References

1. Vinogradov I. M. On the distribution of quadratic rests and non-rests of the form $p+k$ to a prime modulus. *Rec. Math. Moscow, n. Ser.*, 1938, vol. 3, no. 45, pp. 311–319 (in Russian).
2. Vinogradow I. M. An improvement of the estimation of sums with primes. *Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. Math.* [Izvestia Akad. Nauk SSSR] 1943, vol. 7, pp. 17–34 (in Russian).
3. Vinogradov I. M. New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p+k)$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1952, vol. 16, pp. 197–210 (in Russian).
4. Vinogradov I. M. Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1953, vol 17, pp. 285–290 (in Russian).
5. Vinogradov I. M. An estimate for a certain sum extended over the primes of an arithmetic progression. *(Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1966, vol 30, no. 3, pp. 481–496 (in Russian).
6. Karatsuba A. A. Sums of characters, and primitive roots, in finite fields. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1968, vol 180, no. 6, pp. 1287–1289 (in Russian).
7. Karatsuba A. A. Estimates of character sums. *Math. USSR-Izv.*, 1970, vol. 4, no. 1, pp. 19–29.
8. Karatsuba A. A. Sums of characters over prime numbers. *Math. USSR-Izv.*, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 303–326.
9. Rakhmonov Z. Kh. On the distribution of values of Dirichlet characters. *Rus. Math. Surv.*, 1986, vol. 41, no. 1, pp. 237–238. DOI: 10.1070/RM1986v041n01ABEH003232.
10. Rakhmonov Z. Kh. Estimation of the sum of characters with primes. *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, 1986, vol 29, no. 1, pp. 16–20 (in Russian).
11. Rakhmonov Z. Kh. On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 207, no. 6, pp. 263–272.
12. Fridlander Dzh. B., Gong K., Shparlinskii I. E. Character sums over shifted primes. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, iss. 3–4, pp. 585–598. DOI: 10.1134/S0001434610090312.
13. Rakhmonov Z. Kh. A theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 43, no. 1, pp. 49–64. DOI: 10.1070/IM1994v043n01ABEH001558.
14. Rakhmonov Z. Kh. A theorem on the mean-value of Chebyshev functions. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 44, no. 3, pp. 555–569. DOI 10.1070/IM1995v044n03ABEH001613.
15. Vinogradov A. I. On numbers with small prime divisors. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol 109, no. 4, pp. 683–686 (in Russian).
16. Burgess D. A. On character sum estimate with $r=3$. *J. London Math. Soc.*, 1986, vol. 33, no. 2, pp. 219–226. DOI: 10.1112/jlms/s2-33.2.219.

УДК 511.325

КЛАСС ПОКАЗАТЕЛЬНО РАСТУЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, НЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ РАВНОМЕРНО ПО МОДУЛЮ ЕДИНИЦА

П. З. Рахмонов

Кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, parviz.msu@gmail.com

Построен класс экспоненциально растущих последовательностей, не являющихся равномерно распределенными по модулю единицы.

Ключевые слова: равномерное распределение по модулю единица, числа Фибоначчи, золотое сечение, дробно-линейная функция.

Вопрос о равномерном распределении функций вида $\alpha\psi(x)$, где α – иррациональное число, $\psi(x)$ – функция, принимающая целые значения, изучался А. Вейлем. Из работы [1] следует, что почти для всех α последовательность $\{\alpha\lambda^n\}$ равномерно распределена, где $\lambda > 1$ – действительное число. Однако конкретные примеры таких α им не были построены. В работах А. Г. Постникова, видимо, впервые построены примеры таких α, что последовательность $\{\alpha\lambda^n\}$ равномерно распределена по модулю единица, $\lambda \geq 2$ – целое число.

Воспользуемся следующими обозначениями: $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность Фибоначчи: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n \geq 2$, $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение.

Лемма 1. *Произвольную дробно–линейную функцию с рациональными коэффициентами a,b,c,d и $c^2+d^2 \neq 0$ от φ можно представить виде линейной функции с рациональными коэффициентами от φ:*

$$\frac{a\varphi+b}{c\varphi+d} = \frac{bc-ad}{c^2-cd-d^2}\varphi + \frac{ac-bc-bd}{c^2-cd-d^2}.$$

Доказательство. Пользуясь равенством $\varphi^2 = \varphi + 1$, представим дробно-линейную функцию с рациональными коэффициентами от φ, виде линейной функции от φ с рациональными коэффициентами:

$$\frac{a\varphi+b}{c\varphi+d} = \frac{a\varphi+b}{c\left(\varphi-\frac{1}{2}\right)+\frac{c}{2}+d} = \frac{(a\varphi+b)\left(c\left(\varphi-\frac{1}{2}\right)-\frac{c}{2}-d\right)}{c^2\left(\varphi^2-\varphi+\frac{1}{4}\right)-\frac{c^2}{4}-cd-d^2} =$$
$$= \frac{(a\varphi+b)(c\varphi-c-d)}{c^2-cd-d^2} = \frac{ac\varphi^2+(bc-ac-ad)\varphi-bc-bd}{c^2-cd-d^2} =$$
$$= \frac{ac(\varphi+1)+(bc-ac-ad)\varphi-bc-bd}{c^2-cd-d^2} = \frac{(bc-ad)\varphi+ac-bc-bd}{c^2-cd-d^2} =$$
$$= \frac{bc-ad}{c^2-cd-d^2}\varphi + \frac{ac-bc-bd}{c^2-cd-d^2}.$$

Очевидно, что знаменатель d^2+cd-c^2 не обращается в нуль при произвольных рациональных c, d, удовлетворяющих условию $c^2+d^2 \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Тогда, либо последовательности x_n и y_n распределены равномерно, либо последовательности x_n и y_n не распределены равномерно.*

Доказательство. Пусть последовательность x_n равномерно распределена и $l \neq 0$ — целое число. Согласно критерию Г. Вейля равномерного распределения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i l x_k} = 0, \tag{1}$$

$$e^{2\pi i l x_k} - e^{2\pi i l y_k} = \cos(2\pi l x_k) - \cos(2\pi l y_k) + i(\sin(2\pi l x_k) - \sin(2\pi l y_k)).$$

По теореме Лагранжа

$$\cos(2\pi l x_k) - \cos(2\pi l y_k) = -2\pi l(x_k - y_k)\cdot\sin(2\pi l\theta_k), \qquad \theta_k \in (x_n, y_n),$$
$$\sin(2\pi l x_k) - \sin(2\pi l y_k) = 2\pi l(x_k - y_k)\cdot\cos(2\pi l\hat{\theta}_k), \qquad \hat{\theta}_k \in (x_n, y_n).$$

Поэтому

$$e^{2\pi i l x_k} - e^{2\pi i l y_k} = -2\pi l(x_k - y_k)\cdot\sin(2\pi l\theta_k) + i\cdot 2\pi l(x_k - y_k)\cdot\cos(2\pi l\hat{\theta}_k).$$

Оценивая $|\sin(2\pi l\theta_k)| \le 1$, $|\cos(2\pi l\hat{\theta}_k)| \le 1$, получим:

$$\left|e^{2\pi i l x_k} - e^{2\pi i l y_k}\right| \le 2\pi\sqrt{2}|l|\cdot|x_k - y_k| \to 0 \qquad (k\to\infty).$$

Таким образом,

$$\lim_{k\to+\infty} e^{2\pi i l x_k} - e^{2\pi i l y_k} = 0.$$

Если последовательность $e^{2\pi i l x_k} - e^{2\pi i l y_k}$ имеет предел, равный 0, то последовательность средних арифметических:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i l x_k} - e^{2\pi i l y_k}$$

также имеет предел, равный нулю, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i l x_k} - e^{2\pi i l y_k} = 0.$$

Поэтому из (1) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi i l y_k}=0.$$

Значит, по критерию Вейля последовательность y_n равномерно распределена.

Аналогично можно доказать, что если y_n равномерно распределена, то x_n также равномерно распределена.

Теорема. *Последовательность $\{\varphi f_n\}_{n=0}^{\infty}$, не является равномерно распределенной.*

Доказательство. Отношения соседних чисел Фибоначчи f_{n+1}/f_n являются подходящими дробями для золотого сечения φ при ее разложении в непрерывную дробь. Поэтому по теореме Дирихле

$$\varphi=\frac{f_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta}{f_n^2},\qquad |\theta|\le 1.$$

Тогда

$$\varphi f_k=\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta}{f_n^2}\right)f_k=\frac{f_kf_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta\cdot f_k}{f_n^2}.$$

Обозначим $A(k,n):=f_kf_{n+1}-f_{k+1}f_n$,

$$\begin{gathered}A(k,n)=f_kf_{n+1}-f_{k+1}f_n=f_k(f_n+f_{n-1})-(f_k+f_{k-1})f_n=f_kf_{n-1}-f_{k-1}f_n=\\=-(f_{k-1}f_n-f_kf_{n-1})=-A(k-1,n-1)=\ldots=(-1)^kA(0,n-k),\\A(0,n-k)=f_0f_{n-k+1}-f_1f_{n-k}=f_{n-k+1}-f_{n-k}=f_{n-k-1}.\end{gathered}$$

Поэтому $A(k,n)=(-1)^kf_{n-k-1}$ при $k<n$ и

$$f_kf_{n+1}=f_{k+1}f_n+(-1)^kf_{n-k-1},$$

Таким образом,

$$\varphi f_k=\frac{f_kf_{n+1}}{f_n}+\frac{\theta\cdot f_k}{f_n^2}=f_{k+1}+(-1)^k\frac{f_{n-k-1}}{f_n}+\frac{\theta\cdot f_k}{f_n^2},\qquad k<n. \tag{2}$$

Оценим $(-1)^k\dfrac{f_{n-k-1}}{f_n}+\dfrac{\theta\cdot f_k}{f_n^2}$:

$$\frac{f_k}{f_n^2}<\frac{1}{f_n}\to 0\qquad (n\to\infty).$$

При фиксированном k:

$$\frac{f_{n-k-1}}{f_n}=\frac{f_{n-k-1}}{f_{n-k}}\cdot\frac{f_{n-k}}{f_{n-k+1}}\cdots\frac{f_{n-1}}{f_n}.$$

Каждый множитель в этом произведении стремится к φ^{-1} при $n\to\infty$, поэтому

$$\frac{f_{n-k-1}}{f_n}\to\varphi^{-k-1}\qquad (n\to\infty).$$

Подставив в равенство (2), получим, что для любого k

$$\varphi f_k-\left(f_{k+1}+(-1)^k\varphi^{-k-1}\right)\to 0\qquad (n\to\infty).$$

Устремляя $k\to+\infty$:

$$\varphi f_k-f_{k+1}\to 0\qquad (k\to+\infty). \tag{3}$$

Так как последовательность $\{f_{k+1}\}$, очевидно, не является равномерно распределенной, то, согласно лемме 2, $\{\varphi f_k\}$ не является равномерно распределенной.

Следствие. *Пусть α есть значение рациональной функции от φ, то есть $\alpha = f(\varphi)/g(\varphi)$, где $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ — многочлены с целыми коэффициентами от φ. Тогда последовательность $\{\alpha f_n\}$ не является равномерно распределенной.*

Доказательство. Используя свойство $\varphi^2 = \varphi + 1$, выразим $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ в виде линейной функции от φ. Тогда можно полагать, что α есть значение дробно-линейной функции от φ. Далее, согласно лемме 1, значение дробно-линейной функции от φ можно выразить в виде линейной функции с рациональными коэффициентами от φ. Пусть s, t — рациональные числа.

Согласно оценке (3)

$$(s\varphi + t)f_k - (sf_{k+1} + tf_k) \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Последовательность $sf_{k+1}+tf_k$ не является равномерно распределенной (так как s, t — рациональные числа). Поэтому, согласно лемме 2, последовательность $(s\varphi+t)f_k$ также не является равномерно распределенной.

Библиографический список

1. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Vol. 77. P. 313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.

On the Class of Exponentially Growing Sequences that are Not Uniformly Distributed Modulo One

P. Z. Rakhmonov

Moscow State University, Russia, 119234, Moscow, Leninskie Gory, 1, parviz.msu@gmail.com

The paper presents a family of exponentially growing but not uniformly distributed sequences modulo one.

Key words: uniform distrubtion modulo one, Fibonacci numbers, golden ratio, homographic transformation..

References

1. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.*, 1916, vol. 77, pp. 313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.

УДК 511.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ В. С. РЯБЕНЬКОГО

А. В. Родионов

Ассистент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, rodionovalexandr@mail.ru

В работе рассмотрены алгоритмы вычисления гиперболических параметров целочисленных решеток решений линейных сравнений, соответствующих параллелепипедальным сеткам.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, теоретико-числовой метод.

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [1] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \qquad 0 \le t \le T, \qquad -\infty < x_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \dots, s), \tag{1}$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \tag{2}$$