References

1. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *I. Math. Ann.*, 1923, vol. 89, no. 1–2, pp. 103–121.
2. Markina I., Vasil'ev A. Virasoro algebra and dynamics in the space of univalent functions. *Contemp. Math.*, 2010, vol. 525, pp. 85–116.
3. Aleksandrov I. A. *Parametric continuations in the theory of univalent functions*. Moscow, Nauka, 1976, 344 p. (in Russian).
4. Lind J., Marshall D. E., Rohde S. Collisions and spirals of Loewner traces. *Duke Math. J.*, 2010, vol. 154(3), pp. 527–573. DOI: 10.1215/00127094-2010-045.
5. Kufarev P. P. Odno zamechanie ob integralakh uravneniia Levnera. [A remark on integrals of Löwner's equation] *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1947, vol. 57, no. 7, pp. 655—656 (in Russian).
6. Kager W., Nienhuis B., Kadanoff L. P. Exact solutions for Loewner evolutions. *J. Statist. Phys.*, 2004, vol. 115, no. 3–4, pp. 805–822.
7. Prokhorov D. V., Zakharov A. M. Integrability of a partial case of the Löwner equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 19–23 (in Russian).
8. Marshall D. E., Rohde S. The Loewner differential equation and slit mappings. *J. Amer.Math. Soc.*, 2005, vol. 18, no. 4, pp. 763–778.
9. Prokhorov D., Vasil'ev A. Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation. *Analysis and Mathematical Physics*, eds. B. Gustafsson, A. Vasil'ev. Berlin, Birkhauser, 2009, pp. 455–463.
10. Sansone G. *Equazioni differenziale nel campo reale*. P. 2^a, 2^a ediz., Bologna, 1949.
11. Poincaré H. *Sur les courbes définies par une équation différentielle. J. Math. Pures Appl.*, 1886, vol. 4, no. 2, pp. 151–217.
12. Bendixson I. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Acta Math.*, 1901, vol. 24, pp. 1–88.
13. Golubew W. *Differentialgleichungen im komplexen, veb deutsch*. Berlin, Verlag Wiss., 1958, 398 p.
14. Sansone G. *Equazioni differenziale nel campo reale*. P. 1^a, 2^a ediz., Bologna, 1948.
15. Borel E. Mémoire sur les séries divergentes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 1899, vol. 16, no. 3, pp. 9–131.
16. Hayman W., Kennedy P. *Subharmonic functions*. London, Academic Press, 1976.
17. Goluzin G. *Geometric theory of functions of a complex variable*. Transl. Math. Monographs, vol. 26, Providence, RI, AMS, 1969. 676 p.

УДК 512.577

О НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ФОРМАЦИЙ УНАРОВ

А. Л. Расстригин

Старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и математического анализа, Волгоградский государственный социально-педагогический университет, rasal@fizmat.vspu.ru

Формацией называют класс алгебраических систем, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В работе показано, что любая формация, состоящая из не более чем счетных унаров, является наследственной.

Ключевые слова: унар, формация, наследственная формация.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Формацией называется класс алгебраических систем, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формацию называют *конечной*, если она содержит лишь конечные системы. Мы будем называть формацию *не более чем счетной*, если она содержит лишь не более чем счетные системы.

Пусть $\mathfrak{X}$ — совокупность алгебраических систем. Через $\mathrm{H}(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{R}_0(\mathfrak{X})$ обозначаются совокупности всех гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений $\mathfrak{X}$-систем соответственно. Через $\mathrm{S}(\mathfrak{X})$ обозначается класс всех подсистем $\mathfrak{X}$-систем. Класс $\mathfrak{X}$ называется *наследственным*, если $\mathrm{S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$. Через $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ ($\mathrm{sform}\,\mathfrak{X}$) обозначается наименьшая (наименьшая наследственная) формация, содержащая $\mathfrak{X}$ или, иначе, *порожденная* совокупностью $\mathfrak{X}$. Через $\mathrm{Si}\,\mathfrak{X}$ обозначается совокупность всех подпрямо неразложимых $\mathfrak{X}$-систем. Множество целых неотрицательных чисел обозначается $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ и $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Унаром называется унарная алгебра с одной операцией f. Через $C_m^n = \langle a \mid f^n(a) = f^{n+m}(a)\rangle$ обозначается унар с образующим a и определяющим соотношением $f^n(a) = f^{n+m}(a)$, где $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m > 0$. Унар C_m^0 называют *циклом* длины m. Через C_m^∞ обозначается объединение возрастающей цепи $C_m^1 \subset C_m^2 \subset \ldots$ унаров C_m^t для всех $t \in \mathbb{N}$. Элемент a унара называется *периодическим*, если $f^{n+m}(a) = f^n(a)$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m > 0$. *Глубиной* $t(a)$ периодического элемента a называется наименьшее $n \in \mathbb{N}_0$, для которого элемент $f^n(a)$ принадлежит циклу. *Периодом* $p(a)$ периодического элемента a называется наименьшее $m \in \mathbb{N}$, для которого $f^{t(a)+m}(a) = f^{t(a)}(a)$. Унар называется *периодическим* (*циклическим*), если все его элементы периодические (принадлежат циклам). *Глубиной* $t(A)$ (*периодом* $p(A)$) периодического унара A, для которого $\{t(a) \mid a \in A\}$ ($\{p(a) \mid a \in A\}$) ограничено, называется $\max\{t(a) \mid a \in A\}$ (НОК$\{p(a) \mid a \in A\}$).

Если A, B — унары, причем $A \cap B = \varnothing$, тогда унар $A \cup B$ обозначается $A + B$ и называется *прямой суммой* унаров A и B. Унар, не являющийся прямой суммой двух своих подунаров, называется *связным*. Для любого подмножества B унара A обозначим $\langle B\rangle$ подунар унара A, порожденный B. Если B — подунар унара A, то через ρ_B обозначим *конгруэнцию Риса* для подунара B, т. е. конгруэнцию на A: $(x, y) \in \rho_B \Leftrightarrow x, y \in B$ или $x = y$. Наибольшая и наименьшая конгруэнции унара A обозначаются ∇_A, и Δ_A соответственно. Через F_1 обозначается свободный однопорожденный унар, а через Z_f — унар, изоморфный унару $\langle \mathbb{Z}, f\rangle$, где $f(n) = n+1$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Запись $A \leqslant_s \prod_{i\in I} A_i$ означает, что алгебраическая система A разложима в подпрямое произведение систем A_i ($i \in I$).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс алгебр. В [1, леммы 3.2, 3.5] приведены следующие формулы.

Лемма 1 [1]. $\operatorname{form}\mathfrak{X} = \mathrm{HR}_0(\mathfrak{X})$*;* $\operatorname{sform}\mathfrak{X} = \mathrm{HR}_0\mathrm{S}(\mathfrak{X})$.

В работе [2] автора показано, что любая конечная формация $\mathfrak{F}$ унаров определяется множеством $\mathrm{Si}\,\mathfrak{F}$, которое образует наследственный класс. По лемме 1 из этого следует, что любая конечная формация унаров наследственна [2, следствие 2]. Целью последующего изложения является доказательство наследственности не более чем счетных формаций унаров.

Нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация унаров. Тогда $A + B \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow A,\ B,\ C_1^0 + C_1^0 \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Импликация «$\Rightarrow$» была доказана в [2, лемма 4].

Пусть A, B и $C_1^0 + C_1^0 \in \mathfrak{F}$. Тогда унары $A + C_1^0$, $B + C_1^0$ принадлежат $\mathfrak{F}$, так как они являются гомоморфными образами $A \times (C_1^0 + C_1^0) = A \times C_1^0 + A \times C_1^0$ и $B \times (C_1^0 + C_1^0)$ соответственно. Отсюда следует, что унар $(A+C_1^0)\times(B+C_1^0) = A\times B + A\times C_1^0 + C_1^0\times B + C_1^0\times C_1^0$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Положим $D = A\times C_1^0 + C_1^0\times B$. Покажем, что D является подпрямым произведением унаров $A + C_1^0$ и $B + C_1^0$. Пусть, для определенности, $D \subseteq (A + \langle a\rangle) \times (B + \langle b\rangle)$ и $D = A \times \langle b\rangle + \langle a\rangle \times B$, где $\langle a\rangle \cong \langle b\rangle = C_1^0$. Тогда для произвольного $x \in A + \langle a\rangle$, если $x \in A$, то $\pi_1(x, b) = x$, а если $x = a$, то $\pi_1(a, y) = x$ для любого $y \in B$, где π_1 — проекция произведения $(A + \langle a\rangle) \times (B + \langle b\rangle)$ на $A + \langle a\rangle$. Таким образом, $\pi_1(D) = A + \langle a\rangle$. Аналогично $\pi_2(D) = B + \langle b\rangle$ для π_2 — проекции произведения $(A + \langle a\rangle) \times (B + \langle b\rangle)$ на $B + \langle b\rangle$. Таким образом, $D \in \mathfrak{F}$, но $D \cong A + B$. Поэтому $A + B \in \mathfrak{F}$, что и требовалось показать. $\square$

3. О НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ФОРМАЦИЙ УНАРОВ

Покажем, что если некоторая формация содержит непериодический унар, то она содержит все счетные унары.

Лемма 3. $F_1 \times F_1$ *— свободный унар счетного ранга в многообразии всех унаров.*

Доказательство. Пусть $A \cong B \cong F_1$, где $A = \langle a_0\rangle$, $B = \langle b_0\rangle$, и $f(a_i) = a_{i+1}$, $f(b_i) = b_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$. Определим на $A \times B$ следующие отображения:

1) $h : A \times B \to \mathbb{N}_0$, по правилу $h(x) = \min\{i, j\}$,

2) $d : A \times B \to \mathbb{Z}$, по правилу $d(x) = j - i$,

для любого $x \in A \times B$, где $x = (a_i, b_j)$ для некоторых $i, j \in \mathbb{N}_0$. Отметим, что $x = y$ тогда и только тогда, когда $h(x) = h(y)$ и $d(x) = d(y)$ для любых $x, y \in A \times B$.

Ядро $\operatorname{Ker} d$ отображения d разбивает носитель $A \times B$ на классы. Эти классы являются подунарами унара $A \times B$. Каждый такой класс как подунар порожден элементом вида (a_i, b_j), где $i = 0$ или $j = 0$, и изоморфен F_1. В самом деле, $d(a_i, b_j) = j - i = j + 1 - (i + 1) = d(a_{i+1}, b_{j+1}) = d(f(a_i, b_j))$. Для любого $x \in A \times B$, $x = (a_i, b_j) = f^{h(x)}(a_{i-h(x)}, b_{j-h(x)})$, где $i - h(x) = 0$ или $j - h(x) = 0$. Отображение $y \mapsto a_{h(y)}$, $y \in [x]_{\operatorname{Ker} d}$, задает изоморфизм содержащего x класса на $A \cong F_1$. Таким образом, $F_1 \times F_1$ есть прямая сумма счетного числа унаров F_1 — свободный унар счетного ранга. □

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация унаров. Следующие условия эквивалентны:*

1) $Z_f \in \mathfrak{F}$; 2) $F_1 \in \mathfrak{F}$; 3) $\mathfrak{F}$ содержит все счетные унары.

Доказательство. (1) ⇒ (2) Пусть $A \cong B \cong F_1$, где $A = \langle a_0 \rangle$, $B = \langle b_0 \rangle$, и $f(a_i) = a_{i+1}$, $f(b_i) = b_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$. Покажем, что унар $A \times B$ разложим в подпрямое произведение унаров Z_f. Определим на $A \times B$ следующие конгруэнции, пользуясь определенными в доказательстве леммы 3 отображениями d, h:

1) θ_+ по правилу: $x\theta_+ y \Leftrightarrow h(y) - h(x) = d(x) - d(y)$;

2) θ_- по правилу: $x\theta_- y \Leftrightarrow h(y) - h(x) = d(y) - d(x)$.

Покажем, что $\theta_+ \cap \theta_- = \Delta$. Возьмем $(x, y) \in \theta_+ \cap \theta_-$, но тогда $d(x) = d(y)$, $h(x) = h(y)$ откуда $x = y$. Рассмотрим теперь $A \times B/\theta_+$ и $L \cong Z_f$. Занумеруем элементы $L = \langle \{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}, f \rangle$, где $f(x_i) = x_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Зададим отображение $\varphi : L \to A \times B/\theta_+$, $\varphi(x_n) = [y]_{\theta_+}$, где $d(y) = n, h(y) = 0$. Такое соответствие является изоморфизмом унара L на $A \times B/\theta_+$. Аналогично $A \times B/\theta_- \cong L$. Таким образом, $F_1 \times F_1 \leqslant_s L \times L$. Следовательно, $F_1 \in \operatorname{form} L$.

Далее, импликация (2) ⇒ (3) следует из леммы 3, а (3) ⇒ (1) тривиальна. □

Для произвольного унара A определим конгруэнцию $\psi_\parallel$: $(x, y) \in \psi_\parallel$, если

$$\begin{cases} x, y \text{ — периодические элементы и } t(x) = t(y), \\ x, y \text{ — непериодические элементы и } f^n(x) = f^n(y) \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Лемма 5. *Если унар A непериодический, то $F_1 \in \operatorname{form} A$.*

Доказательство. Действительно, найдется непериодический элемент $a \in A$. По лемме 2, наибольший связный подунар A' унара A, содержащий a, принадлежит формации $\operatorname{form} A$. Унар $A'/\psi_\parallel$ изоморфен либо F_1, либо Z_f. Лемма 4 завершает доказательство. □

Для фиксированного $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ через $\mathscr{N}_\omega^n$ обозначим унар, изоморфный фактор унару прямой суммы счетного числа C_1^n по ρ_D для подунара D данной прямой суммы, содержащего все ее подунары C_1^0.

Лемма 6. *Унар $\mathscr{N}_\omega^n$ является свободным унаром счетного ранга в многообразии унаров, определяемом тождеством $f^n(x) = f^n(y)$ ($n \in \mathbb{N}$).*

Доказательство. Обозначим указанное в утверждении многообразие через V. Пусть S — множество всех элементов глубины n унара $\mathscr{N}_\omega^n$. Очевидно S счетно и $\langle S \rangle = \mathscr{N}_\omega^n \in V$. Достаточно проверить (см. например [3, п. 12.2, теорема 1]), что из истинности равенства вида $f^l(x) = f^m(y)$ для некоторых $l, m \in \mathbb{N}_0$ и различных $x, y \in S$ следует, что в многообразии V выполнено тождество $(\forall\, xy)\ f^l(x) = f^m(y)$.

На произвольных различных элементах $x, y \in S$ выполняются только равенства вида $f^{n'}(x) = f^{m'}(y)$, где $n', m' \geqslant n$, и $f^{n'+m'}(x) = f^{n'}(x)$, где $n' \geqslant n$ (см. [4, лемма 1]). Все тождества такого вида являются следствиями тождества $f^n(x) = f^n(y)$ и поэтому верны в V. □

Лемма 7. *Пусть A — связный унар, $C_1^0 \subseteq A$ и $|A| \leqslant \aleph_0$. Тогда $A \in \operatorname{form} C_1^\infty$.*

Доказательство. Покажем, что $\{C_1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \operatorname{form} C_1^\infty$. Обозначим через A_h фактор унар прямой суммы $B_1 + B_2$ унаров $B_1 = C_1^\infty$ и $B_2 = C_1^h$ по конгруэнции $\theta = \rho_D$, где D — подунар унара $B_1 + B_2$, изоморфный $C_1^0 + C_1^0$. Пусть $B_i\theta = \{[x]_\theta \in A_h \mid x \in B_i\}$ $(i = 1, 2)$. Унар $A_h/\rho_{B_1\theta}$

изоморфен C_1^h для любого $h \in \mathbb{N}$. В свою очередь, $A_h \in \operatorname{form} C_1^\infty$ для любого $h \in \mathbb{N}$, так как $A_h \leqslant_s C_1^\infty \times C_1^\infty$. Действительно, $A_h/\psi_\| = C_1^\infty$, $A_h/\rho_{B_2\theta} = C_1^\infty$ и $\rho_{B_2\theta} \cap \psi_\| = \Delta_{A_h}$. Таким образом, $C_1^h \in \mathrm{HR}_0(C_1^\infty) = \operatorname{form} C_1^\infty$ для любого $h \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\mathscr{N}_\omega^\infty \in \operatorname{form} C_1^\infty$. Пусть $A_1 \cong B_1 = C_1^\infty$. Будем обозначать $A_1 = \langle \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}, f\rangle$, где $f(a_n) = a_{n-1}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $f(a_0) = a_0$; аналогично $B_1 = \langle \{b_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}, f\rangle$. Тогда унар $A_1 \times B_1$ является связным унаром, содержащим цикл $\langle (a_0, b_0)\rangle = C_1^0$. Множество $X = \{(a_i, b_0), (a_0, b_i), (a_i, b_i) \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ элементов унара $A_1 \times B_1$ очевидно образует подунар унара $A_1 \times B_1$. Положим $\theta = \rho_X$.

Определим на $(A_1 \times B_1)/\theta$ отображение $d : (A_1 \times B_1)/\theta \to \mathbb{Z}$ по правилу

$$d(x) = \begin{cases} i - j, & \text{если } (a_i, b_j) \notin X \\ 0, & \text{если } (a_i, b_j) \in X \end{cases}$$

для любого $x = [(a_i, b_j)]_\theta \in (A_1 \times B_1)/\theta$.

Унар $(A_1 \times B_1)/\theta$ связен и содержит подунар $X\theta = \{[x]_\theta \in A_1 \times B_1/\theta \mid x \in X\} \cong C_1^0$. Заметим, что $d(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle x\rangle \cong C_1^0$ в $(A_1 \times B_1)/\theta$. Ядро $\operatorname{Ker} d$ разбивает $(A_1 \times B_1)/\theta$ на классы. Каждый такой класс C по $\operatorname{Ker} d$ в объединении с $X\theta$ образует подунар C_1^∞ унара $(A_1 \times B_1)/\theta$. Таким образом, унар $(A_1 \times B_1)/\theta$ связен, содержит унар C_1^0 в качестве подунара и бесконечное число различных подунаров C_1^∞, а пересечение любой пары таких подунаров есть C_1^0. Заключаем, что $(A_1 \times B_1)/\theta \cong \mathscr{N}_\omega^\infty$.

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения леммы. В случае, если унар A конечен, то получаем $A \in \operatorname{form}\{C_1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \operatorname{form} C_1^\infty$.

Пусть A бесконечен. Возьмем $B = \mathscr{N}_\omega^\infty$, $B \in \operatorname{form} C_1^\infty$.

Носитель A и множество попарно различных подалгебр вида C_1^∞ в B равномощны, т. е. между ними существует биекция. Обозначим ее через φ_0. Зададим отображение $\varphi : a \mapsto b$ из A в B такое, что $b \in \varphi_0(a)$ и $t(a) = t(b)$. Отображение φ инъективно. Продолжим φ^{-1} до гомоморфизма $\psi : \langle \operatorname{Im} \varphi\rangle \to A$ следующим образом: для произвольного $x \in \langle \operatorname{Im}\varphi\rangle$ имеет место $x = f^n(x_0)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}_0$ и $x_0 \in \operatorname{Im}\varphi$, положим по определению $\psi(x) = f^n(\varphi^{-1}(x_0))$. Отображение ψ сюрьективно, так как для любого $a \in A$ получаем равенство $\psi(\varphi(a)) = a$ из определения. То, что ψ является гомоморфизмом ясно из способа задания, поэтому ψ — эпиморфизм $\langle \operatorname{Im}\varphi\rangle$ на A. Наконец, $\langle \operatorname{Im}\varphi\rangle \in \operatorname{form} C_1^\infty$ так как формация $\operatorname{form} C_1^\infty$ наследственна в силу леммы 1 и установленного ранее включения $\{C_1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \operatorname{form} C_1^\infty$. Таким образом $A \in \operatorname{form} C_1^\infty$. □

Для произвольной формации $\mathfrak{F}$ унаров обозначим через $\mathscr{C}\mathfrak{F}$ множество всевозможных сумм циклов из $\mathfrak{F}$ и $\mathscr{N}_\omega\mathfrak{F} = \{A \in \mathfrak{F} \mid A = \mathscr{N}_\omega^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация периодических унаров. Тогда класс $\mathfrak{X} = \operatorname{Si}\mathfrak{F} \cup \mathscr{C}\mathfrak{F} \cup \mathscr{N}_\omega\mathfrak{F}$ порождает $\mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{F} = \operatorname{form}\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, понятно, что $\operatorname{form}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Необходимо показать обратное включение.

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим разложение A в подпрямое произведение:

$$A \leqslant_s \prod_{i \in I} A_i, \text{ где } A_i \in \operatorname{Si}\mathfrak{F} \ (i \in I). \tag{1}$$

Если множество I индексов конечно, то $A \in \operatorname{form}(\operatorname{Si}\mathfrak{F}) \subseteq \operatorname{form}\mathfrak{X}$. Пусть I бесконечно для любого разложения вида (1).

Подпрямо неразложимыми унарами (согласно [5]) являются унары C_1^h ($h \geqslant 1$), C_1^∞, $C_{p^k}^0$ (p — простое, $k \in \mathbb{N}_0$) и $C_{p^k}^0 + C_1^0$ и только они. Поэтому для каждого разложения вида (1) будем рассматривать разбиение множества I на непересекающиеся подмножества I_1 и I_2, $I = I_1 \cup I_2$ так, что

$$A_i = \begin{cases} C_1^n, \text{ где } n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, & \text{если } i \in I_1, \\ C_{p^k}^0 + C_1^0 \text{ или } C_{p^k}^0, \text{ где } k, p \in \mathbb{N}_0, p \text{ — простое}, & \text{если } i \in I_2. \end{cases}$$

Тогда $A \leqslant_s D_1 \times D_2$, где $D_j \leqslant_s \prod_{i \in I_j} A_i$, $j = 1, 2$. Покажем, что $D_1, D_2 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Пусть для некоторого разложения вида (1) множество $\{t(a) \mid a \in A_i,\ i \in I_1,\}$ не ограничено. Так как унар D_1 является гомоморфным образом унара A, то $D_1 \in \mathfrak{F}$ и является периодическим унаром. Тогда D_1 связный периодический унар, содержащий элементы сколь угодно большой глубины. В D_1 есть лишь один циклический элемент — все проекции которого являются подунарами вида C_1^0 унаров A_i $(i \in I_1)$. В D_1 есть элементы любой глубины, так как таковые есть в унарах A_i $(i \in I_1)$ (см. [4, лемма 2]). Тогда $D_1/\psi_{\|} = C_1^{\infty}$, т. е. $C_1^{\infty} \in \operatorname{Si} \mathfrak{F}$. По лемме 7, $D_1 \in \operatorname{form}(\operatorname{Si} \mathfrak{F}) \subseteq \operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Пусть теперь унары A_i конечны для всех $i \in I_1$ и множество $\{t(A_i) \mid i \in I_1\}$ ограничено для всех разложений (1). Выберем разложение вида (1) такое, что

$$m = \max(\{t \in \mathbb{N} \mid r_t = \aleph_0\} \cup \{0\}) \text{ — минимальное из возможных,} \tag{2}$$

где $r_t = |\{i \in I_1 \mid t(A_i) = t\}|$ для любого $t \in \mathbb{N}$. Если $m = 0$, то подпрямое произведение D_1 конечно и поэтому $D_1 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$. Пусть $m > 0$. Разложим D_1 в подпрямое произведение унара $D_1' \leqslant_s \prod_{i' \in I_1' \subseteq I_1} A_{i'}$, где $t(A_{i'}) \leqslant m$ $(i' \in I_1')$, и какого-то конечного подпрямого произведения унаров A_i $(i \in I_1)$, у которых $t(A_i) > m$. Разобьем множество $M = \{a \in D_1' \mid t(a) = m\}$ элементов D_1' глубины m на классы: $a \equiv b \Leftrightarrow \langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq C_1^0$. Пусть в M' входит ровно по одному представителю из каждого класса. Покажем, что если $M/\equiv$ бесконечно, то $\mathscr{N}_\omega^m \subseteq D_1'$ и $\mathscr{N}_\omega^m \in \mathfrak{F}$.

Определим конгруэнцию, которая понадобится в дальнейшем. Пусть A — произвольный связный унар, такой, что $\langle a_0 \rangle = C_1^0$ для некоторого $a_0 \in A$ и $\{t(a) \mid a \in A\}$ ограничено. Для некоторого множества B элементов глубины $t(A)$ унара A такого, что для любых двух различных $a, b \in B$ верно $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = C_1^0$, зададим эквивалентность ψ_B на A через описание классов эквивалентности: для любого $a \in B$ и $n < t(A)$ положим

$$[f^n(a)]_{\psi_B} = \{x \in A \mid t(x) = t(A) - n \text{ и } \langle x \rangle \cap \langle a \rangle \neq C_1^0\},$$
$$[a_0]_{\psi_B} = \{x \in A \mid \langle x \rangle \cap \langle a \rangle = C_1^0 \text{ для всех } a \in B\}.$$

Вернемся к доказательству. Очевидно, что $D'/\psi_{M'}$ порожден множеством $\{[a]_{\psi_{M'}} \mid a \in M'\}$ элементов глубины m, мощность которого совпадает с мощностью M', т. е. счетна. Для любых двух различных $a, b \in M'$ имеем $[a]_{\psi_{M'}} \cap [b]_{\psi_{M'}} = C_1^0$. Таким образом, $D'/\psi_{M'} \cong \mathscr{N}_\omega^m$.

Отсюда $\mathscr{N}_\omega^m \in \mathfrak{X}$. По лемме 6, $D_1' \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$ как гомоморфный образ $\mathscr{N}_\omega^m$, а за ним и $D_1 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$ как конечное подпрямое произведение D_1' и какого-то конечного числа унаров A_i $(i \in I_1)$. Если же $M/\equiv$ конечно, то с помощью конгруэнций $\rho_{\langle M' \rangle}$, $\psi_{\{a\}} \neq \Delta$ (по всем $a \in M'$) можно разложить D_1' в подпрямое произведение конечного числа унаров C_1^m и C_1^k, $k < m$, что противоречит минимальности m по условию (2). Действительно, пусть $(x, y) \in \rho_{\langle M' \rangle} \cap (\bigcap_{a \in M'} \psi_{\{a\}})$, тогда $x \in \langle a \rangle$, $y \in \langle b \rangle$ для некоторых $a, b \in M'$. Если $a = b$, то из $(x, y) \in \psi_{\{a\}}$ следует $t(x) = t(y)$, откуда $x = y$. Если же $a \neq b$, то $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = C_1^0$ и, так как $(x, y) \in \psi_{\{a\}} \cap \psi_{\{b\}}$, имеем $x, y \in C_1^0$, откуда также $x = y$. Таким образом, $\rho_{\langle M' \rangle} \cap (\bigcap_{a \in M'} \psi_{\{a\}}) = \Delta$. Далее, унар $D_1'/\psi_{\{a\}}$ порождается элементом $[a]_{\psi_{\{a\}}}$ и изоморфен C_1^m для всех $a \in M'$. Унар $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$ не имеет элементов глубины m, т. е. $t(D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}) < m$. В самом деле, для любого $a \in D_1'$ такого, что $t(a) = m$, для некоторого $b \in M'$ выполнено $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq C_1^0$. Из этого следует, что для некоторого $n < m$ элемент $f^n(a)$ принадлежит $\langle b \rangle$. Следовательно, элемент $[f^n(a)]_{\rho_{\langle M' \rangle}}$ принадлежит подунару C_1^0 унара $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$, т. е. $t([a]_{\rho_{\langle M' \rangle}}) < m$. Поэтому глубина любого гомоморфного образа унара $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$ строго меньше m, т. е. $D_1'/\rho_{\langle M' \rangle}$ раскладывается в подпрямое произведение C_1^k, $k < m$.

Унар D_2 является суммой циклов и принадлежит $\mathfrak{X}$, а значит, $D_2 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$.

Доказательство завершается, так как $D_1, D_2 \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$, т. е. $A \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$. □

Теперь сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Любая не более чем счетная формация унаров наследственна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — не более чем счетная формация унаров. Если $\mathfrak{F}$ содержит только периодические унары, то по предложению 1 формация $\mathfrak{F}$ порождается таким множеством $\mathfrak{X}$ унаров, что $\mathrm{S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Откуда $\mathrm{HR_0S}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$. По лемме 1 получаем, что $\mathfrak{F}$ — наследственная формация.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ содержит непериодические унары. По лемме 5 имеем $F_1 \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является формацией всех счетных унаров по лемме 4 и поэтому $\mathfrak{F}$ наследственная. Теорема 1 доказана. $\square$

Библиографический список

1. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М. : Наука, 1989. 256 с.
2. *Расстригин А. Л.* Формации конечных унаров // Чебышевский сб. 2011. Т. XII, № 2 (38). С. 102–109.
3. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М. : Наука, 1970. 392 с.
4. *Карташов В. К.* Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 1. С. 7–20.
5. *Wenzel G. H.* Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$ // Archiv der Mathematik. 1970. Vol. 21. P. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912.

On Heredity of Formations of Monounary Algebras

A. L. Rasstrigin

Volgograd State Socio-Pedagogical University, Russia, 400066, Volgograd, Lenin Ave., 27, rasal@fizmat.vspu.ru

A class of algebraic systems is said to be a formation if it is closed under homomorphic images and finite subdirect products. It has been proven that any formation of at most countable monounary algebras is a hereditary formation.

Key words: unar, formation, hereditary formation.

References

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formatsii algebraicheskikh sistem* [Formations of algebraic systems]. Moscow, Nauka, 1989, 256 p. (in Russian).
2. Rasstrigin A. L. Formations of finite monounary algebras. *Chebyshevskii Sbornik*, 2011, Vol. XII, no. 2 (38), pp. 102–109 (in Russian).
3. Mal'tsev A. I. *Algebraicheskie sistemy* [Algebraic systems]. Moscow, Nauka, 1970 (in Russian).
4. Kartashov V. K. Quasivarieties of unars. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, pp. 5–12. DOI: 10.1007/BF01149807.
5. Wenzel G. H. Subdirect irreducibility and equational compactness in unary algebras $\langle A; f \rangle$. *Archiv der Mathematik*, 1970, vol. 21, pp. 256–264. DOI: 10.1007/BF01220912.

УДК 511.325

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СДВИНУТЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

З. Х. Рахмонов

Доктор физико-математических наук, директор, Институт математики Академии наук Республики Таджикистан, Душанбе, zarullo-r@rambler.ru

Получена новая оценка суммы значений примитивного характера Дирихле по модулю q на последовательности сдвинутых простых чисел $p - l$, $(l, q) = 1$, $p \le x$, нетривиальная при $x \ge q^{5/6+\varepsilon}$. Это уточняет оценку Дж. Б. Фридландера, К. Гонга, И. Е. Шпарлинского, нетривиальную лишь при $x \ge q^{8/9+\varepsilon}$.

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В $[1, 2]$ он доказал: *если q — простое, $(l, q) = 1$, $\chi(a)$ — неглавный характер по модулю q, тогда*

$$T(\chi) = \sum_{p \le x} \chi(p - l) \ll x^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-1/6} \right). \tag{1}$$