что $\mathrm{S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Откуда $\mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$. По лемме 1 получаем, что $\mathfrak{F}$ — наследственная формация.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ содержит непериодические унары. По лемме 5 имеем $F_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией всех счетных унаров по лемме 4 и поэтому $\mathfrak{F}$ наследственная. Теорема 1 доказана. □

Библиографический список

1. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М. : Наука, 1989. 256 с.
2. *Расстригин А. Л.* Формации конечных унаров // Чебышевский сб. 2011. Т. XII, № 2 (38). С. 102–109.
3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.
4. *Карташов В. К.* Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 1. С. 7–20.
5. *Wenzel G. H.* Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$ // Archiv der Mathematik. 1970. Vol. 21. P. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912.

On Heredity of Formations of Monounary Algebras

A. L. Rasstrigin

Volgograd State Socio-Pedagogical University, Russia, 400066, Volgograd, Lenin Ave., 27, rasal@fizmat.vspu.ru

A class of algebraic systems is said to be a formation if it is closed under homomorphic images and finite subdirect products. It has been proven that any formation of at most countable monounary algebras is a hereditary formation.

Key words: unar, formation, hereditary formation.

References

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of algebraic systems]. Moscow, Nauka, 1989, 256 p. (in Russian).
2. Rasstrigin A. L. Formations of finite monounary algebras. *Chebyshevskii Sbornik*, 2011, Vol. XII, no. 2 (38), pp. 102–109 (in Russian).
3. Mal'tsev A. I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow, Nauka, 1970 (in Russian).
4. Kartashov V. K. Quasivarieties of unars. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, pp. 5–12. DOI: 10.1007/BF01149807.
5. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f\rangle$. *Archiv der Mathematik*, 1970, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912.

УДК 511.325

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

З. Х. Рахмонов

Доктор физико-математических наук, директор, Институт математики Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, zarullo-r@rambler.ru

Получена новая оценка суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю q на последовательности сдвинутых простых чисел $p-l$, $(l,q)=1$, $p\le x$, нетривиальная при $x \ge q^{5/6+\varepsilon}$. Это уточняет оценку Дж. Б. Фридландера, К. Гонга, И. Е. Шпарлинского, нетривиальную лишь при $x \ge q^{8/9+\varepsilon}$.

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В $[1,2]$ он доказал: *если q — простое, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi) = \sum_{p\le x} \chi(p-l) \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}} + x^{-1/6}\right). \tag{1}$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\mod q$ *вида* $p-l$, $p \le x$.

Затем И. М. Виноградов [3–5] получил нетривиальную оценку $T(\chi)$ при $x \ge q^{0,75+\varepsilon}$, q — простое. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T(\chi)$ можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле; тогда в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T(\chi)$ получится нетривиальная оценка, но только при $x \ \ge \ q^{1+\varepsilon}$.

В 1968 г. А. А. Карацуба [6, 7] нашёл метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени. В работе [8] он с помощью развития этого метода в соединении с методом И. М. Виноградова доказал: *если* q — *простое,* $\chi(a)$ — *неглавный характер по модулю* q, $x \ge q^{1/2+\varepsilon}$, *тогда*

$$T(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}.$$

Автор ранее [9–11] обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал: *пусть* D — *достаточно большое натуральное число,* χ — *неглавный характер по модулю* D, χ_q — *примитивный характер, порождённый характером* χ, *тогда*

$$T(\chi) \le x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}\tau^2(q_1)}+x^{-1/6}\tau(q_1)\right), \qquad q_1=\prod_{\substack{p\backslash D\\ p\nmid q}} p. \tag{2}$$

Если характер χ совпадает со своим порождающим примитивным характером χ_q, то оценка (2) принимает вид

$$T(\chi_q) \le x\ln^5 x\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-1/6}\right),$$

и она нетривиальна при $x > q(\ln q)^{13}$.

В 2010 г. Дж. Б. Фридландер, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский [12] для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T(\chi_q)$ существует, когда x — длина суммы — по порядку меньше q. Они доказали: *для примитивного характера* χ_q *и всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *что для всех* $x \ge q^{8/9+\varepsilon}$ *имеет место оценка*

$$T(\chi_q) \ll xq^{-\delta},$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема о нетривиальной оценке для более коротких сумм $T(\chi_q)$ при составном q.

Теорема. *Пусть* q — *достаточно большое натуральное число,* χ_q — *примитивный характер по модулю* q, $(l,q)=1$, ε — *положительное сколь угодно малое постоянное число,* $\mathscr{L}=\ln q$, $x \ge q^{5/6+\varepsilon}$. *Тогда имеем:*

$$T(\chi_q)=\sum_{p\le x}\chi_q(p-l) \ll x\exp\left(-\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Доказательство теоремы проводится методом оценок суммы с простыми числами И. М. Виноградова в сочетании с методами работы А. А. Карацубы [8] об оценке «короткой» суммы $T(\chi_q)$ для простого q, работ автора [10, 11, 13, 14], в которых изучаются «длинные» суммы $T(\chi)$ и средние значения функций Чебышёва $\psi(x,\chi)$ по всем характерам Дирихле. В доказательстве мы также используем основные результаты работ А. И. Виноградова [15] и Д. А. Берджесса [16]. Основные утверждения, позволившие получить новую оценку $T(\chi_q)$, содержатся в леммах 1–7, которые в этой статье приводим без доказательства.

Лемма 1. *Пусть* $\mu(d)$ — *функция Мёбиуса,* σ — *фиксированное число,* $0,1 \le \sigma < 0,9$, *тогда*

$$\sum_{\substack{d\backslash D\\ d>\exp(\ln D^2)^{\sigma}}}\frac{\mu^2(d)}{d} \ll \exp\left(-2^{\sigma-1}\sigma\ln^{\sigma} D\right).$$

Лемма 2. *Пусть K — число решений сравнения:*

$$(nd-\eta)y \equiv (n_1d-\eta)y_1 \pmod q,$$
$$M < n, n_1 \le M+N, \qquad 1 \le y, y_1 \le Y, \qquad (y,q)=1, \qquad (y_1,q)=1,$$

где $(\eta,q)=1$, d — делитель числа q, $2NY<q$, $d<Y$, $\rho(qd^{-1},Y)$ — число делителей β числа qd^{-1}, удовлетворяющие условиям $qY^{-1}\le\beta<qd^{-1}$ и $(\beta,d)=1$. Тогда справедливо соотношение:

$$K \le NY_q + \frac{2Y^2}{d} + \frac{2Y^2}{d}\rho(qd^{-1},Y) + \frac{2(NY)^{1+\delta}}{d},$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Лемма 3. *Пусть $(\eta,q)=1$, $y<x$, $x<q$, $\omega(q)$ — число различных простых делителей числа q тогда*

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1}} \chi_q(n-\eta) \le 2^{\omega(q)}\sqrt{q}\,\mathscr{L}.$$

Лемма 4. *Пусть σ — вещественное число, M, N, d и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $N<q^{7/12}d^{-1/2}$, $0,1\le\sigma<0,9$, $d\le\exp(2\mathscr{L})^{\sigma}$, тогда*

$$\sum_{M<n\le M+N} \chi_q(nd-\eta) \le N^{\frac{2}{3}}q^{1/9+\delta/2}d^{2/3},$$

где δ — сколь угодно малое положительное число.

Лемма 5. *Пусть $(\eta,q)=1$, δ — сколь угодно малое положительное число, $y\ge q^{1/3+8\delta/5}$, тогда*

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\(n,q)=1}} \chi_q(n-\eta) \ll y\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Лемма 6. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M'\le 2M$, $N'\le 2N$, $N\le q^{1/6}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\le M'} |a_m|^{\alpha} \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \qquad \alpha=1,2; \qquad |b_n|\ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{M<m\le M'} a_m \sum_{\substack{N'<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll BM^{5/6}N^{1/2}q^{1/6+\delta/6}\mathscr{L}^{(4c_1+c_2+1)/6}.$$

Следствие 6.1. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M'\le 2M$, $N'\le 2N$, $q^{\theta}<N\le q^{1/6}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau_5(m)$, $|b_n|\le 1$. Тогда при $x\ge q^{1-2\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка*

$$\sum_{M<m\le 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\le\min(xm^{-1},2N)\\(mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll x\,\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Лемма 7. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M'\le 2M$, $N'\le 2N$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\le M'} |a_m|^{\alpha} \ll M\mathscr{L}^{c_\alpha}, \qquad \alpha=1,2; \qquad |b_n|\ll B.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{M<m\le M'} a_m \sum_{\substack{N'<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll B\left(M^{3/4}N^{1/2}q^{1/4}+M^{3/4}Nq^{1/8}\right)\mathscr{L}^{(2c_1+c_2+1)/4}q^{\delta/4}.$$

Следствие 7.1. *Пусть M, M', N, N' и η — целые числа, удовлетворяющие условиям $(\eta,q)=1$, $M'\le 2M$, $N'\le 2N$, $q^{1/4-\theta}\le N\le q^{1/4+\theta}$, a_m и b_n — функции натурального аргумента такие, что $|a_m|\le\tau_5(m)$, $|b_n|\le 1$. Тогда при $x\ge q^{3/4+\theta+1,1\delta}$ справедлива оценка*

$$\sum_{M<m\le M'} a_m \sum_{\substack{N'<n\le \min(xm^{-1},2N)\\ (mn,q)=1}} b_n\chi(mn-l) \ll x\,\exp\left(-1,5\sqrt{\mathscr{L}}\right).$$

Библиографический список

1. *Виноградов И. М.* Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 45. С. 311–320.
2. *Виноградов И. М.* Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1943. Т. 7. С. 17–34.
3. *Виноградов И. М.* Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1952. Т. 16. С. 197–210.
4. *Виноградов И. М.* Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1953. Т. 17. С. 285–290.
5. *Виноградов И. М.* Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии //Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1966. Т. 30. С. 481–496.
6. *Карацуба А. А.* Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180, № 6. С. 1287–1289.
7. *Карацуба А. А.* Об оценках сумм характеров // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1970. Т. 34, № 1. С. 20–30.
8. *Карацуба А. А* Суммы характеров с простыми числами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1970. Т. 34, № 2. С. 299–321.
9. *Рахмонов З. Х.* О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41, № 1. С. 201–202.
10. *Рахмонов З. Х.* Об оценке суммы характеров с простыми числами // Докл. АН Тадж. ССР. 1986. Т. 29, № 1. С. 16–20.
11. *Рахмонов З. Х.* О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Тр. Мат. ин-та РАН. 1994. Т. 207. С. 286–296.
12. *Фридландер Дж. Б., Гонг К., Шпарлинский И. Е.* Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 4. С. 605–619. DOI 10.4213/mzm8692.
13. *Рахмонов З. Х.* Теорема о среднем значении $\psi(x,\chi)$ и ее приложения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55–71.
14. *Рахмонов З. Х.* Теорема о среднем значении функций Чебышева // Изв. РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58, № 3. С. 127–139.
15. *Виноградов А. И.* О числах с малыми простыми делителями // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 4. С. 683–686.
16. *Burgess D. A.* On character sum estimate with $r=3$ // J. London Math. Soc. 1986. Vol. 33, № 2. P. 219–226. DOI: 10.1112/jlms/s2-33.2.219.

Distribution of Values of Dirichlet Characters in the Sequence of Shifted Primes

Z. Kh. Rakhmonov

Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, 734063, Dushanbe, Ayni st., 83, rakhmonov-r@rambler.ru

The new estimate for the sum of the values of a primitive Dirichlet character modulo an integer q has been obtained over the sequence of shifted primes $p-l$, $(l,q)=1$, $p\le x$. This estimate is nontrivial for $x\ge q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ and refines the estimate obtained by J. B. Friedlander, K. Gong, I. E. Shparlinskii. Their estimate holds provided that $x\ge q^{8/9+\varepsilon}$.

Key words: Dirichlet character, shifted primes, short sums of characters, exponential sums over primes.

References

1. Vinogradov I. M. On the distribution of quadratic rests and non-rests of the form $p+k$ to a prime modulus. *Rec. Math. Moscow, n. Ser.*, 1938, vol. 3, no. 45, pp. 311–319 (in Russian).
2. Vinogradow I. M. An improvement of the estimation of sums with primes. *Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. Math.* [Izvestia Akad. Nauk SSSR] 1943, vol. 7, pp. 17–34 (in Russian).
3. Vinogradov I. M. New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p+k)$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1952, vol. 16, pp. 197–210 (in Russian).
4. Vinogradov I. M. Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1953, vol 17, pp. 285–290 (in Russian).
5. Vinogradov I. M. An estimate for a certain sum extended over the primes of an arithmetic progression. *(Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1966, vol 30, no. 3, pp. 481–496 (in Russian).
6. Karatsuba A. A. Sums of characters, and primitive roots, in finite fields. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1968, vol 180, no. 6, pp. 1287–1289 (in Russian).
7. Karatsuba A. A. Estimates of character sums. *Math. USSR-Izv.*, 1970, vol. 4, no. 1, pp. 19–29.
8. Karatsuba A. A. Sums of characters over prime numbers. *Math. USSR-Izv.*, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 303–326.
9. Rakhmonov Z. Kh. On the distribution of values of Dirichlet characters. *Rus. Math. Surv.*, 1986, vol. 41, no. 1, pp. 237–238. DOI: 10.1070/RM1986v041n01ABEH 003232.
10. Rakhmonov Z. Kh. Estimation of the sum of characters with primes. *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, 1986, vol 29, no. 1, pp. 16–20 (in Russian).
11. Rakhmonov Z. Kh. On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 207, no. 6, pp. 263–272.
12. Fridlander Dzh. B., Gong K., Shparlinskii I. E. Character sums over shifted primes. *Math. Notes*, 2010, vol. 88, iss. 3–4, pp. 585–598. DOI: 10.1134/S00014346 10090312.
13. Rakhmonov Z. Kh. A theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994, vol. 43, no. 1, pp. 49–64. DOI: 10.1070/IM1994v043n01ABEH001558.
14. Rakhmonov Z. Kh. A theorem on the mean-value of Chebyshev functions. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1995, vol. 44, no. 3, pp. 555–569. DOI 10.1070/IM1995v044n03ABEH001613.
15. Vinogradov A. I. On numbers with small prime divisors. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol 109, no. 4, pp. 683–686 (in Russian).
16. Burgess D. A. On character sum estimate with $r=3$. *J. London Math. Soc.*, 1986, vol. 33, no. 2, pp. 219–226. DOI: 10.1112/jlms/s2-33.2.219.

КЛАСС ПОКАЗАТЕЛЬНО РАСТУЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, НЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ РАВНОМЕРНО ПО МОДУЛЮ ЕДИНИЦА

П. З. Рахмонов

Кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, parviz.msu@gmail.com

Построен класс экспоненциально растущих последовательностей, не являющихся равномерно распределенными по модулю единицы.

Ключевые слова: равномерное распределение по модулю единица, числа Фибоначчи, золотое сечение, дробно-линейная функция.

Вопрос о равномерном распределении функций вида $\alpha\psi(x)$, где α – иррациональное число, $\psi(x)$ – функция, принимающая целые значения, изучался А. Вейлем. Из работы [1] следует, что почти для всех α последовательность $\{\alpha\lambda^n\}$ равномерно распределена, где $\lambda > 1$ – действительное число. Однако конкретные примеры таких α им не были построены. В работах А. Г. Постникова, видимо, впервые построены примеры таких α, что последовательность $\{\alpha\lambda^n\}$ равномерно распределена по модулю единица, $\lambda \geq 2$ – целое число.

Воспользуемся следующими обозначениями: $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность Фибоначчи: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n \geq 2$, $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ — золотое сечение.