[Scientific notes of the Oryol State University], 2012, no. 6, pt. 2, pp. 156–162 (in Russian).
4. Jacobson N. *Algebry Li* [Lie algebras]. Moscow, Mir, 1964, 355 p. (in Russian).
5. Beidar K. I., Pikhtilkov S. A. Prime radical of special Lie algebras. *Fundamentalnaya i prikladnaya mathematika*, 2000, vol. 6, no. 3, pp. 643–648 (in Russian).
6. Balaba I. N., Mikhalev A. V., Pikhtilkov S. A. Prime Radical of Graded Ω-groups. *Journal of Mathematical Sciences* [Fundamentalnaya i prikladnaya mathematika], 2008, vol. 149, no. 2, pp. 1146–1156.
7. Pikhtilkov S. A. Locally Nilpotent Ideals of Special Lie Algebras. *Comm. in Algebra*, 2001, vol. 29, no. 10, pp. 3781–3786.

УДК 511.4

АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОДНОГО КЛАССА ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. Ю. Нестеренко

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, nesterenko_a_y@mail.ru

В работе исследуется класс иррациональных чисел, задаваемых быстро сходящимися рядами с рациональными коэффициентами. Рассматривается задача о восстановлении неизвестных параметров рациональных коэффициентов по заданным рациональным приближениям. Получены верхние и нижние оценки на неизвестные параметры, а также предложен алгоритм поиска неизвестных. Приведены результаты вычислений на ЭВМ.

Ключевые слова: разложения действительных чисел, восстановление параметров.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $b > 1$ натуральное число. Мы будем рассматривать действительные числа $\alpha > 0$, заданные равенством

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i}{(dn+x_i)^s}b^{-n}, \qquad m, d, s \in \mathbb{N}, \qquad u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{Q}, \tag{1}$$

а величины $x_1, \ldots, x_m$ — различные натуральные числа. Многие математические константы, такие как $\ln 2$, π, константа Каталана, могут быть представлены в указанном виде. Более подробно, см. в работе [1].

В работе [2] автором рассматривались представления чисел вида (1) в системе счисления по основанию b

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b^{-n}, \qquad 0 \le a_n < b, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

а также, исследовались статистические свойства последовательности натуральных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

В данной работе решается следующая задача. Пусть для некоторого натурального числа r задано рациональное приближение к числу α

$$\sigma_r = \sum_{n=0}^{r} a_n b^{-n}, \qquad |\alpha - \sigma_r| < b^{-r}, \qquad \sigma_r \in \mathbb{Q}.$$

Необходимо определить значения величин $x_1, \ldots, x_m$, если известны значения m, d, s и $u_1, \ldots, u_m$. Поскольку неизвестные величины различны, то мы будем дополнительно считать, что выполнены неравенства

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m. \tag{3}$$

1. ВЫВОД ОЦЕНОК ДЛЯ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Предположим, что существует некоторая натуральная константа c такая, что $x_m \le c$. В этом случае значения неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ могут быть найдены простым перебором. При этом мощность множества возможных наборов неизвестных величин, удовлетворяющих (1), не превосходит c^m.

Если константа c невелика, то для определения неизвестных значений $x_1, \ldots, x_m$, может быть использован PSLQ метод, предложенный в работе [3]. Далее мы будем считать, что значения $x_1, \ldots, x_m$ не ограничены. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Определим последовательность действительных чисел* α_k

$$\alpha_1 = \sigma_r, \qquad \alpha_k = \alpha_{k-1} - u_{k-1}\xi_{k-1} \qquad \text{для} \qquad k = 2, \ldots, m,$$

где величины $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ *удовлетворяют равенствам*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} u_i \xi_i, \qquad \xi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{-n}}{(dn + x_i)^s}, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Если для r *выполнены условия:*

1) величина σ_r *отлична от нуля,*

2) выполнено неравенство

$$u_m > \frac{2(b-1)(dr + x_m)^s}{b^r\left(1 - b^{-r}\right)}, \tag{5}$$

3) выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} u_i < (b-1)(dr)^s b^r, \tag{6}$$

то для всех индексов $k = 1, \ldots, m$ *выполнены неравенства*

$$\left(\frac{u_k}{\alpha_k}\right)^{1/s} < x_k < \left(\frac{b}{\alpha_k(b-1)} \sum_{i=k}^{m} u_i\right)^{1/s}. \tag{7}$$

Для доказательства приведенной теоремы нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любого индекса* $r = 0, 1, \ldots$ *выполнено равенство*

$$\alpha - \sigma_r = b^{-r}\left(\gamma_r + \delta_r\right), \qquad \gamma_r = \sum_{n=r+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i}{(dn + x_i)^s} b^{-n}, \tag{8}$$

а величина $\delta_r \in \mathbb{Q}$ *определяется условиями*

$$\delta_r = b^r \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{r} \frac{u_i b^{-n}}{(dn + x_i)^s} - \sigma_r, \qquad 0 < \delta_r < 1. \tag{9}$$

Доказательство леммы содержится в работе [2].

Лемма 2. *Для величин* γ_r, $r = 0, 1, \ldots$, *определенных равенством* (8), *верна оценка*

$$0 < \gamma_r < \frac{1}{(b-1)(d(r+1))^s b^r} \sum_{i=1}^{m} u_i.$$

Доказательство. Неравенство $0 < \gamma_r$, очевидно, выполнено в силу определения величины γ_r. Далее, в силу неравенств (3), а также из условия $n \ge r + 1$, следует выполнение неравенства $\dfrac{1}{dr} > \dfrac{1}{dn + x_i}$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Тогда

$$\gamma_r = \sum_{n=r+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{u_i}{(dn + x_i)^s} b^{-n} < \frac{1}{(d(r+1))^s} \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{n=r+1}^{\infty} b^{-n}.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} b^{-n} = b^{-r}\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} = \frac{b^{-r}}{(b-1)}, \tag{10}$$

получаем утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 1. Согласно (4) и (8) для величины α_k выполнено равенство

$$\alpha_k = \sigma_r - \sum_{i=1}^{k-1} u_i\xi_i = \alpha - b^{-r}\left(\gamma_r+\delta_r)\right) - \sum_{i=1}^{k-1} u_i\xi_i = \sum_{i=k}^{m} u_i\xi_i - b^{-r}\left(\delta_r+\gamma_r\right).$$

Поскольку неизвестная x_k принимает наименьшее значение среди величин $x_k,\ x_{k+1},\dots,x_m$, а величины b, δ_r, γ_r положительны, то

$$\alpha_k < \sum_{i=k}^{m} u_i\xi_i = \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{-n}}{(dn+x_k)^s} < \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{-n}}{x_k^s} = \frac{b}{x_k^s(b-1)}\sum_{i=k}^{m} u_i.$$

Полученное неравенство дает нам оценку сверху для величины x_k.

С другой стороны, запишем равенство

$$\alpha_k = \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{-n}}{(dn+x_i)^s} - b^{-r}\left(\delta_r+\gamma_r\right) =$$

$$= \sum_{i=k}^{m}\frac{u_i}{x_i^s} + \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^{-n}}{(dn+x_i)^s} - b^{-r}\left(\delta_r+\gamma_r\right) = \sum_{i=k}^{m}\frac{u_i}{x_i^s} + \Delta_1 - \Delta_2. \tag{11}$$

Вначале оценим величину Δ_1:

$$\Delta_1 = \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^{-n}}{(dn+x_i)^s} > \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{r}\frac{b^{-n}}{(dn+x_i)^s} >$$

$$> \sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{r}\frac{b^{-n}}{(dn+x_m)^s} > \frac{1}{(dr+x_m)^s}\sum_{i=k}^{m} u_i \sum_{n=1}^{r} b^{-n}.$$

Учитывая (10), получим равенство

$$\sum_{n=1}^{r} b^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} - \sum_{n=r+1}^{\infty} b^{-n} = \frac{1-b^{-r}}{(b-1)},$$

из которого следует оценка

$$\Delta_1 > \frac{(1-b^{-r})}{(b-1)(dr+x_m)^s}\sum_{i=k}^{m} u_i.$$

Теперь, учитывая (5) и (6), а также утверждения доказанных ранее лемм, получаем цепочку неравенств

$$\Delta_1 > \frac{u_m\left(1-b^{-r}\right)}{(b-1)(dr+x_m)^s} > 2b^{-r} > b^{-r}(1+\varepsilon) > \Delta_2,$$

где $\varepsilon = \dfrac{1}{(b-1)(d(r+1))^s b^r}\sum\limits_{i=1}^{m} u_i$. Следовательно, $\Delta_1-\Delta_2>0$. Подставляя это неравенство в (11), получаем оценку

$$\alpha_k = \sum_{i=k}^{m}\frac{u_i}{x_i^s} + \Delta_1 - \Delta_2 > \sum_{i=k}^{m}\frac{u_i}{x_i^s} > \frac{u_k}{x_k^s},$$

из которой следует утверждение теоремы. □

Сделаем несколько замечаний к доказанной теореме.

Утверждение теоремы позволяет в явном виде выписать верхние и нижние оценки на величину неизвестных $x_1,\dots,x_m$. Данные оценки верны, как следует из (5), только для r, удовлетворяющих неравенству

$$x_m < \left(\frac{u_m b^r(1-b^{-r})}{2(b-1)}\right)^{1/s} - dr. \tag{12}$$

На практике нам неизвестно значение x_m. Таким образом, фиксировав r, удовлетворяющее неравенству (6), мы получим оценку сверху на величину возможных решений исходной задачи. С другой стороны, правая часть неравенства (12) при $r \to \infty$, ведет себя как $O\left(b^{r/s}\right)$, следовательно, для любого значения x_m найдется такой индекс r, что неравенство (12) будет выполнено.

2. АЛГОРИТМ ПОИСКА НЕИЗВЕСТНЫХ

Алгоритм поиска неизвестных $x_1, \ \ldots, x_m$ заключается в следующем. Используя (7), вычислить интервал для величины x_1. Для каждого целого числа x_1 в указанном интервале определить величину $\alpha_2 = \alpha_1 - u_1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b^{-n}}{(dn + x_1)^s}$ и интервал для возможных значений величины x_2. Далее, для каждого целого значения x_2 из найденного интервала определить величину $\alpha_3 = \alpha_2 - u_2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{b^{-n}}{(dn + x_2)^s}$ и интервал возможных значений для x_2. Заметим, что для x_2 также должна выполняться оценка снизу $x_1 < x_2$.

Продолжая аналогичным образом, найдем все возможные наборы неизвестных значений $x_1, \ldots, x_m$. Для каждого найденного набора вычислить последовательность $a_0, a_1, \ldots$ и сравнить полученные значения с заданными. В случае совпадения, закончить алгоритм.

Приведем пример, иллюстрирующий описанные выше вычисления. Зафиксируем $b = 256$ и рассмотрим действительное число:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4n + x_1)} + \frac{1}{(4n + x_2)} + \frac{1}{(4n + x_3)} \right) 256^{-n},$$

для которого $d = 4$, $m = 3$, $s = 1$ и $u_1 = u_2 = u_3 = 1$. Известно, что начальные коэффициенты в представлении $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 256^{-n}$ имеют вид $\{0, 7, 12, 235, 161, 143, 245, 159, 92, 205, 168, 97, 219, \ldots\}$.

Выберем $r = 5$ согласно (12) этого достаточно для определения величин x_1, x_2, x_3, не превосходящих 2.156×10^9. Построим рациональное приближение:

$$\sigma_5 = \frac{30281539983}{1099511627776} = 0.0275409001761.$$

Воспользовавшись неравенством (7) при $\alpha_1 = \sigma_5$ получаем неравенства $37 \le x_1 \le 109$. Вычисляя для каждого значения x_1 в указанном интервале величину $\alpha_2 = \alpha_1 - \xi_1$, найдем 73 интервала для возможных значений величины x_2. Так, при $x_1 = 37$ неизвестная x_2 удовлетворяет неравенству $2247 \le x_2 \le 4511$, а при $x_1 = 109$ интервал возможных значений для x_2 пуст.

Используя аналогичные соображения, для каждой пары x_1, x_2 найдем интервал для возможных значений x_3. Общее количество найденных троек, удовлетворяющих неравенствам (7), равно 286605.

Для отсева ложных значений мы используем следующее рассуждение. Если неизвестные x_1, x_2, x_3 принимают истинные значения, то согласно (9) должно выполняться неравенство

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) - \sigma_5 < 256^{-5},$$

где

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=0}^{5} \left(\frac{1}{(4n + x_1)} + \frac{1}{(4n + x_2)} + \frac{1}{(4n + x_3)} \right) 256^{-n}.$$

Вычислив величины $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ для найденных троек x_1, x_2, x_3, мы получили 211 троек, для которых выполнялось указанное неравенство.

В завершение для каждой такой тройки были найдены преставление $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{n=0}^{7} c_n 256^{-n}$ и, сравнивая полученные коэффициенты и коэффициенты $a_1, \ldots, a_7$, искомое решение

$$x_1 = 54, \qquad x_2 = 122, \qquad x_3 = 1381.$$

Описанные выше вычисления были произведены на ЭВМ, время* вычислений составило 4.87 с.

Отметим, что время вычислений существенным образом зависит от величин x_1, x_2, x_3. Так, для определения неизвестных значений $x_1 = 122$, $x_2 = 1245$, $x_3 = 1381$, при тех же параметрах b, d, s, m и u_1, u_2, u_3, программе потребовался 1 ч 32 мин. В процессе поиска было перебрано 365263502 возможных троек, из которых 9169647 удовлетворяли неравенству (9).

Библиографический список

1. *Bayley D. H.* A Compendium of BBP-type Formulas for Mathematical Constants. Preprint. April, 2013. URL : http://crd.lbl.gov/˜dhbailey/dhbpapers/bbp-formulas.pdf (дата обращения 10.09.2013).
2. *Нестеренко А. Ю.* О статистических свойствах некоторых трансцендентных чисел // Учен. зап. Орлов. гос. ун-та. 2012. № 6, ч. 2. С. 170–176.
3. *Ferguson H. R. P., Bailey D. H., Arno S.* Analysis of PSLQ, An Integer Relation Finding Algorithm // Math. of Computation. 1999. Vol. 68, № 225. P. 351–369.

Parameters Recovering Algorithm for One Class of Irrationalities

A. Yu. Nesterenko

National Research University «Higher School of Economics», Russia, 109028, Moscow, Bol. Trekhsvjatitel'skij per., 1-3/12, build. 8, nesterenko_a_y@mail.ru

In this article we study one class of irrationalities which may be defined as covergent series with rational coefficients. This class contain a lot of well known constants such as $\ln 2$, π, e.t.c. We consider the problem of determination parameters of rational coefficients by rational approximation of irrationality. We deduced the lower and upper bounds and present an algorithm for determination of unknown parameters. Also, we present some results of practical calculations.

Key words: irrationality, rational approximation.

References

1. Bayley D. H. *A Compendium of BBP-type Formulas for Mathematical Constants*. Preprint. April, 2013. Available at: http://crd.lbl.gov/˜dhbailey/dhbpapers/bbp-formulas.pdf (Accessed 10, September, 2013).
2. Nesterenko A. Yu. On the statistical properties of some transcendetal numbers. *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta* [Scientific notes of the Oryol State University], 2012, no. 6, pt. 2, pp. 170–176 (in Russian).

3. Ferguson H. R. P., Bailey D. H., Arno S. Analysis of PSLQ, An Integer Relation Finding Algorithm. *Mathematics of Computation*, 1999, vol. 68, no. 225, pp. 351–369.

УДК 501.1

О ПОРОЖДАЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ ПОДАЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТОВ СВОБОДНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

В. М. Петроградский[1], И. А. Субботин[2]

[1]Доктор физико-математических наук, факультет математики, Университет Бразилиа, Бразилиа, petrogradsky@rambler.ru
[2]Аспирант кафедры алгебро-геометрических вычислений, факультет математики и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, shelby888@yandex.ru

Пусть $L = L(X)$ –- свободная ограниченная алгебра Ли конечного ранга k со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ над произвольным полем положительной характеристики. Пусть G –- нетривиальная конечная группа однородных автоморфизмов $L(X)$. Наша основная цель — доказать, что подалгебра инвариантов L^G бесконечно порождена. Мы получаем более сильный результат. Пусть $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ — однородное свободное порождающее множество

*Вычисления производились на ноутбуке HP EliteBook с процессором Intel Core i5 CPU M 560, тактовой частотой 2.67GHz и 4Gb оперативной памяти.

