Следствие. *Пусть α есть значение рациональной функции от φ, то есть $\alpha = f(\varphi)/g(\varphi)$, где $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ — многочлены с целыми коэффициентами от φ. Тогда последовательность $\{\alpha f_n\}$ не является равномерно распределенной.*

Доказательство. Используя свойство $\varphi^2 = \varphi + 1$, выразим $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ в виде линейной функции от φ. Тогда можно полагать, что α есть значение дробно-линейной функции от φ. Далее, согласно лемме 1, значение дробно-линейной функции от φ можно выразить в виде линейной функции с рациональными коэффициентами от φ. Пусть s, t — рациональные числа.

Согласно оценке (3)

$$(s\varphi + t)f_k - (sf_{k+1} + tf_k) \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Последовательность $sf_{k+1}+tf_k$ не является равномерно распределенной (так как s, t — рациональные числа). Поэтому, согласно лемме 2, последовательность $(s\varphi+t)f_k$ также не является равномерно распределенной.

Библиографический список

1. *Weyl H.* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Vol. 77. P. 313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.

On the Class of Exponentially Growing Sequences that are Not Uniformly Distributed Modulo One

P. Z. Rakhmonov

Moscow State University, Russia, 119234, Moscow, Leninskie Gory, 1, parviz.msu@gmail.com

The paper presents a family of exponentially growing but not uniformly distributed sequences modulo one.

Key words: uniform distrubtion modulo one, Fibonacci numbers, golden ratio, homographic transformation..

References

1. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Ann.*, 1916, vol. 77, pp. 313–352. DOI: 10.1007/BF01475864.

УДК 511.9

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ В. С. РЯБЕНЬКОГО

А. В. Родионов

Ассистент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, rodionovalexandr@mail.ru

В работе рассмотрены алгоритмы вычисления гиперболических параметров целочисленных решеток решений линейных сравнений, соответствующих параллелепипедальным сеткам.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, теоретико-числовой метод.

В 1961 году В. С. Рябенький в работе [1] предложил численный метод решения задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \qquad 0 \le t \le T, \qquad -\infty < x_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \dots, s), \tag{1}$$

$$u(0, \vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_s), \tag{2}$$

где

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)=\sum_{j_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{j_s=0}^{n_s}a_{j_1,\ldots,j_s}\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}} \tag{3}$$

— дифференциальный оператор порядка $n(Q)=n_1+\ldots+n_s$, с максимальным порядком по отдельным переменным, не превосходящим $m(Q)=\max(n_1,\ldots,n_s)$, а $\varphi(\vec{x})=\varphi(x_1,\ldots,x_s)$ — периодическая с периодом единица по каждому из своих аргументов функция из класса E_s^α $(\alpha>m(Q)+1)$.

Таким образом,

$$\varphi(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=-\infty}^{\infty}c_{m_1,\ldots,m_s}e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{m_1,\ldots,m_s}|\le\frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}.$$

Величина $\|\varphi\|_{E_s^\alpha}=\sup\limits_{m_1,\ldots,m_s}|c_{m_1,\ldots,m_s}(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha|<\infty$ является нормой на пространстве E_s^α, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

В своей работе В. С. Рябенький предложил некоторый общий подход численного решения задачи Коши с использованием произвольных сеток, для которых выполнены специальные условия, и показал, что его конструкция применима для многомерных кубических сеток, которые ещё называют равномерными, и для параллелепипедальных сеток Н. М. Коробова.

Пусть задана целочисленная решетка Λ, которая определяет обобщенную параллелепипедальную сетку $M(\Lambda)$ и абсолютно минимальную гиперболическую полную систему вычетов $M_H^*(\Lambda)$. С задачей Коши (1)–(3) свяжем дискретную задачу Коши с решеткой Λ, отличие которой от просто задачи Коши заключается в том, что начальное условие ослабляется и задается не на единичном s-мерном кубе, а только на конечном множестве $M(\Lambda)$. За счет этого решение можно найти в пространстве $\mathbb{T}(M_H^*(\Lambda))$.

Определение 1. *Дискретной задачей Коши с решеткой* Λ называется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(t,\vec{x}), \tag{4}$$

$$0\le t\le T,\qquad -\infty<x_\nu<\infty\qquad(\nu=1,\ldots,s), \tag{5}$$

с дискретными начальными условиями:

$$u(0,\vec{x})=\varphi(\vec{x}),\qquad \vec{x}\in M(\Lambda), \tag{6}$$

где $\varphi(\vec{x})$ — периодическая функция из класса E_s^α $(\alpha>m(Q)+1)$.

Решением дискретной задачей Коши с решеткой Λ назовем тригонометрический многочлен с переменными коэффициентами $u(t,\vec{x})\in\mathbb{T}(M^*(\Lambda))$, удовлетворяющий уравнению (4) в области (5) с дискретными начальными условиями (6).

Теорема 1. *Решением дискретной задачи Коши с решеткой* Λ *является тригонометрический многочлен:*

$$u(t,\vec{x})=\sum_{\vec{m}\in M^*(\Lambda)}c(\vec{m})e^{Q(\vec{m})t}e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

где

$$c(\vec{m})=c_{M(\Lambda),M^*(\Lambda)}(\vec{m})=\frac{1}{N}\sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)}\varphi(\vec{y})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{y})}.$$

Доказательство см. в [2]. □

Введем в рассмотрение новый класс функций $E_s^{*\alpha}(Q)$, где

$$Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \ldots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \ldots + n_s$.

Определение 2. Периодическая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^{*\alpha}(Q)$, если

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leq \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q,T)}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)}.$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q,T)} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)| < \infty,$$

где

$$Q(\vec{m}, T) = \max_{q(\vec{n})\leq q(\vec{m})} Q_1(\vec{n}, T),$$

$$Q_1(\vec{m}, T) = \max_{0\leq t\leq T} \left(\left|e^{Q(m)t}\right|, \left|e^{Q(m)t}\right| \cdot |Q(m)|\right),$$

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} (2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1} \ldots m_s^{j_s},$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q,T)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Определение 3. Функция $u(t, \vec{x})$, определенная при $0 \leq t \leq T$ и $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, периодическая по $\vec{x}$ с периодом 1 по каждой переменной x_ν ($\nu = 1, \ldots, s$), представимая кратным рядом Фурье с переменными коэффициентами Фурье, зависящими от t и дифференцируемыми по t при $0 \leq t \leq T$:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} b'_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

принадлежит классу $ER_{s+1}^\alpha(Q,T)$, если для любого t из отрезка $[0;T]$ выполнены равенства

$$b_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t) e^{Q(\vec{m})t}, \qquad b'_{\vec{m}}(t) = c_{\vec{m}}(t) Q(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t}$$

и периодическая функция

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}}(t) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

принадлежат классу $E_s^\alpha(Q,T)$.

Теорема 2. *Для пространства $ER_{s+1}^\alpha(Q,T)$ общим решением дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t, \vec{x}), \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad -\infty < x_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \ldots, s)$$

является периодическая функция:

$$u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} Q(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{8}$$

где коэффициенты $c_{\vec{m}}$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию

$$C = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha \cdot Q(\vec{m}, T)| < \infty,$$

и ряды в правых частях (7) *и* (8) *абсолютно сходятся.*

Доказательство см. в работе [2]. □

Теорема 3. *Для пространства $ER^\alpha_{s+1}(Q,T)$ решением задачи Коши для дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) u(t,\vec{x}), \qquad 0 \le t \le T, \qquad -\infty < x_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, \dots, s) \tag{9}$$

с начальным условием

$$u(0,\vec{x}) = \varphi(\vec{x}), \qquad \varphi(\vec{x}) \in \mathbb{E}^\alpha_s(Q,T), \tag{10}$$

где периодическая функция $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{11}$$

является

$$u(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} b_{\vec{m}} e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{12}$$

где $u(t,\vec{x}) \in ER^\alpha_{s+1}(Q,T)$.

Доказательство см. в [2]. □

Пусть задана целочисленная решетка Λ и $M^*(\Lambda) = M^*_H(\Lambda)$ — абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решетки Λ. Согласно теореме 1 решением дискретной задачи Коши (4)–(6) с решеткой Λ является тригонометрический многочлен

$$u_\Lambda(t,\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{Q(\vec{m})t} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} = \sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) U_{\vec{y}}(t,\vec{x}),$$

где

$$c(\vec{m}) = c_{M(\Lambda),M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y}\in M(\Lambda)} \varphi(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{y})}.$$

Естественно рассматривать тригонометрический многочлен $u_\Lambda(t,\vec{x})$ как приближение к решению $u(t,\vec{x})$ задачи Коши (9)–(10). Следующая теорема отвечает на вопрос о точности этого приближения.

Теорема 4. *Для произвольной целочисленной решетки Λ для решения* (12) *задачи Коши* (9)–(10) *с функцией $\varphi(\vec{x})$, имеющей ряд Фурье* (11), *справедливо неравенство*

$$|u(t,\vec{x}) - u_\Lambda(t,\vec{x})| \le \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E^\alpha_s(Q,T)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C^m_k}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^{s} C^j_s 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s} C^j_s 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right).$$

Доказательство см. в [2]. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-00571).

Библиографический список

1. *Рябенький В. С.* Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 232–237.

2. *Родионов А. В.* О методе В. С. Рябенького – Н. М. Коробова приближенного решения уравнений с частными производными // Чебышевский сб. 2009. Т. 10, вып. 3. С. 82–96.

Solution of Partial Differential Equations by the Ryabenky Method

A. V. Rodionov

Tula State Pedagogical University, Russia, 300026, Tula, Lenina st., 125, rodionovalexandr@mail.ru

The paper discusses the generalizations of the method Ryabenky approximate solutions of partial differential equations to the case of the use of arbitrary distributions Parallelepipedal nets for integral lattices.

Key words: partial differential equation, number theoretic method.

References

1. Ryabenky V. S. A method for obtaining difference schemes andthe use of nets teoretikochislovyh for solutionthe finite difference method. *Tr. matem. in-ta im. V. A. Steklova.* [Tr. Math. Inst. V. A. Steklov], 1961, vol. 60, pp. 232–237 (in Russian).

2. Rodionov A. V. On the method of V. S. Ryabenky – N. M. Korobov approximate solutions of partial differential equations. *Chebyshevskij sbornik* [Chebyshevsky collection], 2009, vol. 10, iss. 3, pp. 82–96 (in Russian).

УДК 512.55

НОВЫЕ СВОЙСТВА МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Т. В. Скорая[1], А. В. Швецова[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, skorayatv@yandex.ru,

[2]Аспирант кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, Федеральный научно-производственный центр ОАО «Научно-производственное объединение «Марс», shvesovaav@rambler.ru

В работе представлены два новых результата, касающиеся многообразий алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики. Доказано достаточное условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница. Найден базис тождеств и базис полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, многообразие алгебр, числовые характеристики, кодлина, полилинейная компонента.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Работа посвящена изучению новых свойств многообразий алгебр Лейбница. Характеристика основного поля Φ предполагается равной нулю. Все неопределяемые понятия можно найти в работе [1]. В статье представлено два новых результата в этой области. Первый результат принадлежит А. В. Швецовой и содержит доказательство достаточного условия конечности кодлины многообразий алгебр Лейбница. Второй результат принадлежит Т. В. Скорой. В нем найден базис тождеств и базис пространства полилинейных элементов многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница.

Линейная алгебра с билинейным произведением, удовлетворяющая тождеству Лейбница $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$ называется алгеброй Лейбница. Возможно, впервые это понятие было рассмотрено в работе [2], как обобщение понятия алгебры Ли. Тождество Лейбница позволяет любой