



Аналогично получаются оценки для остальных частных производных. Эти утверждения останутся справедливыми, если считать, что интерполяционное условие (2) задается в вершине любого по величине угла в треугольнике. Сравнивая результаты с утверждением теоремы 1, видно, что теорема 1 является следствием теоремы 2.

**Замечание.** Неравенства (3) являются точными по порядку в следующем смысле. Пусть  $0 < x_0 < 1$ ,  $T$  — треугольник с вершинами  $A_1(0, b)$ ,  $A_2(x_0, 0)$ ,  $A_3(0, a)$ ;  $b < 0$ ,  $d = a + |b|$ ,  $0 < a \leq |b|$ ,  $Q$  — сплайн третьей степени для функции  $f(x, y) = |y|^4$ , удовлетворяющий интерполяционным условиям (1) и  $\frac{\partial^2 Q(A_i)}{\partial e_{ij} e_{ik}} = \frac{\partial^2 f(A_i)}{\partial e_{ij} e_{ik}} (i, j, k = \overline{1, 3}, i \neq j \neq k)$ . Тогда для производных по направлениям сторон треугольника справедливы двусторонние оценки:

$$\frac{1}{96} M_4 d^{4-n} \leq \sup_{x \in T} \left| \frac{\partial^n (Q - f)}{\partial e_{ij}^k \partial e_{ik}^{n-k}} \right| \leq 2 M_4 d^{4-n}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность С.Ф. Лукомскому за постановку задачи и внимание к работе.

### Библиографический список

1. Байдакова Н.В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды Института математики и механики. Теория функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52.
2. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type // Math. Comp. 1995. V. 64, № 211. P. 929–941.
3. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Труды Института математики и механики. Тео-

- рия функций: Сб. науч. трудов. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. Вып. 11, № 2. С. 120–130.
4. Куприянова Ю.В. Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2006. Вып. 8. С. 59–61.
5. Куприянова Ю.В. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Совр. методы теории функций и смеж. проблемы: Материалы конф. Воронеж, 2007. С. 120–121.

УДК 519.872

## АНАЛИЗ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

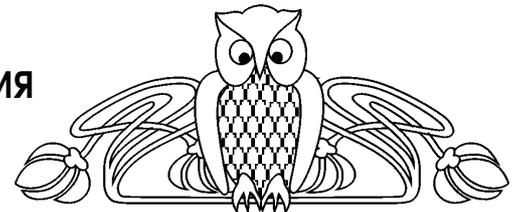
Ю.И. Митрофанов, Н.П. Фокина

Саратовский государственный университет,  
кафедра системного анализа и автоматического управления  
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru

Предлагается метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания с одним классом требований и централизованным динамическим управлением маршрутизацией, основанным на использовании в процессе функционирования сети в течение фиксированных интервалов времени различных маршрутных матриц. Метод анализа основан на описании процесса функционирования сети обслуживания модельными цепями Маркова. Приводится пример анализа сети рассматриваемого типа.

### ВВЕДЕНИЕ

Применение методов динамического управления маршрутизацией в сетях массового обслуживания (СМО) позволяет значительно повысить качество их функционирования. Используемые в сетях методы управления маршрутизацией в существенной степени определяют содержание методов анализа сетей обслуживания этого типа. Достаточно полное представление о методах анализа можно получить из обзора [1]. Примерами работ, в которых рассматриваются задачи анализа сетей массового обслуживания с зависящей от состояния сетей маршрутизацией, являются [2–9]. В работе [2] исследуется замкнутая сеть с одним классом требований и интенсивностями переходов требований, зависящими от состояния сети. Определяются условия, которым должны удовлетворять интенсивности переходов, чтобы существовало стационарное распределение вероятностей состояний сети в мультипликативной



An Analysis of Queueing Networks with Dynamic Routing Control

Y.I. Mitrophanov, N.P. Fokina

A method for analysis of closed exponential queueing networks with one class of customers and central dynamic routing control is proposed. The method of control is based on a use of different routing matrices during fixed time intervals in the network operation process. The method for analysis is based on a description of the network operation process with model Markov chains. An example of analysis of this type network is given.



форме. Стационарное распределение для замкнутой сети с одним классом требований и маршрутными матрицами, зависящими от состояния сети и используемыми в течение определенных интервалов времени в процессе функционирования сети, получено в работах [3, 4], а для сети с несколькими классами требований и маршрутизацией, зависящей от времени, проведенного сетью в текущем состоянии, — в работе [5]. Работа [6] посвящена изучению характеристик выходных и маршрутных функций марковских СеМО с дискретным и непрерывным временем, групповыми переходами требований и зависящей от состояния сетей маршрутизацией. В работе [7] рассматриваются алгоритмы маршрутизации в реальном времени для открытых экспоненциальных СеМО с одним классом требований, последовательно-параллельной топологией и системами ограниченной емкости. В работе [8] предлагаются методы анализа замкнутых СеМО, в которых маршрутные вероятности для их подсетей являются рациональными функциями от числа требований, находящихся в принадлежащих подсетям системах. Аналогичная зависимость рассматривается в работе [9] для сетей с системами таких же типов, которые используются в СеМО типа ВСМР [10]. Актуальность и значимость работ по развитию методов управления маршрутизацией и методов анализа сетей с управлением маршрутизацией обусловлены эффективностью использования СеМО этого типа в качестве математических моделей больших сложных стохастических систем с сетевой структурой, функционирование которых обеспечивается развитыми подсистемами управления.

В данной работе предлагается метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией. В процессе функционирования сети система управления производит идентификацию состояния сети в заданные моменты времени и формирует зависящие от этого состояния управляющие воздействия на сеть. Целью управления является обеспечение достижения максимально возможного значения стационарной характеристики сети, являющейся основной при определении качества ее функционирования.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $N$  — замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания с  $L$  системами массового обслуживания  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , типа  $M/M/1$  с интенсивностями обслуживания  $\mu_i$ ,  $Q$  требованиями одного класса и динамическим управлением маршрутизацией. Топология сети определяется матрицей смежности  $W = (w_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , соответствующего ориентированного графа. Обозначим через  $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_L^{(n)})$  состояние сети с номером  $n$ , где  $s_i^{(n)}$  — число требований в системе  $S_i$ , через  $X$  — множество состояний сети мощности  $c_X = |X|$ . Длительность пребывания сети в состоянии  $s^{(n)} \in X$  является случайной величиной с экспоненциальным распределением и математическим ожиданием (м.о.)  $\beta_n = 1/\alpha_n$ , где  $\alpha_n$  — параметр ее функции распределения. Качество функционирования сети определяется значением ее стационарной характеристики, называемой ведущей. Предполагается, что состояние  $s^{(n)}$  имеет характеристику  $V^{(n)}$  — потенциал этого состояния (значение потенциала — неотрицательное вещественное число). Потенциал состояния определяет значимость пребывания сети в данном состоянии для достижения сетью максимального значения ведущей характеристики. При нумерации состояний предполагается, что если  $V^{(m)} > V^{(n)}$ , то  $m < n$ . В случае равенства потенциалов состоянию с меньшим м.о. длительности пребывания присваивается меньший номер. Состояние  $s^{(1)}$  с максимальным потенциалом называется базовым. Соответственно значению потенциала состояния сети делятся на доминантные и ординарные. Обозначим через  $Y$  и  $Z$  множества доминантных и ординарных состояний,  $X = Y \cup Z$ ,  $c_Y = |Y|$ ,  $c_Z = |Z|$ ,  $c_X = c_Y + c_Z$ . Доминантные состояния имеют большие потенциалы по сравнению с ординарными, поэтому  $Y = \{s^{(1)}, \dots, s^{(c_Y)}\}$ . Множества номеров всех состояний сети, номеров доминантных и ординарных состояний обозначим через  $B = \{1, \dots, c_X\}$ ,  $D = \{1, \dots, c_Y\}$ ,  $U = \{c_Y + 1, \dots, c_Y + c_Z\}$  соответственно. В качестве ведущей характеристики сети  $N$  выбрана стационарная вероятность  $\pi(Y)$  пребывания сети в множестве доминантных состояний  $Y$ . Поэтому повышение качества функционирования сети непосредственно связано с увеличением значения  $\pi(Y)$ .

Процесс эволюции сети  $N$  представляет собой последовательность фрагментов, называемых тактами. Различаются такты двух видов — нормальные  $\hat{x}$  и коррективные  $\tilde{x}$ . В момент окончания каждого такта производится идентификация состояния  $s^{(g)}$  сети; если  $s^{(g)} \in Y$ , то очередной такт является нормальным, в противном случае — коррективным. В зависимости от состояния  $s^{(g)} \in Z$  различаются  $c_Z$  типов коррективных тактов. В течение такта  $\hat{x}$  используется маршрутная матрица  $\Theta = (\theta_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , в течение коррективного такта  $\tilde{x}^J$  типа  $J = g - c_Y$ ,  $J \in \{1, \dots, c_Z\}$ , — управляющая маршрутная матрица  $\Theta^{J, \kappa} = (\theta_{ij}^{J, \kappa})$ , зависящая от начального состояния  $s^{(g)} \in Z$  и параметра управления  $\kappa \in \{1, 2, \dots, L\}$ . Целью использования управляющих маршрутных матриц в течение кор-



рективных тактов является возвращение сети в множество доминантных состояний  $Y$  из множества состояний  $Z$ . Нормальные такты имеют фиксированную длительность  $\varphi$ , длительность коррективных тактов  $\eta_g^{J,\kappa}$  зависит от их типа. Параметры  $c_Y$ ,  $\varphi$  и  $\kappa$  являются параметрами метода управления маршрутизацией, их значения задаются до начала функционирования сети и не изменяются в процессе ее функционирования. Целью данной работы является разработка метода управления маршрутизацией и метода анализа сетей обслуживания с данным методом управления.

## 2. МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ МАРШРУТНЫХ МАТРИЦ

Смежное по отношению к состоянию  $s^{(n)}$  состояние  $s^{(\cdot)}(n, i, j)$  называется состоянием, порожденным состоянием  $s^{(n)}$  и переходом требования из  $S_i$  в  $S_j$ . Пусть

$$\Omega_i^{(n)} = \{s^{(\cdot)}(n, i, l) | l \in \{1, \dots, L\}, l \neq i, s_i^{(n)} > 0, w_{il} = 1\}, i \in \{1, \dots, L\}, n \in B.$$

Состояние  $\bar{s}^{(\cdot)}(n, i, \cdot) \in \Omega_i^{(n)}$ , имеющее наибольший потенциал  $V^{(\cdot)}$  по сравнению с другими состояниями множества  $\Omega_i^{(n)}$ , называется остовным состоянием множества  $\Omega_i^{(n)}$ . Если в  $\Omega_i^{(n)}$  имеется несколько состояний с одинаковыми наибольшими потенциалами, то в качестве остовного выбирается состояние с наименьшим номером. Поэтому предполагается, что в множестве  $\Omega_i^{(n)}$  только одно состояние является остовным. Для каждого состояния  $s^{(n)}$  определим называемую матрицей передач нуль-единичную матрицу  $\mathcal{N}^{(n)} = (\nu_{ij}^{(n)})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , обеспечивающую переход сети из состояния  $s^{(n)}$  в одно из смежных остовных состояний [3]. Введем вспомогательную функцию

$$\varepsilon(s_i^{(n)}) = \begin{cases} 1, & s_i^{(n)} > 0, \\ 0, & s_i^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Тогда параметр  $\alpha_n = \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(n)}) \mu_i$ . Вероятность  $\gamma_{i,n}$  того, что уход сети из состояния  $s^{(n)}$  обусловлен завершением обслуживания требования в системе  $S_i$ , равна  $\mu_i / \alpha_n$ . Если в качестве маршрутной матрицы используется матрица  $\mathcal{N}^{(n)}$ , то вероятность перехода сети из  $s^{(n)}$  в остовное состояние  $\bar{s}^{(\cdot)}(n, i, j)$  за счет перехода требования из  $S_i$  в  $S_j$  равна  $\gamma_{i,n}$ , так как  $\nu_{ij}^{(n)} = 1$ .

Для каждого состояния  $s^{(n)}$  определим матрицу  $H^{(n)} = (h_{ij}^{(n)})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$ , элементы которой

$$h_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & s_i^{(n)} = 0, \\ \gamma_{i,n} \nu_{ij}^{(n)}, & s_i^{(n)} > 0. \end{cases}$$

Матрица  $H^{(n)}$  является матрицей вероятностей перехода из  $s^{(n)}$  в остовные состояния множеств  $\Omega_i^{(n)}$ ,  $i \in \{1, \dots, L\}$ , за счет перехода требований из  $S_i$  в  $S_j$ .

При построении управляющей маршрутной матрицы  $\Theta^{J,\kappa}$ , используемой в течение коррективного такта, начинающегося из состояния  $s^{(n)}$ ,  $n = J + c_Y$ , последовательно просматриваются остовные состояния, расположенные на расстоянии  $1, 2, \dots, \kappa - 1$  шагов от исходного состояния  $s^{(n)}$ . Считается, что равноудаленные от  $s^{(n)}$  состояния находятся на одном уровне (состояние  $s^{(n)}$  находится на уровне 0). Пусть  $G$  — ориентированный граф с множеством вершин  $B$  и множеством дуг, соответствующих упорядоченным парам смежных состояний. Алгоритм формирования маршрутной матрицы для начального состояния  $s^{(n)} \in Z$  основывается на алгоритме поиска кратчайших путей между вершинами в графе  $G$  при начале из вершины  $n$  [11]. Для каждой просмотренной вершины  $r \in B$ , соответствующей остовному состоянию  $s^{(r)} \in X$ , строится матрица вероятностей переходов  $H^{(r)}$ . Управляющая маршрутная матрица  $\Theta^{J,\kappa}$  полагается равной сумме матриц  $H^{(r)}$  для вершин  $r \in B$ , расположенных на уровнях  $0, 1, \dots, \kappa - 1$  от начальной вершины  $n \in B$ ,  $n = c_Y + J$ . Допускается, что одна и та же вершина может быть просмотрена более одного раза. Выполнение алгоритма завершается после просмотра  $\kappa - 1$  уровней.

## 3. МЕТОД АНАЛИЗА СЕТИ $N$

Обозначим через  $\Xi$  случайный процесс с множеством состояний  $B$ , описывающий эволюцию сети  $N$ . Процесс  $\Xi$  представляет собой последовательность фрагментов, соответствующих нормальным и коррективным тактам. Эволюция сети  $N$  в течение нормальных и коррективных тактов описывается соответственно цепями Маркова  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , с множеством состояний  $B$  и непрерывным



временем (все состояния являются устойчивыми, длительность пребывания в состоянии  $n$  является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром  $0 < \alpha_n < \infty$ ); в обозначении  $\tilde{C}^J$  индекс  $J$  указывает, что начальным состоянием эволюции цепи является  $c_Y + J$ . Длительности реализаций цепей  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$  равны соответственно длительностям нормального и соответствующих коррективных тактов. Характеристики процесса  $\Xi$  определяются характеристиками цепей Маркова  $\hat{C}$  и  $\tilde{C}^J$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , и длительностями их реализаций.

Введем обозначения параметров и характеристик цепи  $\hat{C}$ :  $\hat{A} = (\hat{a}_{mn})$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, c_X$ , — инфинитезимальный оператор;  $\hat{P} = (\hat{p}_{mn})$  — матрица вероятностей скачков марковской цепи скачков, связанной с цепью  $\hat{C}$ ;  $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$  — матрица вероятностей перехода за время  $t$ , определяемая известным соотношением  $\hat{P}^{(t)} = \exp(\hat{A}t)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \hat{a}_{mn} &= \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i\theta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \\ \hat{a}_{mm} &= -\sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i, \quad \alpha_m = -\hat{a}_{mm}, \quad m \in B, \\ \hat{p}_{mn} &= \frac{\hat{a}_{mn}}{\alpha_m}, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \quad \hat{p}_{mm} = 0, \quad m \in B. \end{aligned}$$

Для аналогичных параметров и характеристик цепей  $\tilde{C}^J$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , используются обозначения  $\tilde{A}^J = (\tilde{a}_{mn}^J)$ ,  $m, n \in B$ ,  $\tilde{P}^J = (\tilde{p}_{mn}^J)$ ,  $\tilde{P}^{(t), J} = (\tilde{p}_{mn}^{(t), J})$ . Параметры и характеристики цепи  $\tilde{C}^J$  будут зависеть от соответствующей управляющей маршрутной матрицы  $\Theta^{J, \kappa}$ :

$$\tilde{a}_{mn}^J = \varepsilon(s_i^{(m)})\mu_i\theta_{ij}^{J, \kappa}, \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \quad \tilde{a}_{mm}^J = \hat{a}_{mm}.$$

Длительность  $\eta_m^{J, \kappa}$  реализации цепи  $\tilde{C}^J$  полагается равной математическому ожиданию длительности интервала времени, за который цепь  $\tilde{C}^J$  совершит  $\kappa$  переходов, и определяется как сумма м.о. длительностей пребывания цепи на уровнях  $0, 1, \dots, \kappa - 1$  от начального состояния  $m$ :

$$\eta_m^{J, \kappa} = \frac{1}{\alpha_m} + \sum_{i=1}^{\kappa-1} \sum_{l=1}^{c_X} \frac{\tilde{p}_{ml}^J(i)}{\alpha_l},$$

где  $\tilde{p}_{ml}^J(i)$  — вероятность перехода из  $m$  в  $l$  за  $i$  шагов марковской цепи скачков, связанной с цепью  $\tilde{C}^J$ . Матрица  $(\tilde{p}_{ml}^J(i))$ ,  $m, l = 1, \dots, c_X$ , равна матрице  $((\tilde{p}_{ml}^J)^i)$ .

Обозначим через  $\hat{\pi}_n^*(m, \varphi)$  и  $\tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa})$  средние вероятности пребывания в состоянии  $n \in B$  соответственно цепи  $\hat{C}$  в течение интервала времени длительности  $\varphi$  при исходе из состояния  $m \in D$  и цепи  $\tilde{C}^J$  в течение интервала времени длительности  $\eta_m^{J, \kappa}$  при исходе из состояния  $m \in U$ . Так как вероятности пребывания этих цепей в момент времени  $t$  в состоянии  $n$  при исходном состоянии  $m \in B$  равны вероятностям их перехода из  $m$  в  $n$  за время  $t$ ,

$$\hat{\pi}_n^*(m, \varphi) = \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \hat{p}_{mn}^{(t)} dt, \quad n \in B, \quad m \in D, \quad \tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa}) = \frac{1}{\eta_m^{J, \kappa}} \int_0^{\eta_m^{J, \kappa}} \tilde{p}_{mn}^{(t), J} dt, \quad n \in B, \quad m \in U.$$

Обозначим через  $\delta_n$  такт сети  $N$ , начинающийся в состоянии  $s^{(n)} \in X$ , и рассмотрим случайный процесс  $\Delta$  с множеством состояний  $\{\delta_n\}$ ,  $n = 1, \dots, c_X$ . Положим длительности пребывания процесса  $\Delta$  в состояниях  $\delta_1, \dots, \delta_{c_Y}$  равными  $\varphi$ , а в состояниях  $\delta_{c_Y+J}$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , — равными  $\eta_n^{J, \kappa}$ ,  $n = c_Y + J$ . Вероятность перехода процесса  $\Delta$  из состояния  $\delta_n$  в состояние  $\delta_m$

$$q_{nm} = \begin{cases} \hat{p}_{nm}^{(\varphi)}, & n \in D, \quad m \in B, \\ \tilde{p}_{nm}^{(\eta_n^{J, \kappa}), J}, & n \in U, \quad m \in B. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение цепь Маркова  $\check{C}$  с множеством состояний  $\{\delta_n\}$  и непрерывным временем, параметры экспоненциальной функции распределения длительности пребывания которой в состояниях  $\delta_1, \dots, \delta_{c_Y}$  равны  $\check{\alpha}_n = 1/\varphi$ ,  $n = 1, \dots, c_Y$ , а в состояниях  $\delta_{c_Y+J}$ ,  $J = 1, \dots, c_Z$ , — равны  $\check{\alpha}_n = 1/\eta_n^{J, \kappa}$ ,  $n = c_Y + J$ . Элементы матрицы вероятностей скачков  $\check{P} = (\check{p}_{nm})$ ,  $n, m = 1, \dots, c_X$ , и инфинитезимального оператора  $\check{A} = (\check{a}_{nm})$  этой цепи определяются выражениями:

$$\check{p}_{nm} = \frac{1}{1 - q_{nn}} q_{nm}, \quad n \neq m, \quad n, m \in B, \quad \check{p}_{nn} = 0, \quad n \in B,$$



$$\check{a}_{nm} = \check{a}_n \check{p}_{nm}, \quad n \neq m, \quad n, m \in B, \quad \check{a}_{nn} = -\check{a}_n, \quad n \in B.$$

Пусть  $\zeta = (\zeta_n)$ ,  $n = 1, \dots, c_X$ , и  $\check{\zeta} = (\check{\zeta}_n)$  — стационарные распределения вероятностей состояний процессов  $\Delta$  и  $\check{C}$  соответственно. Распределение  $\check{\zeta} = (\check{\zeta}_n)$  является решением системы уравнений  $\check{\zeta} \check{A} = 0$  с условием нормировки  $\sum_{n \in B} \check{\zeta}_n = 1$ . Из способа построения цепи  $\check{C}$  и значений ее параметров непосредственно следует, что  $\zeta \approx \check{\zeta}$ . Тогда стационарная вероятность состояния  $s^{(n)} \in X$   $\pi_n \approx \pi_n^*$ , средней вероятности пребывания процесса  $\Xi$  в состоянии  $n \in B$ , определяемой выражением

$$\pi_n^* = \sum_{m \in D} \zeta_m \hat{\pi}_n^*(m, \varphi) + \sum_{m \in U} \zeta_m \tilde{\pi}_n^*(m, \eta_m^{J, \kappa}).$$

Математическое ожидание длительности очередного такта  $\psi^\kappa$  и интенсивность управления  $R^\kappa$  (математическое ожидание числа управляющих воздействий, формируемых в единицу времени) определяются выражениями

$$\psi^\kappa = \varphi \sum_{n \in D} \zeta_n + \sum_{n \in U} \eta_n^{J, \kappa} \zeta_n, \tag{1}$$

$$R^\kappa = 1/\psi^\kappa.$$

#### 4. ПРИМЕР

Рассмотрим сеть  $N$  с  $L = 4$ ,  $Q = 4$ ,  $\mu = (0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$ , матрицей смежности  $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

и используемой в течение нормальных тактов маршрутной матрицей

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество  $X$  состояний сети включает  $c_X = 35$  состояний  $s^{(n)} = (s_1^{(n)}, s_2^{(n)}, s_3^{(n)}, s_4^{(n)})$ ,  $n = 1, \dots, 35$ .

Пусть потенциалы состояний сети определяются выражением  $V^{(\cdot)} = \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(\cdot)}) \mu_i$ . Состояния нумеруются в порядке убывания значения их потенциалов. Базовым состоянием является  $s^{(1)} = (1, 1, 1, 1)$ . Пусть множество доминантных состояний  $Y = \{s^{(1)}, \dots, s^{(10)}\}$ . Обозначим через  $N^0$  сеть массового обслуживания с маршрутной матрицей  $\Theta$ , отличающуюся от сети  $N$  только тем, что в ней отсутствует управление маршрутизацией. Стационарная вероятность пребывания сети  $N^0$  в множестве  $Y$   $\pi^0(Y) = 0.22$ .

Некоторые характеристики сети  $N$  при различных значениях  $\varphi$  и  $\kappa$  представлены в таблице, где  $\eta^\kappa = \sum_{m \in U} \eta_m^{J, \kappa} \zeta_m / \sum_{n \in U} \zeta_n$  — м.о. длительности коррективного такта, если очередной такт в сети является коррективным. Для проверки точности предлагаемого метода анализа сетей было проведено имитационное моделирование функционирования сети  $N$ , результаты которого (вероятности  $\tilde{\pi}(Y)$  пребывания сети  $N$  в множестве  $Y$ ) также представлены в таблице.

Характеристики сети  $N$

| $\kappa$ | Характеристики сети | Длительность нормального такта $\varphi$ |      |      |      |      |       |       |
|----------|---------------------|--|------|------|------|------|-------|-------|
|          |                     | 0.5                                      | 1.0  | 2.0  | 5.0  | 10.0 | 20.0  | 50.0  |
| 1        | $\pi(Y)$            | 0.35                                     | 0.39 | 0.39 | 0.34 | 0.29 | 0.26  | 0.24  |
|          | $\eta^1$            | 1.25                                     | 1.28 | 1.34 | 1.46 | 1.54 | 1.58  | 1.59  |
|          | $\psi^1$            | 1.05                                     | 1.17 | 1.69 | 3.89 | 8.29 | 17.83 | 47.52 |
|          | $R^1$               | 0.95                                     | 0.85 | 0.59 | 0.26 | 0.12 | 0.06  | 0.02  |
|          | $\tilde{\pi}(Y)$    | 0.37                                     | 0.36 | 0.34 | 0.30 | 0.26 | 0.24  | 0.22  |



Окончание таблицы

| $\kappa$ | Характеристики сети | Длительность нормального такта $\varphi$ |      |      |      |      |       |       |
|----------|---------------------|--|------|------|------|------|-------|-------|
|          |                     | 0.5                                      | 1.0  | 2.0  | 5.0  | 10.0 | 20.0  | 50.0  |
| 2        | $\pi(Y)$            | 0.27                                     | 0.30 | 0.31 | 0.30 | 0.28 | 0.25  | 0.23  |
|          | $\eta^2$            | 2.29                                     | 2.31 | 2.35 | 2.44 | 2.51 | 2.54  | 2.55  |
|          | $\psi^2$            | 2.06                                     | 2.04 | 2.24 | 3.72 | 7.39 | 16.23 | 45.26 |
|          | $R^2$               | 0.48                                     | 0.49 | 0.45 | 0.27 | 0.14 | 0.06  | 0.02  |
|          | $\tilde{\pi}(Y)$    | 0.31                                     | 0.30 | 0.29 | 0.27 | 0.26 | 0.24  | 0.22  |
| 3        | $\pi(Y)$            | 0.23                                     | 0.25 | 0.26 | 0.26 | 0.26 | 0.24  | 0.23  |
|          | $\eta^3$            | 3.44                                     | 3.45 | 3.48 | 3.53 | 3.58 | 3.60  | 3.61  |
|          | $\psi^3$            | 3.23                                     | 3.15 | 3.18 | 4.06 | 6.87 | 14.64 | 42.42 |
|          | $R^3$               | 0.31                                     | 0.32 | 0.31 | 0.25 | 0.15 | 0.07  | 0.02  |
|          | $\tilde{\pi}(Y)$    | 0.25                                     | 0.26 | 0.26 | 0.25 | 0.25 | 0.22  | 0.21  |

Наибольшее отклонение  $\tilde{\pi}(Y)$  от  $\pi(Y)$  достигается при  $\varphi = 2, \kappa = 1$  и составляет менее 15% от значения  $\pi(Y)$ , что говорит о достаточной точности метода анализа.

Анализ результатов экспериментов с моделями показывает, что при фиксированной длительности нормального такта  $\varphi$  и увеличении  $\kappa$  качество управления снижается, а также изменяется интенсивность управления  $R^\kappa$ . В основном  $R^\kappa$  снижается с ростом  $\kappa$ , но при некоторых значениях  $\varphi$ , например при  $\varphi = 10$ , наблюдается увеличение  $R^\kappa$ . Это объясняется тем, что при всех значениях  $\kappa$  вероятность наблюдения в процессе функционирования сети в произвольный момент времени нормального такта  $\sum_{n \in D} \zeta_n \rightarrow 1$  при  $\varphi \rightarrow \infty$ , но скорость роста этой вероятности при разных  $\kappa$  различна. Например, при  $\varphi = 10$  и  $\kappa = 1$  вероятность равна  $\sum_{n \in D} \zeta_n = 0.80$ , а при  $\kappa = 2 - \sum_{n \in D} \zeta_n = 0.65$ .

Так как при  $\varphi = 10$  длительности коррективных тактов при  $\kappa = 1$  и  $\kappa = 2$  значительно меньше  $\varphi$  ( $0.83 \leq \eta_n^{J,1} \leq 3.33, 1.61 \leq \eta_n^{J,2} \leq 4.64$ , для всех  $n \in B$ ), то на значение  $\psi^\kappa$  существенное влияние оказывает значение первого слагаемого в (1), поэтому  $\psi^1 > \psi^2$  и  $R^1 < R^2$ .

Рассматривая зависимости интенсивности управления  $R^\kappa$  при каждом фиксированном параметре  $\kappa$  от значения длительности нормального такта  $\varphi$ , из результатов проведенных исследований можно сделать следующий вывод. При некоторых значениях  $\varphi$ , меньших  $\eta^\kappa$ , в выражении (1) величина убывания второго слагаемого больше величины возрастания первого. Поэтому возможно незначительное уменьшение м.о. длительности такта  $\psi^\kappa$  и, как следствие, незначительное возрастание интенсивности управления  $R^\kappa$ , например, при  $\kappa = 2$  и  $\varphi = 1$ .

При каждом фиксированном параметре  $\kappa$  существует оптимальное значение  $\varphi_0$ , при котором достигаются максимально возможные значения ведущей характеристики  $\pi(Y)$ . При  $\varphi \uparrow \varphi_0$  наблюдается рост характеристики, а при  $\varphi \rightarrow \infty \pi(Y) \rightarrow \pi^0(Y)$ . Для сети  $N$  при  $\kappa = 1, \kappa = 2$  и  $\kappa = 3$  ведущая характеристика  $\pi(Y)$  при  $\varphi_0 \approx 2$  возрастает соответственно на 80, 40 и 20% от значения  $\pi^0(Y)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод анализа сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией обладает достаточной для практических приложений точностью. Данный метод может быть использован для решения задач определения близких к оптимальным как параметров сетей массового обслуживания, так и параметров их систем управления, а также для оценки эффективности используемых в сетях обслуживания методов управления. В частности, как следует из результатов анализа рассмотренной в примере гипотетической сети обслуживания, для оценки эффективности управления с учетом зависящих от интенсивности управления затрат на реализацию процесса управления и выбора близких к оптимальным значений параметров управления необходимо использование показателя эффективности, учитывающего значения ведущей характеристики и интенсивности управления сетью.

## Библиографический список

1. Митрофанов Ю.И., Решетникова Н.П. Методы анализа сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией. Саратов, 2002. Деп. в ВИНТИ, № 973-В2002. 55 с.
2. Serfozo R.F. Markovian network processes: congestion-dependent routing and processing // Queueing Systems. 1989. № 5. P. 5-36.
3. Митрофанов Ю.И., Юдаева Н.В. Модели и анализ



сетей массового обслуживания с управлением маршрутизацией // *АиТ*. 2000. № 6. С. 104–113.

4. Митрофанов Ю.И. Метод управления маршрутизацией в замкнутых сетях массового обслуживания // *ТиСУ*. 2002. № 6. С. 86–92.

5. Rumsewicz M., Henderson W. Insensitivity with age-dependent routing // *Adv. Appl. Prob.* 1984. V. 21, № 2. P. 398–408.

6. Miyazawa M. Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // *Queueing Networks*. 1997. № 25. P. 45–75.

7. Daskalaki S., Smith J.M. Real-time routing in finite queueing networks // *Queueing Network Blocking: Proc.*

1-st Int. Workshop, Raleigh, N.C., 1988. P. 313–324.

8. Towsley D. Queueing network models with state-dependent routing // *J. of ACM*. 1980. V. 27, № 2. P. 323–337.

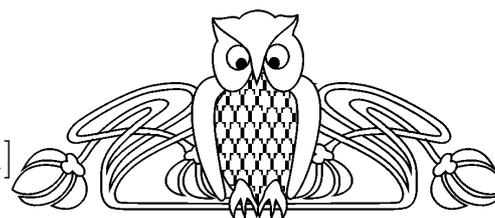
9. Krzesinski A.E. Multiclass queueing networks with state-dependent routing // *Performance Evaluations*. 1987. V. 7, № 2. P. 125–143.

10. Baskett F., Chandy K.M., Muntz R.R., Palacios F.G. Open, closed, and mixed networks of queues with different classes of customers // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1975. V. 22. P. 248–260.

11. Лунский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988.

УДК 517.518.85

## ФОРМОСОХРАНЯЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ЕДИНИЧНЫХ ШАРОВ В $C[0, 1]$



С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет,  
кафедра математической экономики  
E-mail: SidorovSP@info.sgu.ru

Shape-Preserving Linear  $n$ -width of Unit Balls in  $C[0, 1]$

S.P. Sidorov

Пусть  $D^k$ ,  $k$  — натуральное или ноль, означает оператор дифференцирования порядка  $k$ , определенный в  $C^k(X)$ ,  $X = [0, 1]$ , и пусть  $C$  — конус в  $C^k(X)$ . Определим линейный относительный  $n$ -поперечник множества  $A \subset C^k(X)$  в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C$  следующим образом:  $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$ . В настоящей статье находятся оценки линейных относительных  $n$ -поперечников шаров в  $C(X)$  для  $D^k$  с ограничением  $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$ .

Let  $D^k$ ,  $k$  is a natural number or zero, be the  $k$ -th differential operator, defined in  $C^k(X)$ ,  $X = [0, 1]$ , and let  $C$  be a cone in  $C^k(X)$ . Let us denote  $\delta_n^k(A, C)_{C(X)} := \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|D^k f - D^k L_n f\|_{C(X)}$  linear relative

$n$ -width of set  $A \subset C^k(X)$  in  $C(X)$  for  $D^k$  with constraint  $C$ . In this paper we estimate linear relative  $n$ -width of some balls in  $C(X)$  for  $D^k$  with constraint  $C = \{f \in C^k(X) : D^k f \geq 0\}$ .

### ВВЕДЕНИЕ

Для многих прикладных задач теории приближений зачастую необходимо не просто аппроксимировать некоторую функцию, а приблизить ее с сохранением некоторых ее свойств, связанных с формой функции (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.).

Интерес к данной проблематике впервые возник в конце 60-х годов, когда появились работы О. Шиша [1], Г.Г. Лоренца и К.Л. Целлера [2]. Они дали толчок работам Р. ДеВора по монотонному приближению и работам А. С. Шведова [3], Д. Ньюмана [4], Р. Битсона и Д. Левиатана [5] по комонотонной аппроксимации в 70 и 80-е годы.

Пусть  $F$  — линейное нормированное пространство,  $A$  и  $C$  есть непустые подмножества  $F$ . Тогда относительным  $n$ -поперечником по Колмогорову множества  $A$  в  $F$  с ограничением  $C$  называется величина  $d_n(A, C)_F = \inf_{F_n} E(A, F_n \cap C) = \inf_{F_n} \sup_{f \in A} \inf_{g \in F_n \cap C} \|f - g\|_F$ , где левый инфимум ищется среди всех  $n$ -мерных линейных многообразий  $F_n$  пространства  $F$ , таких, что  $F_n \cap C \neq \emptyset$ . Если  $C = F$ , то  $d_n(A)_F = d_n(A, F)_F$  есть  $n$ -поперечник по Колмогорову множества  $A$  в  $F$  [6].

Впервые понятие относительного поперечника было введено В. Н. Коноваловым в 1984 году [7]. Оценки величин  $d_n(A, C)_F$  получены для некоторых конкретных  $A$ ,  $C$  и  $F$  в работе [8].

Пусть  $L$  есть некоторый линейный оператор, определенный в  $F$ , со значениями в  $F$  и  $C$  — некоторый конус в  $F$ ,  $C \neq \emptyset$ . Будем говорить, что оператор обладает свойством формосохранения относительно конуса  $C$ , если  $L(C) \subset C$ .

Пусть  $F$  — линейное нормированное пространство и  $A \subset F$ ,  $C \subset F$ . Линейный оператор  $L_n$ , отображающий  $F$  в линейное пространство конечной размерности  $n$ , называется оператором конечного ранга  $n$ .

Линейным относительным  $n$ -поперечником множества  $A$  в  $F$  с ограничением  $C$  назовем величину  $\delta_n(A, C)_F = \inf_{L_n(C) \subset C} \sup_{f \in A} \|f - L_n f\|_F$ , где инфимум ищется среди всех непрерывных линейных