УДК 511

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЕЛ С ДВОИЧНЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

А.П. Науменко

Белгородский государственный университет,
E-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

Пусть p —-простое число, такое, что 2 является первообразным корнем по модулю p. Пусть N_0 –- множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1. Для числа чисел из множества N_0, лежащих в арифметической прогрессии с разностью p и не превосходящих X, получена асимптотическая формула:
$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1=\frac{X}{2p}+O(X^{\eta}),\quad \text{где } \eta=\frac{\log_2 p}{p-1}.$$

Ключевые слова: двоичное разложение, тригонометрическая сумма

On the Distribution of the Numbers with Binary Expansions of a Special Type in Arithmetic Progressions

A.P. Naumenko

Let 2 be the primitive root mod p. Let N_0 be a set of natural numbers whose binary expansions contain even numbers of 1. Numbers from N_0 are uniformly distributed in arithmetic progressions with the difference p.

Key words: binary expansion, trigonometric sum

Пусть N_0 — множество натуральных чисел, двоичное разложение которых содержит четное число 1.

А.О. Гельфонд доказал следующую теорему [1]:
$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv l \pmod m\\ n\in N_0}} 1=\frac{X}{2m}+O(X^{\lambda}),\quad \lambda=\frac{\ln 3}{\ln 4}=0.792\ldots \tag{1}$$

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема, которая уточняет (1) для частного случая.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, такое, что 2 является первообразным корнем по модулю p. Пусть a — произвольное целое число из отрезка $[0; p-1]$. Тогда справедлива асимптотическая формула:*
$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1=\frac{X}{2p}+O(X^{\eta}),$$
где $\eta=\dfrac{\log_2 p}{p-1}$, постоянная в знаке O зависит только от p.

Для доказательства теоремы нам потребуются четыре леммы.

Введем следующее обозначение:
$$\varepsilon(k)=\begin{cases}1, & \text{если } k\in N_0,\\ -1, & \text{если } k\notin N_0.\end{cases}$$

Справедливо тождество
$$\sum_{\substack{0\le n\le 2^Q-1\\ n\equiv a \pmod b}}\varepsilon(n)=\sum_{n=0}^{2^Q-1}\varepsilon(n)\frac{1}{b}\sum_{c=1}^{b}e^{2\pi i c\frac{n-a}{b}}=\frac{1}{b}\sum_{c=1}^{b}e^{-2\pi i\frac{ca}{b}}\sum_{n=0}^{2^Q-1}\varepsilon(n)e^{2\pi i\frac{cn}{b}}. \tag{2}$$

Лемма 1. *Имеет место следующее равенство:*
$$S_Q(\alpha)=\sum_{0\le n<2^Q}\varepsilon(n)e^{2\pi i\alpha n}=\prod_{r=0}^{Q-1}\left(1-e^{2\pi i\alpha 2^r}\right). \tag{3}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по Q. При $Q = 1$ имеем

$$\sum_{0 \le n < 2} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \prod_{r=0}^{0} (1 - e^{2\pi i \alpha 2^r}).$$

Пусть при некотором $Q \ge 1$ лемма справедлива. Проверим ее справедливость для $Q+1$:

$$\sum_{0 \le n < 2^{Q+1}} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \sum_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} + \sum_{2^Q \le n < 2^{Q+1}} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n}.$$

Заметим, что $\varepsilon\left(2^Q + n\right) = -\varepsilon(n)$, так как $n < 2^Q$. Далее,

$$\sum_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} + \sum_{2^Q \le n < 2^{Q+1}} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \sum_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} - e^{2\pi i \alpha 2^Q} \sum_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} =$$

$$= (1 - e^{2\pi i \alpha 2^Q}) \sum_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n}.$$

Но, по предположению индукции, $\sum\limits_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \prod\limits_{r=0}^{Q-1} (1 - e^{2\pi i \alpha 2^r})$. Таким образом,

$$\sum_{0 \le n < 2^{Q+1}} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} = \prod_{r=0}^{Q} (1 - e^{2\pi i \alpha 2^r}).$$

Лемма доказана.

Из леммы 1 имеем равенство

$$\left| \sum_{0 \le n < 2^Q} \varepsilon(n) e^{2\pi i \alpha n} \right| = \prod_{r=0}^{Q-1} |1 - e^{2\pi i \alpha 2^r}| = \prod_{r=0}^{Q-1} |e^{2\pi i \alpha 2^r} - 1| =$$

$$= \prod_{r=0}^{Q-1} \left| 2i e^{\pi i \alpha 2^r} \left(\frac{e^{\pi i \alpha 2^r} - e^{-\pi i \alpha 2^r}}{2i} \right) \right| = 2^Q \prod_{r=0}^{Q-1} |\sin \pi \alpha 2^r|.$$

Лемма 2 [2, с.78]. *Пусть n — натуральное число, x, y — комплексные числа. Тогда*

$$x^n - y^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x e^{2\pi i \frac{k}{n}} - y e^{-2\pi i \frac{k}{n}} \right).$$

Лемма 3. *Пусть n — нечетное число. Тогда верно*

$$\prod_{r=0}^{Q-1} \left| \sin \frac{\pi k}{n} \right| = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Доказательство. Пусть $f(z) = e^{2\pi i z} - e^{-2\pi i z} = 2i \sin 2\pi z$. Пусть $x = e^{2\pi i z}$, $y = e^{-2\pi i z}$. Тогда по лемме 2

$$f(nz) = x^n - y^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x e^{2\pi i \frac{k}{n}} - y e^{-2\pi i \frac{k}{n}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} f\left(z + \frac{k}{n} \right) =$$

$$= f(z) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} f\left(z + \frac{k}{n} \right) \prod_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} f\left(z + \frac{k}{n} - 1 \right) = f(z) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} f\left(z + \frac{k}{n} \right) f\left(z - \frac{k}{n} \right).$$

Таким образом,

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(nz)}{f(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{2i \sin 2\pi n z}{2i \sin 2\pi z} = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{\sin 2\pi n z}{2\pi n z}}{\frac{\sin 2\pi z}{2\pi z}} n = n.$$

При $z = 0$ имеем

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(-\frac{k}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2^2 i^2 \sin^2 \frac{2\pi k}{n} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left|\sin \frac{2\pi k}{n}\right|^2 = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left|\sin \frac{\pi k}{n}\right| = n.$$

Откуда

$$\prod_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi k}{n}\right| = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть p — простое число, такое, что 2 является первообразным корнем по модулю p. Тогда справедлива оценка*

$$\left|\sum_{pn+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pn+a)\right| \le f(p) 2^{Q\eta},$$

где $\eta = \dfrac{\log_2 p}{p-1}$, $\quad f(p) = 2\left(\dfrac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right)^{\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}$, $\quad 0 \le a < p$.

Доказательство. На основании (2) и (3) имеем

$$\left|\sum_{0\le pn+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pn+a)\right| = S_Q(0) + \frac{1}{p}\sum_{c=1}^{p-1} e^{-2\pi i \frac{ac}{p}} S_Q\left(\frac{c}{p}\right).$$

Оценим сумму $S_Q\left(\frac{c}{p}\right)$ при любом $c \in [1, p-1]$. Рассмотрим произведение $\prod\limits_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right|$. Заметим, что $\left|\sin \frac{a\pi}{p}\right|$ зависит только от остатка a при делении на p. Так как 2 является первообразным корнем по модулю p, числа $2^0, 2^1, \ldots, 2^{p-2}$ образуют приведенную систему вычетов по модулю p. Следовательно,

$$\prod_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| = \left(\prod_{s=1}^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]} \prod_{r=(p-1)(s-1)}^{(p-1)s-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right|\right) \prod_{r=(p-1)\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| =$$

$$= \prod_{r=(p-1)\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| \left(\prod_{m=1}^{p-1} \left|\sin \frac{\pi m}{p}\right|\right)^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}.$$

Используя тот факт [1], что $\sin x \sin 2x \le \frac{3}{4}$ при $\sin x \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем

$$\prod_{r=(p-1)\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| \le \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}.$$

Пользуясь леммой 3, имеем

$$\prod_{r=0}^{Q-1} \left|\sin \frac{\pi c 2^r}{p}\right| \le \left(\frac{p}{2^{p-1}}\right)^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{pn+a\le 2^Q-1} \varepsilon(pn+a)\right| \le 2^Q \left(\frac{p}{2^{p-1}}\right)^{\left[\frac{Q-1}{p-1}\right]} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}} \le 2^{Q\frac{\log_2 p}{p-1}+1} \left(\frac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right)^{\left\{\frac{Q-1}{p-1}\right\}}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{\substack{n\le X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1$. Для нее справедливо равенство

$$\sum_{\substack{n\le X\\ n\equiv a \pmod p\\ n\in N_0}} 1 = \frac{X}{2p} + \frac{1}{2}\sum_{pn+a\le X}\varepsilon(pn+a) + O(1).$$

Таким образом, достаточно оценить сумму

$$S(X,a) = \sum_{pn+a\le X}\varepsilon(pn+a).$$

Определим натуральное число k неравенствами $2^k \le X < 2^{k+1}$. Тогда имеем

$$S(X,a) = \sum_{pn+a\le 2^k-1}\varepsilon(pn+a) + \sum_{2^k\le pn+a\le X}\varepsilon(pn+a).$$

Так как $2^k \le X < 2^{k+1}$, справедливо тождество

$$\sum_{2^k\le pn+a\le X}\varepsilon(pn+a) = -\sum_{0\le pn+l\le X-2^k}\varepsilon(pn+l) = -S(X-2^k,l),$$

где $l \equiv a - 2^k (\mod p)$, $l\in[0,p-1]$.

Получено равенство

$$S(X,a) = S(2^k,a) - S(X-2^k,l).$$

Применяя то же рассуждение, что к $S(X,a)$, к сумме $S(X-2^k,l)$ и так далее, приходим к неравенству

$$|S(X,a)| \le |S(2^k,a)| + |S(2^{k_1},a_1)| + \cdots ,$$

где $k > k_1 > \cdots$

Применяя к каждой сумме в правой части последнего неравенства лемму 4, получаем

$$|S(X,a)| \le 2\frac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}\sum_{i=0}^{[\log_2 X]} 2^{([\log_2 X]-i)\frac{\log_2 p}{p-1}} \le 2\frac{3^{\frac{p-1}{2}}}{p}c(p)X^{\frac{\log_2 p}{p-1}},$$

где $c(p) = \frac{1}{1-p^{-1/(p-1)}}$.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Gelfond A.O.* Sur les nombres qui ont des proprietes additives et multiplicatives donnies // Acta Arith. 1968. V. XIII. P. 259–265.

2. *Айерленд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.