а это и означает, что прямоугольные частичные суммы $S_{NM}(\widetilde{f})$ не сходятся в пространстве $L^{\widetilde{p}_\alpha(u,v)}(E)$ к функции $\widetilde{f}$. $\square$

Автор благодарит И. И. Шарапудинова за постановку задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632. [*Sharapudinov I. I.* Topology of the space $L^{p(x)}([0,1])$ // Math. Notes. 1979. Vol. 26, № 4. P. 796—806.]
2. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283. [*Sharapudinov I. I.* On the basis property of the Haar system in the space $L^{p(x)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean // Math. USSR Sb. 1986. Vol. 58, № 1. P. 279–287.]
3. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с. [*Kashin B. S., Saakyan A. A.* Orthogonal series. Moscow : AFC, 1999. 560 p.]
4. *Соболь И. М.* Многомерные квадратные формулы и функции Хаара. М. : Наука, 1969. 288 с. [*Sobol I. M.* Multidimensional quadratic Haar formulas and functions. Moscow : Nauka, 1969. 288 p.]
5. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 456 с. [*Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. Cambridge : University Press, 1934. 329 p.]
6. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М. : Наука, 1967. 416 с. [*Vulih B. Z.* Introduction to functional analysis. Moscow : Nauka, 1967. 416 p.]

УДК 517.51

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ БИРКГОФА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ УПОРЯДОЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ

В. В. Новиков

Саратовский государственный университет
E-mail: vvnovikov@yandex.ru

В терминах обобщенной упорядоченной Λ-вариации получено достаточное условие равномерной сходимости на всей числовой прямой интерполяционного процесса Лагранжа и (0,2,3)-интерполяционного процесса Биркгофа.

Ключевые слова: интерполяция Лагранжа, интерполяция Биркгофа, лакунарная интерполяция, упорядоченная Λ-вариация.

On Birkhoff Interpolation of Functions of Ordered Λ-bounded Variation

V. V. Novikov

A sufficient condition for the uniform convergence of Lagrange and (0,2,3) Birkhoff interpolation on the whole real line is obtained. The condition is in terms of ordered Λ-bounded variation.

Key words: Lagrange interpolation, Birkhoff interpolation, lacunary interpolation, ordered Λ-variation.

ВВЕДЕНИЕ

Определение 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_k} = +\infty$. Говорят, что f есть *функция ограниченной* Λ*–вариации* (обозначение: $f \in \Lambda BV$), если

$$\sup_{\Pi} \sum_{k} \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем системам Π непересекающихся интервалов вида

$$I_k := (t_{2k-1}, t_{2k}) \subset [-\pi, \pi], \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{2}$$

Определение 2. Функция f называется *функцией ограниченной упорядоченной* Λ*–вариации* (обозначение: $f \in O\Lambda BV$), если выполнено (1), причем супремум берется по всевозможным системам неналегающих интервалов (2) таких, что $I_k < I_{k+1}, k = 1, 2, \dots$, или $I_k > I_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ (запись $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ означает, что I_k расположен левее, соответственно правее, чем I_{k+1}).

При $\Lambda = \{k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующие классы обозначаются HBV и $OHBV$ (*гармоническая вариация*).

Приведенные определения были предложены в 70-х гг. прошлого века Ватерманом (D. Waterman) [1–4]. Роль введенных им классов функций демонстрирует, в частности, следующий результат. Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительных непрерывных на всей числовой прямой 2π-периодических функций с равномерной нормой.

Теорема 1 [1]. *Если $f \in C_{2\pi} \cap HBV$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Если же $\Lambda BV \supseteq HBV$, причем $\Lambda BV \neq HBV$, то найдется функция $f \in C_{2\pi} \cap \Lambda BV$, ряд Фурье которой расходится, по крайней мере, в одной точке.*

Очевидно, что $\Lambda BV \subseteq O\Lambda BV$. В статье [3] Ватерман поставил вопрос, является ли это включение строгим? Утвердительный ответ, сначала для случая гармонической вариации, был получен в работе [5]. Позднее также положительный ответ был дан в [6] для случая произвольной последовательности Λ.

Вопросы сходимости ряда Фурье функций класса $O\Lambda BV$ рассматривались в заметке [7].

Хорошо известен факт, что между частичными суммами ряда Фурье и интерполяционными многочленами Лагранжа существует глубокая аналогия. В связи с этим результаты, полученные для рядов Фурье функций из классов обобщенной ограниченной вариации позже переносились на случай интерполирования. Приведем следующий характерный результат в этом направлении.

Теорема 2 [8]. *Пусть $\alpha, \beta \in (-1, 1/2)$, $q = \max\{-1/2; \alpha; \beta\}$ и пусть $L_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами в нулях ортогонального многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Если*

$$f \in C[-1,1] \cap \Lambda BV, \tag{3}$$

причем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{q-1/2}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} 1/\lambda_k\right)^{-1} < +\infty, \tag{4}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|f(\cdot) - L_n^{(\alpha,\beta)}(f,\cdot)\|_{C[-1,1]} = 0, \tag{5}$$

и, обратно, из условий (3) и (5) следует (4).

В настоящей заметке рассматривается вопрос о сходимости интерполяционного процесса Лагранжа, а также одного специального интерполяционного процесса Биркгофа для функций из класса $f \in C_{2\pi} \cap O\Lambda BV$.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $L_n(f,x)$, $n = 1, 2, \ldots$, тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$, а через $Q_n(f,x)$, $n = 1, 2, \ldots$, $(0,2,3)$-интерполяционный полином Биркгофа такой, что

$$Q_n(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n}), \qquad Q_n''(f, x_{k,n}) = Q_n'''(f, x_{k,n}) = 0, \qquad k = \overline{-n, n}.$$

Отметим, что вопросы существования, единственности и явного представления для интерполяции Биркгофа, как правило, весьма непросты и в различных частных случаях решаются по-разному (см., например, [9]). Для полинома $Q_n(f,x)$ существование и единственность были доказаны среди прочего в работе [10].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть последовательность Λ такова, что $\lambda_k/k \to 0$ монотонно при $k \to \infty$. Тогда для любой функции $f \in C_{2\pi} \cap O\Lambda BV$ последовательности многочленов $\{L_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Q_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся к f равномерно на всей числовой прямой.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Введем некоторые обозначения. Для $f \in C_{2\pi}$ и $n \geq 3$ положим

$$T_{n,p}^*(f) = {\sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]}}' \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1, n, p)} \right|, \qquad p = -n-1, \ldots, n, \qquad T_n^*(f) = \max_{-n-1 \leq p \leq n} T_{n,p}^*(f),$$

где

$$\varphi(m,n,p)=\begin{cases} p-m, & \text{если } |p-m|\le 3([n/2]+1),\\ 2n-(p-m), & \text{если } p-m>3([n/2]+1),\\ -2n-(p-m), & \text{если } p-m<-3([n/2]+1). \end{cases}$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс k является решением уравнения $\varphi(2k+1,n,p)=0$; кроме того, будем считать, что $x_{n+1,n}=\pi$, $x_{-n-1,n}=-\pi$. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 [11]. *Условие $T_n^*(f)\to 0$ при $n\to\infty$ влечет равномерную на $\mathbb{R}$ сходимость к f полиномов $\{L_n(f,x)\}$.*

Лемма 2 [12]. *Пусть $f\in C_{2\pi}$. Тогда существует абсолютная постоянная C и функция $\mu_n(x)\in C_{2\pi}$, $|\mu_n(x)|<C$, не зависящая от f, такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-Q_n(f,x)-\mu_n(x)(f(x)-L_n(f,x))]=0$$

равномерно на $\mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем последовательность Λ, удовлетворяющую условию теоремы, функцию $f\in C_{2\pi}\cap O\Lambda BV$ и обозначим $a(k)=k/\lambda_k$. Пусть $V(\Lambda,f)$ — верхняя грань (1), фигурирующая в определении упорядоченной Λ–вариации функции f на отрезке $[-\pi,\pi]$. Выберем неубывающую последовательность номеров $\{m_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty}m_n=\infty$ и

$$A_n:=\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{m_n}\frac{1}{\lambda_k}\to 0,\ n\to\infty. \tag{6}$$

Здесь $\omega(f,\delta)$ — обычный модуль непрерывности функции f. Тогда нетрудно проверить, что равномерно по всем p выполняется оценка

$$T_{n,p}^*(f)\le C_1A_n+\frac{C_2}{a(m_n)}V(\Lambda,f), \tag{7}$$

где C_1,C_2 — некоторые абсолютные константы. Поскольку $a(m_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, из (6), (7) и леммы 1 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-L_n(f,x)]=0 \tag{8}$$

равномерно по $x\in\mathbb{R}$. Равномерная сходимость последовательности $\{Q_n(f,x)\}$ следует теперь из (8) и леммы 2. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (*проект* НШ-4383.2010.1).

Библиографический список

1. *Waterman D.* On convergence of Fourier Series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 107–117.

2. *Waterman D.* On Λ-bounded variation // Studia Math. 1976. Vol. 57. P. 33–45.

3. *Waterman D.* Λ-bounded variation: recent results and unsolved problems // Real Anal. Exchange. 1978–1979. Vol. 4. P. 69–75.

4. *Waterman D.* Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 74. P. 119–123.

5. *Belna C. L.* On ordered harmonic bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 80. P. 441–444.

6. *Prus-Wisniowski F.* On ordered Λ-bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 109. P. 375–383.

7. *Waterman D.* On the note of C. L. Belna // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 109. P. 375–383.

8. *Kvernadze G.* Uniform Convergence of Lagrange Interpolation Based on the Jacobi Nodes // J. Approx. Theory. 1996. Vol. 87. P. 179–193.

9. *Lorentz G. G., Jetter K., Riemenshcneider S. D.* Birkhoff interpolation. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1983. 237 p.

10. *Sharma A., Varma A. K.* Trigonometric interpolation (0,2,3) case // Ann. Polon. Math. 1968. Vol. 21. P. 51–58.

11. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228–243. [*Privalov A. A.* Uniform convergence of Lagrange interpolation processes // Math. Notes. 1986. Vol. 39, № 2. P. 124-–133.]

12. *Varma A. K.,Vertesi P.* Equiconvergence of Some Lacunary Trigonometric Interpolation Polynomials // J. Approx. Theory. 1987. Vol. 50. P. 185–191.