УДК 512.554.36

О ПРОБЛЕМЕ А. В. МИХАЛЕВА ДЛЯ АЛГЕБР ЛИ

Е. В. Мещерина[1], О. А. Пихтилькова[2], С. А. Пихтильков[3]

[1]Аспирант кафедры алгебры и математической кибернетики, Оренбургский государственный университет, elena_lipilina@mail.ru

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Оренбургский государственный университет, OPikhtilkova@mail.ru

[3]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической кибернетики, Оренбургский государственный университет, pikhtilkov@mail.ru

Решена ослабленная проблема А. В. Михалева о первичном радикале артиновых алгебр Ли.

Ключевые слова: алгебра Ли, внутренний идеал, первичный радикал, артинова алгебра Ли.

1. АССОЦИАТИВНАЯ НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ИДЕАЛОВ АЛГЕБРЫ $sl_n(F)$

Впервые понятие внутреннего идеала было введено Джорджией Бенкарт (G. Benkart) [1].

Считается, что внутренний идеал алгебры Ли является аналогом одностороннего идеала ассоциативной алгебры. Внутренние идеалы сыграли важную роль в классификации простых конечномерных алгебр Ли над полями положительной характеристики. Скажем, что подпространство B алгебры Ли L является внутренним идеалом, если $[B,[B,L]] \subseteq B$.

В работе [2] анонсировано, что для алгебры Ли $sl_2(F)$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики, не равной 2, все ее собственные внутренние идеалы одномерны, порождены матрицами вида: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$, где $x^2+yz=0$, x, y, z — не равны нулю одновременно.

Для такого внутреннего идеала H выполнено условие $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$.

В работе [3] доказана абелевость собственных внутренних идеалов алгебры $sl_n(F)$ над полем F характеристики нуль и поставлен следующий вопрос: верно ли, что все собственные внутренние идеалы H алгебры Ли $sl_n(F)$ для поля F характеристики нуль удовлетворяют условию $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$?

Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле, $char\ F = 0$. Все собственные внутренние идеалы H алгебры Ли $sl_n(F)$ удовлетворяют условию: $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$.*

Для доказательства теоремы нам потребуется лемма.

Лемма 1. *Пусть F — поле, $char\ F = 0$, H — собственный внутренний идеал алгебры Ли $sl_n(F)$, состоящий из верхнетреугольных матриц, $A \in H$. Тогда в матрице A все диагональные элементы равны нулю.*

Доказательство. Предположим, что $a_{ii} \neq a_{jj}$ при $i < j$ — ненулевые диагональные элементы матрицы A.

Рассмотрим коммутатор $[A, e_{ji}]$. Мы будем прослеживать только ненулевые элементы полученной матрицы, лежащие ниже диагонали.

Получим:

$$[A, e_{ji}] = \sum_{k \le j, k > i} a_{kj} e_{kj} e_{ji} - \sum_{i \le l, l < j} a_{il} e_{ji} e_{il} + B = \sum_{k \le j, k > i} a_{kj} e_{ki} - \sum_{i \le l, l < j} a_{il} e_{jl} + B,$$

где B — верхнетреугольная матрица.

Отметим, что в j-й строке, i-м столбце стоит элемент $a_{jj} - a_{ii}$.

Схематично коммутатор $C = [A, e_{ji}]$ можно представить себе в виде матрицы

$$\left\{ \left. \begin{pmatrix} * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{jj} - a_{ii} & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \right| \alpha, \beta \in F \right\}.$$

Теперь рассмотрим коммутатор $[A, [A, e_{ji}]]$. Нас интересует элемент, стоящий в j-й строке и i-м столбце. Он будет равен $(a_{jj} - a_{ii})^2$. Это легко проследить, производя умножение j-й строки матрицы A на i-й столбец матрицы C и умножая те же строки и столбцы матриц C и A.

Так как собственный внутренний идеал H состоит из верхнетреугольных матриц, элемент $(a_{jj} - a_{ii})^2$ равен нулю. Получили $a_{jj} - a_{ii} = 0$. Следовательно, все диагональные элементы матрицы A равны между собой.

Из условия $tr\ A = 0$ получаем равенство нулю диагональных элементов матрицы A. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Согласно теореме Ли [4], матрицы разрешимой алгебры Ли линейных преобразований конечномерного векторного пространства над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль могут быть приведены одновременно к треугольному виду.

В [3] было доказано, что для полей нулевой характеристики все собственные внутренние идеалы H алгебры $sl_n(F)$ — абелевы. Это означает, в частности, что H является абелевой алгеброй Ли. Из теоремы Ли следует, что все матрицы собственного внутреннего идеала H могут быть приведены одновременно к треугольному виду. Согласно лемме 1, диагональные элементы матриц из H равны нулю.

Пусть A и B — две матрицы из H. Предположим, что матричные единицы $e_{kl}, k < l$ и $e_{ij} i < j$ входят с ненулевыми коэффициентами в разложение A и B соответственно. Тогда ненулевыми в коммутаторе $[A, B]$ могут быть только произведения $e_{kl}e_{ij}$, если $l = i$ (в этом случае $k < j$) или $e_{ij}e_{kl}$, если $j = k$ (в этом случае $i < l$). Оба этих произведения не могут одновременно равняться нулю. Следовательно, из равенства $[A, B] = 0$ следует равнество $AB = 0$. Теорема доказана.

Обобщим полученный результат на один класс бесконечномерных алгебр Ли.

Обозначим через $gl_{fr}(V)$ множество линейных отображений конечного ранга бесконечномерного векторного пространства V над полем F в себя. Пусть $sl_{fr}(V) = [gl_{fr}(V), gl_{fr}(V)]$.

Теорема 2. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле, $char\ F = 0$, V — бесконечномерное векторное пространство над F. Все собственные внутренние идеалы H алгебры Ли $sl_{fr}(V)$ удовлетворяют условию: $f, g \in H \Rightarrow f \circ g = 0$.*

Доказательство. Пусть H — собственный внутренний идеал алгебры Ли $sl_f r(V)$, $f, g \in H$ — произвольные.

Так как f, g — преобразования ограниченного ранга, существует векторное пространство $W \subset V$ такое, что $f(V), g(V) \subset W$.

Пусть $x \in V$ — произвольное. Обозначим через U конечномерное подпространство V, содержащее W и x. Тогда, ограничивая действие элементов H на U, получим множество преобразований $G = H|_U$. Покажем, что G — внутренний идеал алгебры Ли $sl(U)$.

Пусть $l \in sl(U), s, t \in H$. Обозначим через U' подпространство дополняющее U до V, то есть сумма $V = U \oplus U'$ — прямая. Можно считать, что $l \in sl_{fr}(V)$, определяя действие l на U' нулевым образом. Тогда $[s, [t, l]] \in H$. Ограничивая действие преобразования $[s, [t, l]]$ на подпространстве U, получим $[s, [t, l]] \in G$.

Возможны 3 случая.

1. $G = 0$. В этом случае $f \circ g(x) = 0$.

2. Подпространство G — собственный внутренний идеал алгебры Ли $sl(U)$. Согласно теореме 1 выполнено равенство $f \circ g(x) = 0$.

3. $G = sl(U)$.

Обозначим через n размерность векторного пространства U. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — базис векторного пространства V, первые n элементов которого образуют базис U. Будем использовать обычные обозначения для матричных единиц. Выполнено равенство $[sl(u), sl(u)] = sl(u)$. Для любого внутреннего идеала H легко проверить справедливость включения

$$[[H, H], L] \subset H. \tag{1}$$

Согласно включению (1) следующие коммутаторы принадлежат H:

$$[[e_{ii} - e_{jj}, [e_{ii} - e_{jj}, e_{ik}] = e_{ik}, \qquad [[e_{ii} - e_{jj}, [e_{ii} - e_{jj}, e_{kj}] = e_{kj}, \qquad i \neq j, \qquad i, j \leq n, \qquad k > n.$$

Следовательно, $e_{ii} - e_{jj} \in [H, H], i, j > n$, так как $e_{ii} - e_{jj} = [e_{ij}, e_{ji}]$. Согласно лемме и включению (1) элементы $e_{ij} = [e_{ii} - e_{jj}, e_{ij}]/2$ принадлежат H. Мы показали, что все элементы вида $e_{ii} - e_{jj}$, e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots$ принадлежат H.

Пусть $h \in H$ — произвольное. Учитывая ограниченность ранга f, можно считать в бесконечной матрице A, задающей f, ненулевыми являются только первые $k - 1$ строк. Пусть A_i — матрица, состоящая из i-й строки матрицы A. Тогда $A = A_1 + \ldots + A_{k-1}$. Матрица $[e_{ik}, [e_{ki}, A_i]]$, $1 \leq i \leq k - 1$ отличается от матрицы A_i конечным числом элементов. Поэтому можно считать, что все $A_i \in H$, $1 \leq i \leq k - 1$.

Мы доказали принадлежность $A \in H$. Следовательно, $H = sl_{fr}(V)$. В этом случае внутренний идеал H не является собственным. Теорема доказана.

Теперь можно поставить следующий вопрос: верно Ли, что все собственные внутренние идеалы H простой алгебры Ли над полем F характеристики нуль (над алгебраически замкнутым полем F характеристики нуль) удовлетворяют условию: $A, B \in H \Rightarrow AB = 0$?

2. ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ АРТИНОВЫХ АЛГЕБР ЛИ

Пусть L — алгебра Ли. В [2] введены следующие определения артиновости:

а) если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется i-артиновой;

б) если убывающая цепочка алгебр стабилизируется, то алгебра называется a-артиновой;

в) если убывающая цепочка внутренних идеалов стабилизируется, то алгебра называется inn-артиновой.

Легко проверить, что из inn-артиновости следует i-артиновость и из a-артиновости следует i-артиновость.

В [2] анонсированы примеры показывающие, что условие i-артиновости слабее, чем условия inn-артиновости и a-артиновости.

В 2001 году А. В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Кольца и модули» поставил проблему: существует ли i-артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

Следующие предложение и леммы потребуются для решения ослабленной проблемы А. В. Михалева.

Предложение 1. *Пусть B — ненулевой идеал алгебры Ли L, L — a-артинова или inn-артинова. Тогда B содержит ненулевой идеал I такой, что $[I, I] = I$ или B удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени.*

Доказательство. Имеем $B \supseteq B' \supseteq B'' \supseteq \ldots \supseteq B^{(n)} \supseteq \ldots$ — убывающая цепочка идеалов, где $B^{(n)}$ — n-й член производного ряда алгебры B. Из a-артиновости или inn-артиновости следует, что она стабилизируется. Существует натуральное число k, такое что $B^{(k)} = B^{(k+1)}$. Пусть $I = B^{(k)}$. Тогда,

1) если $I = 0$, то B удовлетворяет тождеству разрешимости ступени k;

2) если $I \neq 0$, то $[I, I] = I$, I — искомый.

Следовательно, B содержит ненулевой идеал I такой, что $[I, I] = I$, или B удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени. Предложение доказано.

Лемма 2. *Пусть L — a-артинова или inn-артинова алгебра Ли, A — ненулевой абелев идеал алгебры L. Тогда $dim_F A < \infty$.*

Доказательство. Любое подпространство идеала A является абелевой подалгеброй. Если $dim_F A = \infty$, то нарушается a-артиновость.

Пусть V — подпространство идеала A. Тогда $[V, L] \subset A$. Следовательно, $[V, [V, L]] = 0$. Это означает, что подпространство V — внутренний идеал. Бесконечномерность идеала A противоречит inn-артиновости. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть L — a-артинова или inn-артинова алгебра Ли, $I \subset P(L)$ ненулевой идеал такой, что $[I, I] = I$, A — ненулевой абелев идеал алгебры L. Тогда $[I, A] = 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 идеал A — конечномерен. Присоединенное отображение ad является гоморфизмом алгебры Ли L в алгебру эндоморфизмов векторного пространстваA по отношению к коммутированию $ad : L \to End(A)^{(-)}$.

Образ $\bar{I}$ идеала I при отображении ad является слаборазрешимым, то есть любое его конечномерное подпространство удовлетворяет тождеству разрешимости некоторой ступени. Слаборазрешимый идеал конечномерной алгебры Ли $End(A)^{(-)}$ является разрешимым [5]. Следовательно, идеал $\bar{I}$ — разрешим. Из условия $[\bar{I}, \bar{I}] = \bar{I}$ следует $\bar{I} = 0$.

Пусть $i \in I, a \in A$. Тогда $ad\ i(a) = [i, a] = 0$. Получили $[I, A] = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть L — a-артинова или inn-артинова алгебра Ли. Тогда первичный радикал $P(L)$ аогебры Ли L разрешим.*

Доказательство. Нам потребуется представление первичного радикала как нижнего слабо разрешимого радикала [6].

Пусть $\sigma(L)$ — это любой ненулевой абелев идеал алгебры Ли L. Такой идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует согласно конструкции нижнего слабо разрешимого идеала, если $P(L) \neq 0$ (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено). Как известно [6], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha)$ следующим образом.

1. $\tau(0) = 0$.

2. Предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ так:

а) если $\beta = \gamma + 1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ — это такой идеал алгебры L, что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma(L/\tau(\gamma))$;

б) если β — предельное порядковое число, то $\tau(\beta) = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} \tau(\gamma)$.

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta+1)$ для некоторого β. Тогда, что $\tau(\beta)$ совпадает с нижним слабо разрешимым радикалом алгебры Ли L, равным первичному радикалу $P(L)$.

Предположим, что первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L не является разрешимым. Тогда согласно предложению 1 существует ненулевой идеал $I \subset P(L)$ такой, что $[I, I] = I$.

Пусть $a, b \in I$ — произвольные, γ_1 — порядковое число такое, что $b \in \tau(\gamma_1 + 1) \backslash \tau(\gamma_1)$. Пусть $\bar{L} = L/\tau(\gamma_1)$. Тогда $\tau(\gamma_1 + 1)/\tau(\gamma_1)$ — ненулевой абелев идеал, $\bar{I} = I/\tau(\gamma_1)$ такой, что $[\bar{I}, \bar{I}] = \bar{I}$.

Согласно лемме 3 выполнено равенство $[\bar{I}, \tau(\gamma_1+1)/\tau(\gamma_1)] = 0$. Существует порядковое число $\gamma_2 < \gamma_1$ такое, что $ad\ a(b) \in \tau(\gamma_2+1)/\tau(\gamma_2)$.

Продолжая проведенные выше рассуждения, получим порядковое число $\gamma_3 < \gamma_2$ такое, что $(ad\ a)^2(b) \in \tau(\gamma_3+1)/\tau(\gamma_3)$. И так далее.

Получим последовательность убывающих порядковых чисел $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots$, которая не может быть бесконечной. Следовательно, существует натуральное n такое, что $(ad\ a)^n(b) = 0$.

Из леммы 2.1 [7] следует локальная нильпотентность идеала I. Выбирая последовательно базисы в абелевых идеалах, задающих рост цепочки возрастающих идеалов $\tau(\gamma) \subset I$, на основании леммы 3 можно считать, что элементы идеала I задаются верхнетреугольными блочными бесконечными матрицами с конечными столбцами и нулями на главной диагонали. Из этого представления также следует локальная нильпотентность идеала I.

Пусть r — наименьшее порядковое число, равное разности номеров столбцов и строк ненулевых блоков матриц, задающих элементы из I. Так как на диагонали матриц элементов из I стоят нулевые блоки, выполнено неравенство $r > 1$. У матриц из $[I, I]$ наименьшее порядковое число, равное разности номеров столбцов и строк ненулевых блоков, больше r. Получили противоречие с равенством $[I, I] = I$. Теорема доказана.

Теорема 2 дает решение ослабленной проблемы А. В. Михалева для a-артиновых и inn-артиновых алгебр Ли.

Библиографический список

1. *Benkart G.* On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 232. P. 61–81.

2. *Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А.* О свойствах внутренних идеалов алгебр Ли // Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов : тез. третьей междунар. шк.-конф., посвящ. 75-летию Э. Б. Винберга (Тольятти, Россия, 25–30 июня 2012 г.). Тольятти : Изд-во ТГУ, 2012. С. 32–34.

3. *Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А.* О собственных внутренних идеалах простых алгебр Ли // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та. 2012. № 6, ч. 2. С. 156–162.

4. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М. : Мир, 1964. 355 с.

5. *Бейдар К. И., Пихтильков С. А.* Первичный радикал специальных алгебр Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6, № 3. С. 643–648.

6. *Балаба И. Н., Михалев А. В., Пихтильков С. А.* Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 159–174.

7. *Pikhtilkov S. A.* Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras // Comm. in Algebra. 2001. Vol. 29, № 10. P. 3781–3786.

On the A. V. Mikhalev's Problem for Lie Algebras

E. V. Mescherina, O. A. Pikhtilkova, S. A. Pikhtilkov

Orenburg State University, Russia, 460352, Orenburg, pr. Pobedy, 13, elena_lipilina@mail.ru, OPikhtilkova@mail.ru, pikhtilkov@mail.ru

Weakened A. V. Mikhalev' sproblem about the prime radical of artinian Lie algebras is solved.

Key words: Lie algebra, inner ideal, prime radical, artinian Lie algebra.

References

1. Benkart G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras. *Transaction of the American Mathematical Society*, 1977, vol. 232, pp. 61–81.

2. Mescherina E. V., Pikhtilkov S. A., Pikhtilkova O. A. About properties of Lie algebras inner ideals. *Abstracts of the third international school conference «Algebras, algebraic groups and the theory of invariants», devoted to the 75 anniversary of E. B. Vinberg (Tolyatti, Russia, on June 25-30, 2012)*. Tolyatti, TGU Publ. house, 2012, pp. 32–34 (in Russian).

3. Mescherina E. V., Pikhtilkov S. A., Pikhtilkova O. A. On proper inner ideals of simple Lie algebras. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta*

[Scientific notes of the Oryol State University], 2012, no. 6, pt. 2, pp. 156–162 (in Russian).
4. Jacobson N. *Algebry Li* [Lie algebras]. Moscow, Mir, 1964, 355 p. (in Russian).
5. Beidar K. I., Pikhtilkov S. A. Prime radical of special Lie algebras. *Fundamentalnaya i prikladnaya mathematika*, 2000, vol. 6, no. 3, pp. 643–648 (in Russian).
6. Balaba I. N., Mikhalev A. V., Pikhtilkov S. A. Prime Radical of Graded Ω-groups. *Journal of Mathematical Sciences* [Fundamentalnaya i prikladnaya mathematika], 2008, vol. 149, no. 2, pp. 1146–1156.
7. Pikhtilkov S. A. Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras. *Comm. in Algebra*, 2001, vol. 29, no. 10, pp. 3781–3786.

УДК 511.4

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОДНОГО КЛАССА ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. Ю. Нестеренко

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, nesterenko_a_y@mail.ru

В работе исследуется класс иррациональных чисел, задаваемых быстро сходящимися рядами с рациональными коэффициентами. Рассматривается задача о восстановлении неизвестных параметров рациональных коэффициентов по заданным рациональным приближениям. Получены верхние и нижние оценки на неизвестные параметры, а также предложен алгоритм поиска неизвестных. Приведены результаты вычислений на ЭВМ.

Ключевые слова: разложения действительных чисел, восстановление параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $b > 1$ натуральное число. Мы будем рассматривать действительные числа $\alpha > 0$, заданные равенством

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \frac{u_i}{(dn + x_i)^s} b^{-n}, \qquad m, d, s \in \mathbb{N}, \qquad u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{Q}, \tag{1}$$

а величины $x_1, \ldots, x_m$ — различные натуральные числа. Многие математические константы, такие как $\ln 2$, π, константа Каталана, могут быть представлены в указанном виде. Более подробно, см. в работе [1].

В работе [2] автором рассматривались представления чисел вида (1) в системе счисления по основанию b

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}, \qquad 0 \le a_n < b, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

а также, исследовались статистические свойства последовательности натуральных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

В данной работе решается следующая задача. Пусть для некоторого натурального числа r задано рациональное приближение к числу α

$$\sigma_r = \sum_{n=0}^{r} a_n b^{-n}, \qquad |\alpha - \sigma_r| < b^{-r}, \qquad \sigma_r \in \mathbb{Q}.$$

Необходимо определить значения величин $x_1, \ldots, x_m$, если известны значения m, d, s и $u_1, \ldots, u_m$. Поскольку неизвестные величины различны, то мы будем дополнительно считать, что выполнены неравенства

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m. \tag{3}$$