$$\beta = -\mathcal{C}\frac{r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1}{r(1+\dot{r}^2)^{(p+1)/2}}. \tag{20}$$

Положим $\mathcal{C} = -1$. С использованием (18) равенство (19) примет вид $\alpha = \dfrac{p-1}{\mathcal{C}_0^{(p-1)/2}}$, аналогично из (20) получим $\beta = \dfrac{p}{p-1}\dfrac{1}{r^2\mathcal{C}_0^{(p-1)/2}}$.

Применяя теорему 3, получаем, что p-минимальная поверхность устойчива на интервале (t_0, t), определяемом из неравенства $t - t_0 \leqslant \dfrac{(p-1)\pi}{C_0^{(p-1)/2}\nu}$.

Для определения интервала неустойчивости p-минимальной поверхности заметим, что $t = t(r)$ — обратная функция к $r = r(t)$, тогда $d(t(r)) = t'dr$. Так как производная обратной функции определяется по формуле $t' = \dfrac{1}{\dot{r}}$ и, учитывая (18), получаем $dt = \dfrac{dr}{\dot{r}} = \dfrac{dr}{\sqrt{\mathcal{C}_0 r^{2/(p-1)} - 1}}$. Следовательно, интервал неустойчивости находится из неравенства $\dfrac{p}{(p-1)\mathcal{C}_0^{\frac{p-1}{2}}}\displaystyle\int\limits_{r(t_0)}^{r(t)}\dfrac{dr}{r^2\sqrt{\mathcal{C}_0 r^{\frac{2}{p-1}} - 1}} > \pi\nu$.

Библиографический список

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 760 с.
2. *Клячин В.А., Миклюков В.М.* Максимальные гиперповерхности трубчатого типа в пространстве Минковского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 1. С. 206–217.
3. *Тужилин А.А.* Индексы типа Морса двумерных минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{H}^3$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 2. С. 581–607.
4. *Тужилин А.А., Фоменко А.Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991. 174 с.
5. *Клячин В.А., Медведева Н.М.* Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади. Волгоград, 2006. Деп. в ВИНИТИ 08.11.06 № 1313 - В 2006. 23 с.; Сибирские электронные математические известия. 2007. Т. 4. Статьи. С. 113–132.
6. *Tkachev V.G.* External Geometry of p-Minimal Surfaces // Geometry from the Pacific Rim, Eds.: Berrick/Loo/Wang, Walter de Gruyter&Co., Berlin, 1997. P. 363–375.
7. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.
8. *Клячин В.А., Миклюков В.М.* Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 11. С. 67–88.
9. *Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. 250 с.

УДК 517.927

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, А.С. Ищенко*

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
*Белгородский университет потребительской кооперации,
кафедра естественно-научных дисциплин
E-mail: pokorny@math.vsu.ru, Ischenko-AS@Yandex.ru

В работе обсуждается нерегулярная модель стилтьесовской струны $-p(x)u'(x) + p(+0)u'(+0) + \int\limits_0^x u(\tau)dQ(\tau) = F(x) - F(0)$ на отрезке $[0,\ell]$ при краевых условиях $u(0) = u(\ell) = 0$. Описываются условия разрешимости вышеуказанной задачи.

On Solvability of Certain Classes of Irregular the Second Order Variation Problems

Yu.V. Pokornyi, Zh.I. Bakhtina, A.S. Ischenko

In the work the irregular model $-p(x)u'(x) + p(+0)u'(+0) + \int\limits_0^x u(\tau)dQ(\tau) = F(x) - F(0)$ of the Stiltjes string on segment $[0,\ell]$ with boundary conditions $u(0) = u(\ell) = 0$ is discussed. The solvability conditions of the mentioned problem are described.

В работе обсуждаются условия разрешимости задачи

$$-(pu')' + Q'u = F' \tag{1}$$

на отрезке $[0,\ell]$ при краевых условиях

$$u(0) = u(\ell) = 0. \tag{2}$$

Условия (2) взяты однородными для упрощения формулировок. В уравнении (1) функции p, Q, F предполагаются лежащими в $BV[0,\ell]$, то есть имеющими ограниченные вариации на $[0,\ell]$. При этом Q' и F' означают обобщенные в некотором смысле производные функций Q и F. Точно так же и $(pu')'$ означает обобщенную производную от функции $p(x)\frac{du(x)}{dx}$.

Мы будем считать адекватной для (1) формой следующее уравнение:

$$-p(x)u'(x) + p(+0)u'(+0) + \int\limits_0^x u(\tau)\,dQ(\tau) = F(x) - F(0). \tag{3}$$

Интеграл, определяющий здесь второе слагаемое, понимается по Стилтьесу. Уравнение (1) получается из (3) формальным дифференцированием. С другой стороны, если уравнение (1) сочетает слагаемые абстрактного характера (поскольку обобщенные производные — абстрактные функционалы) и не имеет поточечного смысла, то уравнение (3) является поточечно интерпретируемым (при каждом x). Следует отметить, что уравнение (3) является формальным аналогом уравнения Эйлера для функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\ell p\frac{u'^2}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{u^2}{2}\,dQ - \int\limits_0^\ell u\,dF. \tag{4}$$

Последняя запись является канонической [1] для выражения потенциальной энергии стилтьесовской струны (в терминах М.Г. Крейна [2]); здесь $dQ(x)$ определяет локальный коэффициент упругости окружающей среды, dF — плотность внешней нагрузки, приходящейся на элемент dx (от x до $(x+dx)$) упругой нити, а $p(x)$ — натяжение этого элемента.

Мы рассматриваем нерегулярный случай уравнения (3). Это антитеза случаю, когда Q и F гладки и $p(x)$ непрерывна и не имеет нулей на $[0,\ell]$. В этом последнем случае (1) приобретает стандартный для обыкновенных дифференциальных уравнений вид $-(pu')' + qu = f$ при $q = Q', f = F'$ и $p \gg 0$. Обсуждаемый ниже случай допускает не только потерю гладкости у коэффициентов Q, F, но и наличие разрывов, что приводит уравнение (1) к дельта-образным членам в коэффициентах Q' и F'. При этом мы допускаем возможность обнуления функции $p(x)$. Именно в этом последнем аспекте данная работа содержит основное научное продвижение.

1. При обсуждении вопроса о разрешимости задачи (1)–(2) или, как мы увидим дальше, задачи (3)–(2) первый вопрос, требующий выяснения, это вопрос о пространстве, где должно искаться соответствующее решение. Актуальность анализа этого вопроса определена еще столетие назад классическим примером Гильберта (см. [3]), где совершенно тривиальный внешне функционал $\Phi(u) = \int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}u'^2(x)\,dx$ при условиях $u(0) = 0$, $u(1) = 1$, очевидно, определенный на всем пространстве $C^1[0,1]$, не достигает своего минимума в этом пространстве — легко проверяется, что $inf\ \Phi(u)$ достигается на функции $u_0(x) = x^{\frac{1}{3}}$. В самом деле, для любой $h(x) \in C^1[0,1]$ с нулями на концах имеем:

$$\triangle\Phi = \Phi(u_0+h) - \Phi(u_0) = \int\limits_0^1 2x^{\frac{2}{3}}u_0'(x)h'(x)\,dx + \int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}h'^2(x)\,dx.$$

Поскольку $u_0'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, то в предыдущей сумме первое слагаемое приобретает вид

$$\int\limits_0^1 2x^{\frac{2}{3}}u_0'(x)h'(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}h'(x)\,dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\,dh = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 dh = \frac{2}{3}(h(1)-h(0)) = 0.$$

Таким образом, $\triangle\Phi = \int\limits_0^1 x^{\frac{2}{3}}h'^2\,dx \geq 0$ для любого $h \in C^1[0,1]$. Это значит, что inf функционала $\Phi(u)$, определенного на $[0,\ell]$, достигается за пределами C^1. Но тогда возникает резонный вопрос об использовании уравнения Эйлера для нерегулярных вариационных задач — в данном примере оно имеет вид $(x^{\frac{2}{3}}u')' = 0$. Естественно, что следует максимально расширять пространство потенциальных решений таких уравнений.

Несложно проверяется, что уравнение (3), как формальная запись, является необходимым условием для минимали функционала (4). Точнее, если $u_0 \to \inf \Phi$, то скалярная функция $\varphi(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ для любого допустимого h принимает минимальное значение при $\lambda = 0$ и потому $\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$, откуда чисто формальными выкладками следует, что $\int\limits_0^\ell pu'h'\,dx + \int\limits_0^\ell uh\,dQ - \int\limits_0^\ell h\,dF = 0$ (для каждого допустимого h). Интересуясь непрерывными экстремалями и пользуясь теоремой о преобразовании меры [6], мы, полагая $d\sigma = u\,dQ$, отсюда после интегрирования по частям первого слагаемого ($\int\limits_0^\ell pu'h'\,dx = \int\limits_0^\ell pu'\,dh = -\int\limits_0^\ell h\,d(pu')$) будем иметь $\int\limits_0^\ell hd[-pu' + \sigma - F] = 0$. Для любой непрерывной функции $h(x)$. Отсюда напрямик следует уравнение (3), если воспользуемся леммой Дюбуа–Реймона.

В проведенной схеме рассуждений отсутствует главное — точное описание класса рассматриваемых функций. Приведенный выше пример Гильберта говорит о том, что при достаточно широких условиях на $p(x)$ даже отсутствие у функционала Φ второго и третьего слагаемых в представлении (4) не позволяет ограничиться пространством C^1. Наличие в представлении (4) нерегулярных коэффициентов p и Q тем более требует расширения множества функций, допустимых для анализа.

2. Основное пространство рассматриваемых функций, обозначаемое через E, мы определим так: E — множество непрерывных на сегменте $[0, \ell]$ функций, каждая из которых:

а) абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$, т.е. имеет суммируемую на $[0, \ell]$ призводную $u'(x)$, причем $u(x) = u(0) + \int\limits_0^x u'(\tau)d\tau$, где суммирование подразумевается по Лебегу;

б) для произвольной $u(x)$ предполагается включение $pu' \in BV[0, \ell]$.

Последнее условие о принадлежности pu' пространству $BV[0, \ell]$, т.е. об ограниченности вариации функции $p(x)u'(x)$, является ограничением, необходимым для осмысленности первого слагаемого в (4). В самом деле, $\int\limits_0^\ell pu'^2\,dx = \int\limits_0^\ell pu'du$ и последний интеграл в силу предполагаемой непрерывности $u(x)$ определен по теореме Стилтьеса. По аналогичной причине из непрерывности $u(x)$ следует определенность второго и третьего слагаемых в (4). Пространство E, являясь более узким, чем любое соболевское пространство с весом p, оказалось по вышесказанному наиболее естественной областью определения функционала Φ. Именно в этом пространстве мы обсуждаем разрешимость вариационной задачи для функционала (4) и связанную с этим разрешимость краевой задачи (3)–(2).

Мы предполагаем всюду далее, что p, Q, F имеют ограниченные вариации на $[0, \ell]$, причем $p(x) > 0$ (при $0 < x < \ell$).

Лемма 1. *Для того чтобы функция $u_0(x)$ давала минимум функционалу* (4), *необходимо и достаточно, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла задаче* (3)–(2).

Доказательство проводится тривиальным расписыванием приращения $\triangle\Phi = \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0)$, а именно

$$\triangle\Phi = \left(\int\limits_0^\ell p\frac{(u_0' + h')^2}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{(u_0 + h)^2}{2}\,dQ - \int\limits_0^\ell (u_0 + h)\,dF\right) -$$

$$-\left(\int\limits_0^\ell p\frac{u_0'^2}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{u_0^2}{2}\,dQ - \int\limits_0^\ell u_0 dF\right) = \int\limits_0^\ell pu_0'h'\,dx + \int\limits_0^\ell u_0 h\,dQ - \int\limits_0^\ell h\,dF.$$

Если последнее выражение неотрицательно для любой допустимой $h(x)$, в силу его линейности по h оно должно быть тождественным нулем.

Таким образом, вместо вопроса о существовании минимума для функционала Φ мы вправе обсуждать вопрос о разрешимости краевой задачи (3)–(2).

3. Проблему разрешимости уравнения (3) мы сначала обсудим для уравнения (3) начальных условий $u(0) = \gamma_0$, $u'(+0) = \gamma_1$.

Теорема 1. *Пусть функция $\frac{1}{p}$ суммируема на $(0, \ell)$, функция $\frac{Q(x)}{p(x)}$ ограничена и $Q(x)$ не убывает. Тогда уравнение* (3) *при любых начальных условиях имеет единственное решение в E.*

Доказательство. С учетом новых условий уравнение (3) можно заменить следующим:

$$(pu')(x) = p(0)\gamma_1 + \int\limits_0^x u(s)dQ(s) - F(x) + F(0), \tag{5}$$

откуда следует, что $u(x) = \gamma_0 + \int\limits_0^x \frac{1}{p(\tau)}(\int\limits_0^\tau u(s)dQ(s))d\tau + \int\limits_0^x \frac{1}{p(s)}(F(0) - F(s) + p(0)u'(0))ds$. Перепишем последнее равенство в виде

$$u = Au + z, \tag{6}$$

полагая

$$(Au)(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{p(\tau)}(\int\limits_0^\tau u(s)dQ(s))d\tau \tag{7}$$

и

$$z(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{p(s)}(F(0) - F(s) + p(0)u'(0))ds. \tag{8}$$

Утверждение нашей теоремы эквивалентно тому, что уравнение (6) однозначно разрешимо при любом z. Из представления (8) в силу суммируемости $1/p$ видно, что при $u \in E$ (и даже при $u \in C[a,b]$) функция $z(x) \in C[a,b]$. Мы вопрос о разрешимости уравнения (6) будем обсуждать в пространстве $C[a,b]$. Допустимость сужения нашего вопроса (на пространство $C[a,b]$) легко объяснима тем, что решение $u(x)$ уравнения (6) должно удовлетворять тождеству (5), в котором стоящие справа слагаемые наверняка принадлежат $BV[0,\ell]$. Поэтому в $BV[0,\ell]$ лежит и $(pu')(x)$, а это означает, что $u(\cdot) \in E$.

Доказательство разрешимости (6) в $C[a,b]$ основано на двух обстоятельствах. Во-первых, оператор A, определяемый равенством (7), действует и ограничен в C и, кроме того, его спектральный радиус меньше 1.

Проверка действия A из C в C элементарна: для любой $u(x)$ функция $\int\limits_0^x u(s)ds$ имеет ограниченную вариацию. Потому она суммируема и в силу суммируемости $1/p$ функция $(Au)(x)$ непрерывна. Более того,

$$|(Au)(x)| \leq \|u\| \int\limits_0^x \frac{1}{p(\tau)} \int\limits_0^\tau dQ(s)d\tau = \|u\| \int\limits_0^x \frac{Q(\tau) - Q(0)}{p(\tau)} d\tau, \tag{9}$$

что и означает непреывность оператора A в $C[a,b]$ (в (9) $\|u\|$ взята в смысле $C[a,b]$).

Оценим теперь спектральный радиус оператора A в $C[a,b]$. Аналогично (9) для любой $\varphi \in C[a,b]$ верно:

$$|(A\varphi)(x)| \leq \|\varphi\| \int\limits_0^x \frac{Q(\tau) - Q(0)}{p(\tau)} d\tau \leq \|\varphi\| Kx, \tag{10}$$

где через K обозначена конечная по условию верхняя граница отношения $\frac{Q(x)-Q(0)}{p(x)}$. Отсюда аналогично предыдущему следует, что $|A^2\varphi(x)| \leq |A(A\varphi)(x)| \leq \|A\varphi\|Kx \leq \|\varphi\|\frac{K^2x^2}{2}$. Поэтому при любом n $|A^n\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\frac{K^nx^n}{n!}$. Теперь, переходя к оценке нормы левой части, имеем $\|A^n\| \leq \frac{K^n\ell^n}{n!}$. Отсюда следует, очевидно, что спектральный радиус $r = \sqrt[n]{\|A^n\|} = 0$. Теорема полностью доказана. □

Замечание. Доказывая существование решения уравнения, мы идем к главной задаче — к доказательству существования минимума для функционала Φ.

Следствие. *При $F(x) \equiv 0$ мы из (3) получаем соответствующее однородное уравнение, для которого согласно доказанной теореме однозначно определяются решения начальных задач:*

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(+0) = 1 \tag{11}$$

и

$$\psi(0) = 1, \psi'(+0) = 0. \tag{12}$$

Лемма 2. *Функции $\varphi(x), \psi(x)$, определенные условиями (11) и (12) для соответствующего однородного уравнения (при $F(x) \equiv 0$), линейно независимы.*

Доказательство следует из единственности решения однородного уравнения с нулевыми начальными условиями.

Таким образом, функции $\varphi(x), \psi(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, т.е. базис в пространстве таких решений. С помощью этой системы $\{\varphi, \psi\}$ при любых условиях на концах соответствующее решение уравнения (3) наверняка представимо при надлежащем выборе C_1, C_2 в виде $u(x) = z(x) + C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$, где $z(x)$ — решение уравнения (3), обеспечиваемое теоремой 1.

Теорема 2. *Для однозначной разрешимости уравнения* (3) *при любом* $F(x) \in BV$ *и при любых значениях на концах необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение* (3) *(при* $F(x) \equiv 0$*) и условиях* (2) *имело только тривиальное решение* $u(x) \equiv 0$.

Теорема 3. *Для однозначной разрешимости вариационной задачи* (2), (4) *достаточно, чтобы функция* $Q(x)$ *была неубывающей.*

Доказательство. Покажем, что однородное уравнение (3) (при $F(x) \equiv 0$)при условиях (2) имеет только тривиальное решение. Пусть $u_0(x)$ — нетривиальное решение уравнения $(pu')(x) = \int\limits_0^x u\,dQ$ при условиях (2). Пусть для определенности $u_0(\tau) > 0$ всюду на промежутке $[0, \tau]$. Тогда, так как $u_0'(\tau) = 0$, мы должны иметь $\int\limits_0^\tau u(s)\,dQ(s) = 0$, откуда в силу неубывания Q мы получаем противоречие с неравенством $u(x) > 0$ при $0 < x < \tau$. $\square$

В заключение отметим, что введенное нами пространство E является банаховым по норме

$$\|u\| = \sup_{[o,\ell]} |u(x)| + V_0^\ell[pu'(x)].$$

Доказательство этого факта существенно опирается на классические теоремы Хелли и ввиду достаточной деликатности в сочетании с громоздкостью в данной работе не приводится.

Библиографический список

1. *Покорный Ю.В.* О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 5. С. 1–4.
2. *Кац И.С., Крейн М.Г.* О спектральных функциях струны // Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
3. *Алексеев В.М., Тихонов В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат.лит., 1979. 432 с.
4. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* О задаче Штурма–Лиувилля для разрывной струны // Изв. вузов. Северокавказ. регион. Естественные науки. Математика и механика сплошной среды. 2004. Спецвыпуск. С. 186–191.
5. *Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A.* Toward a Sturm-Liouville Theory for an Equation With Generalised Coefficient // J. of Mathematical Sciences. 2004. V. 119, № 6. P. 769–787.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

УДК 517.923

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСШИРЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ СТИЛТЬЕСА

А.А. Ткаченко, С.А. Шабров

Воронежский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: 191180@mail.ru, shabrov_s_a@info.vsu.ru

В работе доказывается разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения с расширенным интегралом Стилтьеса.

About Solvability of Integro-Differential Equation with Extended Stieltjes Integral

A.A. Tkachenko, S.A. Shabrov

In the paper are proved solvability of initial-value problem for integro-differential equation with Stieltjes integral.

В работе изучается вопрос о разрешимости интегро-дифференциального уравнения

$$-pu'_\mu(x) + \int_0^x ud[Q] = F(x) - F(0) - pu'_\mu(0) \quad (x \in \overline{[0,1]}_2^\mu) \tag{1}$$