1+\dot{r}^2)$. Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ устойчива тогда и только тогда, когда квадратичная форма*

$$\int_a^b \{\alpha h'^2 - \beta h^2\}\, dt \tag{4}$$

знакоопределена в классе липшицевых функций $h : M \to \mathbb{R}$, таких что $h(a) = h(b) = 0$.

Следствие 1.1. *Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус-вектором* (2), *является устойчивой, если $\alpha\beta \leqslant 0$.*

Теорема 2. *Поверхность $\mathcal{M}$, заданная радиус-вектором* (2), *является экстремалью функционала* (1), *тогда и только тогда, когда выполнено одно из равенств:*

$$\Phi_1 = \Phi_2\, r\ddot{r}/(1+\dot{r}^2) \qquad \textit{или} \qquad \frac{d}{du}\left(\left(\phi' \frac{\dot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}} + \phi\right)\frac{r}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}\right) = 0.$$

На основании теоремы 1 и определения устойчивости имеет место еще одна теорема об устойчивости поверхности вращения, которая в отличие от следствия 1.1 является признаком устойчивости (неустойчивости) для других классов поверхностей, у которых $\alpha\beta \leqslant \nu$.

Пусть $\sup\limits_{(a,b)} \alpha\beta = \nu^2 < +\infty$ (случай $\nu \equiv 1$ был рассмотрен в [5]). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ задана радиус-вектором* (2). *Для положительных функций α, β поверхность $\mathcal{M}$ является устойчивой, если $\int\limits_a^b \frac{dt}{\alpha} \leqslant \frac{\pi}{\nu}$, и неустойчивой, если $\int\limits_a^b \beta\, dt > \pi\nu$.*

Прежде чем перейти к доказательству сформулированных результатов, приведем обозначения и теоремы, на которые будем ссылаться. Теоремы 4 и 5 были доказаны в работе [5].

Обозначим $D\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}, \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}, \frac{\partial\phi}{\partial\xi_3}\right)$, $D^2\phi = \left\|\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|_{i,j=1}^3$, E_i — главные направления поверхности, k_i — главные кривизны поверхности.

Теорема 4. *C^2-гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, заданная радиус-вектором $\vec{r}(u, v)$, где u, v — главные направления поверхности, является экстремальной тогда и только тогда, когда*

$$2H\phi = \frac{1}{|\vec{r}_u||\vec{r}_v|}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v|\langle D\phi, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(|\vec{r}_u||\vec{r}_v|\langle D\phi, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}\rangle\right)\right). \tag{5}$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ будет устойчивой (неустойчивой) тогда и только тогда, когда знакоопределена (не является знакоопределенной) квадратичная форма

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \big\{D^2\phi(\nabla h, \nabla h) + (\phi - \langle D\phi, \xi\rangle)\left(|\nabla h|^2 + (k_1^2 + k_2^2)\right) -$$

$$-h^2\left(k_1^2 D^2\phi\left(\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}\right) + k_2^2 D^2\phi\left(\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}\right)\right)\Big\}\, |\vec{r}_u||\vec{r}_v|\, du\, dv \tag{6}$$

в классе функций $h \in C_0^2(\mathcal{M})$.

Следующее утверждение обобщает известное свойство гармоничности координатных функций минимальных поверхностей. Для p-минимальных поверхностей в работе В. Г. Ткачева аналогичное равенство было положено в основу их определений (см. [6]).

Теорема 5. *Пусть $f = x_3$ и $\phi = \phi(\xi_3)$. Тогда в метрике экстремальной поверхности $\mathcal{M}$ выполнено равенство* $\operatorname{div}((\phi - \phi'\xi_3)\nabla f) = 0$.

Доказательство теоремы 1. Запишем (5) и (6) для поверхности, заданной радиус-вектором (2), и функционала (1).

С этой целью вычислим H, $\langle D\phi, \vec{r}_u/|\vec{r}_u|^2\rangle$ и $\langle D\phi, \vec{r}_v/|\vec{r}_v|^2\rangle$. Обозначая $r_u = \dot{r}$ и $r_{uu} = \ddot{r}$, получим

$$\vec{r}_u = \{\dot{r}\cos v, \dot{r}\sin v, 1\}, \qquad \vec{r}_v = \{-\dot{r}\sin v, r\cos v, 0\},$$

$$|\vec{r}_u|^2 = \dot{r}^2 + 1,\ |\vec{r}_v|^2 = r^2, \qquad (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0,\ |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = r\sqrt{1+\dot{r}^2}. \tag{7}$$

Тогда очевидно, что $\dfrac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} = \left\{\dfrac{\dot{r}}{1+\dot{r}^2}\cos v, \dfrac{\dot{r}}{1+\dot{r}^2}\sin v, \dfrac{1}{1+\dot{r}^2}\right\}$, $\dfrac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} = \left\{-\dfrac{1}{r}\sin v, \dfrac{1}{r}\cos v, 0\right\}$.

Используя равенства (7), запишем первую квадратичную форму $dS^2_{\mathcal{M}}$ поверхности $\mathcal{M}$, заданной радиус-вектором (2), $dS^2_{\mathcal{M}} = (1+\dot{r}^2)du^2 + r^2dv^2$. Используя стандартные формулы (см., например, [7, гл. 2, §5]), находим главные кривизны поверхности $\mathcal{M}$: $k_1 = \dfrac{\ddot{r}}{(1+\dot{r}^2)^{3/2}}$, $k_2 = -\dfrac{1}{r\sqrt{1+\dot{r}^2}}$ и среднюю кривизну поверхности $2H = \dfrac{r\ddot{r} - \dot{r}^2 - 1}{r(1+\dot{r}^2)^{3/2}}$.

Так как функция ϕ зависит только от третьей координаты единичной нормали, то имеем $D\phi = (0,0,\phi')$, $\left\langle D\phi, \dfrac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}\right\rangle = \frac{\phi'}{1+\dot{r}^2}$, $\left\langle D\phi, \dfrac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}\right\rangle = 0$. Подставляя подсчитанное в (5) получаем уравнение экстремалей поверхности $\mathcal{M}$

$$\phi'' r\ddot{r} + \phi'\dot{r}\sqrt{1+\dot{r}^2}(r\ddot{r} - \dot{r}^2 - 1) + \phi(1+\dot{r}^2)(r\ddot{r} - \dot{r}^2 - 1) = 0. \tag{8}$$

Далее приступим к записи второй вариации. С этой целью вычислим выражения, требуемые для (6).

Заметим, что в метрике поверхности $dS^2_{\mathcal{M}} = |\vec{r}_u|^2du^2 + |\vec{r}_v|^2dv^2$ градиент вычисляется по формуле

$$\nabla h = h_u\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2} + h_v\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2} = \left\{h_u\frac{\dot{r}\cos v}{1+\dot{r}^2} - h_v\frac{\sin v}{r}, h_u\frac{\dot{r}\sin v}{1+\dot{r}^2} - h_v\frac{\cos v}{r}, h_u\frac{1}{1+\dot{r}^2}\right\},$$

и тогда имеем $|\nabla h|^2 = \dfrac{h_u^2}{|\vec{r}_u|^2} + \dfrac{h_v^2}{|\vec{r}_v|^2} = \dfrac{h_u^2}{1+\dot{r}^2} + \dfrac{h_v^2}{r^2}$. Очевидно, что единичная нормаль в метрике данной поверхности имеет координаты

$$\xi = \left\{\frac{\cos v}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}; \frac{\sin v}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}; -\frac{\dot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}\right\}. \tag{9}$$

Тогда несложно видеть, что $\langle D\phi, \xi\rangle = -\phi'\dfrac{\dot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}$. Так как $D^2\phi = \left\|\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right\|^3_{i,j=1}$ и функция $\phi = \phi(\xi_3)$, то имеем $D^2\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi'' \end{pmatrix}$.

Далее вычислим $D^2\phi$ на векторах ∇h и E_i:

$$D^2\phi(\nabla h, \nabla h) = \phi'' h_u^2\frac{1}{(1+\dot{r}^2)^2}, \qquad D^2\phi\left(\frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}, \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|^2}\right) = \frac{\phi''}{(1+\dot{r}^2)^2}, \qquad D^2\phi\left(\frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}, \frac{\vec{r}_v}{|\vec{r}_v|^2}\right) = 0.$$

Таким образом, подставляя найденные значения в (6), окончательно получим

$$\int\limits_{\mathcal{M}}\left\{h_u^2\frac{r}{(1+\dot{r}^2)^{3/2}}\left(\phi'' + \phi'\dot{r}\sqrt{1+\dot{r}^2} + \phi(1+\dot{r}^2)\right) + h_v^2\frac{\phi'\dot{r}\sqrt{1+\dot{r}^2} + \phi(1+\dot{r}^2)}{r^2(1+\dot{r}^2)} - \right.$$
$$\left. -h^2\frac{\phi'\dot{r}\sqrt{1+\dot{r}^2} + \phi(1+\dot{r}^2)}{r(1+\dot{r}^2)^{3/2}}\left(2 - \frac{\phi''}{\phi'' + \phi'\dot{r}\sqrt{1+\dot{r}^2} + \phi(1+\dot{r}^2)}\right)\right\}du\,dv.$$

Далее, принимая во внимание введенные обозначения (3) и полагая $h = h(u)$, получаем требуемое. Теорема 1 доказана.

Доказательство следствия 1.1. Следствие становится очевидным, если применить к формуле второй вариации поверхности (4) определение устойчивости.

Пример 1. Пусть задана функция $\phi(\xi_3) = -\dfrac{1}{\xi_3}$. Зная координатную запись единичной нормали (9), будем иметь, что $\phi\left(-\dfrac{\dot{r}}{\sqrt{1+\dot{r}^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{\dot{r}^2+1}}{\dot{r}}$, $\phi' = \dfrac{1+\dot{r}^2}{\dot{r}^2}$. Применяя теорему 2, находим функцию

$r(u)$ радиус-вектора (2) экстремальной поверхности $\mathcal{M}$. С этой целью решаем уравнение

$$\left(\frac{1+\dot r^2}{\dot r^2}\frac{\dot r}{\sqrt{1+\dot r^2}}+\frac{\sqrt{\dot r^2+1}}{\dot r}\right)\frac{r}{\sqrt{1+\dot r^2}}=C,$$

где С — некоторая константа интегрирования, и находим его общее решение $r=e^{2u/C+C_1}$. Пусть $C_1=0$ и $C=-1$. Выпишем функции α и β, обозначения которых введены в (3), для данной экстремальной поверхности: $\alpha=-4+e^{4u}$, $\beta=-\dfrac{(8+e^{4u})e^{2u}}{4+e^{2u}}$. Видно, что α меняет знак в точке $u_0=\dfrac{1}{4}\ln 4$, т. е. на интервале $(-\infty;\, u_0)$ она отрицательна, а при $u\in(u_o;\,+\infty)$ принимает положительные значения; β на всем интервале отрицательна. Следовательно, применяя следствие 1.1, получим устойчивую часть поверхности при $u\in(u_o;\,+\infty)$.

Однако следует заметить, что возможен вариант, когда $\alpha\beta\geqslant 0$. Тогда, как показывает приведенный ниже пример, также возможна устойчивость поверхности $\mathcal{M}$.

Пример 2. Пусть задана функция

$$\phi(\xi_3)=\sqrt{2\xi_3^2-1}. \tag{10}$$

Зная координатную запись единичной нормали (9), будем иметь, что

$$\phi\left(-\frac{\dot r}{\sqrt{1+\dot r^2}}\right)=\sqrt{\frac{\dot r^2-1}{\dot r^2+1}},\qquad \phi'=-\frac{2\dot r}{\sqrt{\dot r^2-1}}\ . \tag{11}$$

Применяя теорему 2, из уравнения $\left(-\dfrac{2\dot r}{\sqrt{\dot r^2-1}}\dfrac{\dot r}{\sqrt{1+\dot r^2}}+\sqrt{\dfrac{\dot r^2-1}{\dot r^2+1}}\right)\dfrac{r}{\sqrt{1+\dot r^2}}=C$, где C — некоторая константа интегрирования, находим функцию $r(u)$ радиус-вектора (2) экстремальной поверхности $\mathcal{M}$: $r=\operatorname{sh}u$. Далее, подставляя в (11) соответствующие производные $\dot r=\operatorname{ch}u$, $1+\dot r^2=1+\operatorname{ch}^2u$, находим для данной экстремальной поверхности функцию $\phi=\dfrac{\operatorname{sh}u}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2u}}$. Затем вычисляем ее производные: $\phi'=-2\operatorname{cth}u$, $\phi''=-2\dfrac{(1+\operatorname{ch}^2u)^{3/2}}{\operatorname{sh}^3u}$ и функции α и β, обозначения которых введены в (3)

$$\alpha=\frac{\operatorname{sh}u}{(1+\operatorname{ch}^2u)^{3/2}}\Big(-2\frac{(1+\operatorname{ch}^2u)^{3/2}}{\operatorname{sh}^3u}-2\operatorname{cth}u\operatorname{ch}u\sqrt{1+\operatorname{ch}^2u}+\frac{\operatorname{sh}u}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2u}}(1+\operatorname{ch}^2u)\Big)=-\frac{1+\operatorname{ch}^2u}{\operatorname{sh}^2u},$$

$$\beta=\frac{1+\operatorname{ch}^2u+\operatorname{sh}^2u}{\operatorname{sh}u(1+\operatorname{ch}^2u)^{5/2}}\Big(-2\operatorname{cth}u\operatorname{ch}u\sqrt{1+\operatorname{ch}^2u}+\frac{\operatorname{sh}u}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2u}}(1+\operatorname{ch}^2u)\Big)=-2\Big(\frac{1}{\operatorname{sh}^2u}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2u(1+ch^2u)}\Big).$$

Далее, применяя теорему 1, выпишем квадратичную форму (4)

$$\int_a^b\{\alpha h'^2-\beta h^2\}\,du=\int_a^b\left(\left(-\frac{1+\operatorname{ch}^2u}{\operatorname{sh}^2u}\right)h'^2+2h^2\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2u}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2u(1+ch^2u)}\right)\right)du\leqslant$$

$$\leqslant\int_a^b\left(-2\frac{h'^2}{\operatorname{sh}^2u}+2\frac{h^2}{\operatorname{sh}^2u}\right)du\leqslant-2\int_a^b\left(\frac{h'^2}{\operatorname{sh}^2u}-\frac{h^2}{\operatorname{sh}^2u}\right)du.$$

Покажем, что $\int_a^b\left\{\dfrac{h'^2}{\operatorname{sh}^2u}-\dfrac{h^2}{\operatorname{sh}^2u}\right\}du\geqslant 0$. Тогда для всех h будет следовать, что квадратичная форма (4) неположительно определена.

Пусть $y=\operatorname{ch}u$. Заметим, что $\left(\dfrac{y'}{\operatorname{sh}^2u}\right)'=-\dfrac{y}{\operatorname{sh}^2u}$, $\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}u}\right)'=-\dfrac{\operatorname{ch}u}{\operatorname{sh}^2u}=-\dfrac{y}{\operatorname{sh}^2u}$. Тогда очевидно, что для функций $h(a)=h(b)=0$ выполнено равенство

$$0=\int_a^b\left(\frac{y'}{\operatorname{sh}^2u}\cdot\frac{h^2}{y}\right)'du=\int_a^b\left(\frac{y'}{\operatorname{sh}^2u}\right)'\frac{h^2}{y}\,du-\int_a^b\frac{y'}{\operatorname{sh}^2u}\cdot\frac{y'}{y^2}\cdot h^2\,du+2\int_a^b\frac{h'}{y}\cdot\frac{y'}{\operatorname{sh}^2u}\cdot h\,du=$$

$$=-\int_a^b\frac{h^2}{\operatorname{sh}^2u}du-\int_a^b h^2\frac{y'^2}{y^2\operatorname{sh}^u}du+2\int_a^b\frac{y'}{y}\cdot\frac{hh'}{\operatorname{sh}^2u}du-\int_a^b\frac{h'^2}{\operatorname{sh}^2u}du+\int_a^b\frac{h'^2}{\operatorname{sh}^2u}du=$$

$$= \int_a^b \left(\frac{h'^2}{\operatorname{sh}^2 u} - \frac{h^2}{\operatorname{sh}^2 u} \right) du - \left\{ \int_a^b \left(\left(\frac{y'h}{y} \right)^2 - 2\frac{y'}{y} hh' + h'^2 \right) \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u}\, du \right\} \leqslant \int_a^b \left(\frac{h'^2}{\operatorname{sh}^2 u} - \frac{h^2}{\operatorname{sh}^2 u} \right) du.$$

Таким образом, пример иллюстрирует теорему 1.

Как было замечено выше, случай $\phi(\xi_3) = \sqrt{2\xi_3^2 - 1}$ соответствует классу максимальных поверхностей в пространстве-времени Минковского $\mathbb{R}_1^3$, которые устойчивы и глобально максимизируют площадь в $\mathbb{R}_1^3$ (см., например, [8]).

Доказательство теоремы 2. Заметим, что используя теорему 5, уравнение экстремалей (8) можно записать в виде

$$\frac{d}{du} \left(\left(\phi' \frac{\dot r}{\sqrt{1+\dot r^2}} + \phi \right) \frac{r}{\sqrt{1+\dot r^2}} \right) = 0. \tag{12}$$

Действительно, производя непосредственное дифференцирование (12), приходим к (8). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Так как $\alpha\beta \leqslant \nu^2$, то справедливо неравенство

$$\int\limits_a^b \left\{ \alpha h'^2 - \beta h^2 \right\} du \geqslant \int\limits_a^b \left\{ \alpha h'^2 - \frac{\nu^2 h^2}{\alpha} \right\} du.$$

Таким образом, чтобы экстремальная поверхность вращения была устойчивой, достаточно

$$\int\limits_a^b \left\{ \alpha h'^2 - \frac{\nu^2 h^2}{\alpha} \right\} du \geqslant 0. \tag{13}$$

Сделаем замену в интегралах и рассмотрим их отношение.

Пусть $y(u) = \int_0^u dt/\alpha(t),\ t \in [0, b-a]$. Следовательно, $dy = du/\alpha(u)$ и $h'_u = h'_y y'_u = h'_y/\alpha(u)$. Тогда

$$\frac{\int\limits_a^b \alpha h'^2\, du}{\int\limits_a^b \frac{\nu^2 h^2}{\alpha}\, du} = \frac{1}{\nu^2} \frac{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} h'^2_y\, dy}{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} h^2(y)\, dy}.$$

Применяя неравенство Виртингера [9, §7.7], получим

$$\frac{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} h'^2_y dy}{\int\limits_{y(a)}^{y(b)} h^2(y) dy} \geqslant \frac{\pi^2}{\left(\int\limits_a^b du/\alpha \right)^2}. \tag{14}$$

Далее, сопоставляя (13) и (14), будем иметь неравенство для устойчивости поверхности вращения.

Для доказательства неустойчивости поступим аналогичным образом.

Так как $\alpha\beta \leqslant \nu^2$, то справедливо неравенство $\int\limits_a^b \left\{ \alpha h'^2 - \beta h^2 \right\} du \leqslant \int\limits_a^b \left\{ \frac{\nu^2 h'^2}{\beta} - \beta h^2 \right\} du.$

Таким образом, чтобы экстремальная поверхность вращения была неустойчивой, достаточно, чтобы существовала функция $h \in C_0^1(a,b)$, такая что $\int\limits_a^b \left\{ \frac{\nu^2 h'^2}{\beta} - \beta h^2 \right\} du \leqslant 0.$

Рассмотрим функцию h, заданную равенством $h(u) = \sin\left(\pi \frac{\int\limits_a^u \beta\, du}{\int\limits_a^b \beta\, du} \right)$. Тогда

$$\nu^2 \frac{\int\limits_a^b \frac{h'^2}{\beta}\, du}{\int\limits_a^b \beta h^2\, du} = \nu^2 \frac{\pi^2}{\left(\int\limits_a^b \beta\, du \right)^2} \cdot \frac{\int\limits_a^b \beta \cos^2\left(\pi \frac{\int_a^u \beta\, du}{\int_a^b \beta\, du} \right) du}{\int\limits_a^b \beta \sin^2\left(\pi \frac{\int_a^u \beta\, du}{\int_a^b \beta\, du} \right) du} =$$

$$= \nu^2 \frac{\pi^2}{\left(\int\limits_a^b \beta\, du\right)^2} \cdot \frac{\int\limits_a^b \beta \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\int_a^u \beta\, du}{\int_a^b \beta\, du}\right)\right) du}{\int\limits_a^b \beta \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{\int_a^u \beta\, du}{\int_a^b \beta\, du}\right)\right) du} = \nu^2 \frac{\pi^2}{\left(\int\limits_a^b \beta\, du\right)^2},$$

так как интегрируя по частям, получим, что $\int\limits_a^b \beta \cos\left(2\pi \frac{\int_a^u \beta\, du}{\int_a^b \beta\, du}\right) du = 0$. Следовательно, при выполнении условия $\int\limits_a^b \beta dt > \pi\nu$ поверхность будет неустойчива. Теорема 3 доказана.

Для иллюстрации полученных в теореме 3 результатов приведем пример, в ходе которого выпишем функцию $\phi(\xi_3)$. Найдем поверхности, являющиеся экстремалями функционала, и определим области устойчивости и неустойчивости данных экстремальных поверхностей.

Пример 3. Положим на основании (9) функцию $\phi(\xi_3) = \phi\left(-\dot r/\sqrt{1+\dot r^2}\right)$ для поверхности, заданной радиус-вектором (2), и обозначим

$$\tau = -\dot r/\sqrt{1+\dot r^2}. \tag{15}$$

Замечание. В работе [5] было установлено, что гауссово отображение экстремальной поверхности является отображением с ограниченным искажением. Там же было отмечено, что коэффициенты искажения экстремальных и p-минимальных поверхностей совпадают в случае $\dfrac{\phi''(1-\tau^2)}{\phi - \phi'\tau} = p - 2$.

Таким образом, решая данное дифференциальное уравнение, мы найдем такие функции, при которых экстремалями функционала (1) будут p-минимальные повехности, рассматриваемые в работе [6]. Такие поверхности характеризуются тем, что функция x_3 в метрике поверхности $\mathcal{M}$ является p-гармонической.

Получаем функцию $\phi(\tau) = \tau\left(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\int\limits_{\tau(t_0)}^{\tau(t)} \dfrac{(1-\tau^2(t))^{(p-2)/2}}{\tau^2} d\tau\right)$, где $\mathcal{C} = (\phi'(\tau(t_0))\tau(t_0) - \phi(\tau(t_0)))\times$ $\times\,(1-\tau^2(t_0))^{(2-p)/2}$, $\mathcal{C}_1 = \dfrac{\phi(\tau(t_0))}{\tau(t_0)}$.

Для того чтобы получить решение уравнения экстремалей (8), вычислим ϕ'_τ и $\phi''_{\tau\tau}$, т. е.

$$\phi'(\tau) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\frac{(1-\tau^2)^{(p-2)/2}}{\tau} + \mathcal{C}\int\limits_{\tau(t_0)}^{\tau(t)} \frac{(1-\tau^2)^{(p-2)/2}}{\tau^2}\, d\tau, \tag{16}$$

$$\phi''(\tau) = -\mathcal{C}(p-2)(1-\tau^2)^{(p-4)/2}. \tag{17}$$

Итак, мы обладаем всеми данными, чтобы записать уравнение экстремалей (8) функционала (1) с функцией (10) для поверхностей, заданных (2). Подставим значения производных (16), (17) и обозначение τ из (15), тогда уравнение экстремалей (8) принимает вид $-\mathcal{C}(1+\dot r^2)^{(4-p)/2}((p-1)r\ddot r - \dot r^2 - 1) = 0$. Пусть $C \neq 0$, тогда будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка $(p-1)r\ddot r - \dot r^2 - 1 = 0$, решая которое, получаем

$$\dot r(t) = \sqrt{\mathcal{C}_0 r^{2/(p-1)} - 1} \tag{18}$$

и $\int\limits_{r(t_0)}^{r(t)} \dfrac{dr}{\sqrt{C_0 r^{2/(p-1)} - 1}} = t - t_0$, где $C_0 = \dfrac{\dot r^2(t_0) + 1}{r^{2/(p-1)}(t_0)}$.

Заметим, что при $p = 2$ данное равенство задает профильную функцию минимальной поверхности вращения — катеноида.

Используя вычисления данного примера, покажем применение теоремы 3 для нахождения областей устойчивости и неустойчивости поверхности вращения.

Вычислим функции Φ_1 и Φ_2, заданные в (3), $\Phi_1 = -\mathcal{C}(1+\dot r^2)^{(4-p)2}$, $\Phi_2 = -\mathcal{C}(p-1)(1+\dot r^2)^{(4-p)2}$. Аналогично выписываем α и β, введенные в (3), подставляя Φ_1 и Φ_2

$$\alpha = -\mathcal{C}(p-1)\frac{r}{(1+\dot r^2)^{(p-1)/2}}, \tag{19}$$

$$\beta = -\mathcal{C}\frac{r\ddot{r}+\dot{r}^2+1}{r(1+\dot{r}^2)^{(p+1)/2}}. \qquad (20)$$

Положим $\mathcal{C}=-1$. С использованием (18) равенство (19) примет вид $\alpha = \dfrac{p-1}{\mathcal{C}_0^{(p-1)/2}}$, аналогично из (20) получим $\beta = \dfrac{p}{p-1}\dfrac{1}{r^2\mathcal{C}_0^{(p-1)/2}}$.

Применяя теорему 3, получаем, что p-минимальная поверхность устойчива на интервале (t_0,t), определяемом из неравенства $t-t_0 \leqslant \dfrac{(p-1)\pi}{C_0^{(p-1)/2}\nu}$.

Для определения интервала неустойчивости p-минимальной поверхности заметим, что $t=t(r)$ — обратная функция к $r=r(t)$, тогда $d(t(r))=t'dr$. Так как производная обратной функции определяется по формуле $t'=\dfrac{1}{\dot{r}}$ и, учитывая (18), получаем $dt=\dfrac{dr}{\dot{r}}=\dfrac{dr}{\sqrt{\mathcal{C}_0 r^{2/(p-1)}-1}}$. Следовательно, интервал неустойчивости находится из неравенства $\dfrac{p}{(p-1)\mathcal{C}_0^{\frac{p-1}{2}}}\int\limits_{r(t_0)}^{r(t)}\dfrac{dr}{r^2\sqrt{\mathcal{C}_0 r^{\frac{2}{p-1}}-1}} > \pi\nu.$

Библиографический список

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 760 с.
2. *Клячин В.А., Миклюков В.М.* Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 1. С. 206–217.
3. *Тужилин А.А.* Индексы типа Морса двумерных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{H}^3$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 2. С. 581–607.
4. *Тужилин А.А., Фоменко А.Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991. 174 с.
5. *Клячин В.А., Медведева Н.М.* Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади. Волгоград, 2006. Деп. в ВИНИТИ 08.11.06 № 1313 - В 2006. 23 с.; Сибирские электронные математические известия. 2007. Т. 4. Статьи. С. 113–132.
6. *Tkachev V.G.* External Geometry of p-Minimal Surfaces // Geometry from the Pacific Rim, Eds.: Berrick/Loo/Wang, Walter de Gruyter&Co., Berlin, 1997. P. 363–375.
7. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.
8. *Клячин В.А., Миклюков В.М.* Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 11. С. 67–88.
9. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 250 с.

УДК 517.927

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, А.С. Ищенко*

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
*Белгородский университет потребительской кооперации
E-mail: pokorny@math.vsu.ru, Ischenko-AS@Yandex.ru

В работе обсуждается нерегулярная модель стилтьесовской струны $-p(x)u'(x)+p(+0)u'(+0)+\int\limits_0^x u(\tau)dQ(\tau) = F(x)-F(0)$ на отрезке $[0,\ell]$ при краевых условиях $u(0)=u(\ell)=0$. Описываются условия разрешимости вышеуказанной задачи.

On Solvability of Certain Classes of Irregular the Second Order Variation Problems

Yu.V. Pokornyi, Zh.I. Bakhtina, A.S. Ischenko

In the work the irregular model $-p(x)u'(x)+p(+0)u'(+0)+\int\limits_0^x u(\tau)dQ(\tau)=F(x)-F(0)$ of the Stiltjes string on segment $[0,\ell]$ with boundary conditions $u(0)=u(\ell)=0$ is discussed. The solvability conditions of the mentioned problem are described.

В работе обсуждаются условия разрешимости задачи

$$-(pu')'+Q'u=F' \qquad (1)$$