3. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2007. 440 с. [*Polovinkin E. S., Balashov M. V.* Elements of convex and strongly convex analysis. Moscow : Fizmatlit, 2007. 440 p.]
4. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М. : Мир, 1973. 472 с. [*Rockafellar R. T.* Convex analysis. Princeton, New Jersey : Princeton university press, 1970. 472 p.]
5. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с. [*Pshenichny B. N.* Convex analysis and extremal problems. Moscow : Nauka, 1980. 320 p.]
6. *Aubin J.-P., Frankovska H.* Set-Valued Analisys. Boston; Basel; Berlin : Birkhäuser, 1990. 464 p.
7. *Aubin J.-P.* Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. of Oper. Res. 1984. Vol. 9. P. 87–111.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1975. 496 с. [*Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow : Nauka, 1975. 496 p.]

УДК 517.927.25

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КВАДРАТИЧНЫХ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет
E-mail: RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассматривается квадратичный сильно нерегулярный пучок обыкновенных дифференциальных операторов 2-го порядка с постоянными коэффициентами и с положительными корнями характеристического уравнения. Найдены суммы двукратных разложений в ряд по собственным функциям таких пучков и необходимые и достаточные условия сходимости указанных разложений к разлагаемой вектор-функции.

Ключевые слова: квадратичный пучок дифференциальных операторов, сильно нерегулярный пучок, двукратное разложение по собственным функциям.

Expansion in Eigenfunctions of Quadratic Strongly Irregular Pencils of Differential Operators of the Second Order

V. S. Rykhlov

We consider a quadratic strongly irregular pencil of 2-d order ordinary differential operators with constant coefficients and positive roots of the characteristic equation. Both the amounts of double expansions in a series in the derivative chains of such pencils and necessary and sufficient conditions for convergence of these expansions to the decomposed vector-valued function are found.

Key words: quadratic pencil of differential operators, strongly irregular pencil, two-fold expansion in the eigenfunctions.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ квадратичный пучок $L(\lambda)$ обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка при $p_j, \alpha_{\nu j}, \beta_{\nu j} \in \mathbb{C}$:

$$\ell(y,\lambda) := y'' + p_1\lambda y' + p_2\lambda^2 y, \tag{1}$$

$$U_\nu(y,\lambda) := \big(\alpha_{\nu 1}y'(0) + \lambda\alpha_{\nu 2}y(0)\big) + \big(\beta_{\nu 1}y'(1) + \lambda\beta_{\nu 2}y(1)\big) = 0, \qquad \nu = 1,2. \tag{2}$$

Обозначим через ω_1, ω_2 корни характеристического многочлена (х.м.) пучка и пусть выполняется условие

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{3}$$

Функции $y_i(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_i x)$, $i = 1,2$, образуют фундаментальную систему решений (ф.с.р.) уравнения $\ell(x,\lambda) = 0$. Считаем далее при каждом $\nu = 1,2$, что $\alpha_{\nu 1} \neq 0$ или $\beta_{\nu 1} \neq 0$. В остальных случаях рассуждения принципиально не отличаются.

Обозначим $v_{\nu j} = U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda = \alpha_{\nu 1}\omega_j + \alpha_{\nu 2}$, $w_{\nu j} = e^{-\lambda\omega_j}U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda = \beta_{\nu 1}\omega_j + \beta_{\nu 2}$, $V_j = (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j = (w_{1j}, w_{2j})^T$, $\nu, j = 1,2$; $a_{sk} = \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar s k} = \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar k} = \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar s\bar k} = \det(V_s, V_k)$, $s,k = 1,2$.

Характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ тогда имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det\big(U_\nu(y_j,\lambda)\big)_{\nu,j=1}^2 = \lambda^2\left|V_1 + e^{\lambda\omega_1}W_1; V_2 + e^{\lambda\omega_2}W_2\right| =$$

$$= \lambda^2\left(a_{\bar 1\bar 2} + e^{\lambda\omega_1}a_{1\bar 2} + e^{\lambda\omega_2}a_{\bar 1 2} + e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)}a_{12}\right) =: \lambda^2\Delta_0(\lambda).$$

Если $a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0$ и $a_{12} \neq 0$, то пучок (1), (2) является регулярным по Биркгофу [1, с. 66–67] и его функция Грина имеет оценку $O(1/\lambda)$ вне кружков фиксированного радиуса около собственных значений (с.з.). Если же $a_{12} = 0$ или $a_{12} = a_{\bar{1}2} = 0$ или симметричный случай: $a_{\bar{1}\bar{2}} = 0$ или $a_{\bar{1}\bar{2}} = a_{1\bar{2}} = 0$, то функция Грина этого пучка имеет экспоненциальный рост в углах раствора больше или равного π. Такие пучки принято называть сильно нерегулярными (с.н.).

Рассмотрим задачу нахождения условий на параметры пучка (1), (2) и на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_0, f_1)^T$, при которых имеет место двукратная разложимость f в биортогональный ряд Фурье по собственным функциям (с.ф.) этого пучка.

Эта задача интересна только для с.н. пучка (1), (2), так как в регулярном случае задача о разложении достаточно просто решается (см. [1, с. 124–129]).

Задачи о разложении для простейших с.н. дифференциальных операторов первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией были решены в [2]. В случае оператора первого порядка на разлагаемую функцию накладывались условия непрерывности, ограниченности вариации и выполнение двух простых функциональных соотношений. В случае же дифференциального оператора второго порядка на разлагаемую функцию, помимо условий гладкости на основном отрезке, накладывались условия аналитической продолжимости в некоторые треугольники и выполнение там функциональных соотношений.

В случае простейшего с.н. дифференциального оператора третьего порядка, когда корни $\{\omega_j\}$ характеристического уравнения лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в работе [3]. При этом на разлагаемую функцию накладывались условия аналитичности в некоторых многоугольниках комплексной плоскости и выполнение там некоторых функциональных соотношений.

2. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ

Обозначим для краткости $\tau = \omega_2/\omega_1$, $\alpha_x = x/\tau$, $\beta_x = \tau x + \tau + 1$, $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $e_1 = a_{\bar{1}1}/a_{\bar{1}2}$, $e_2 = a_{2\bar{2}}/a_{\bar{1}2}$, $\gamma = 1/(\omega_2 - \omega_1)$, $d_x = d/dx$.

Рассмотрим задачу на с.з. $L(\lambda) = 0$ или подробно

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = 0, \quad U_j(y, \lambda) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Пусть всюду далее выполняется условие

$$a_{12} = a_{1\bar{2}} = 0, \tag{5}$$

т. е. справедливо представление

$$\Delta_0(\lambda) = a_{\bar{1}\bar{2}} + e^{\lambda\omega_2} a_{\bar{1}2} (=: \Delta_0^-(\lambda)) = a_{\bar{1}2} e^{\lambda\omega_2} \left(1 - c_0 e^{-\lambda\omega_2}\right) = a_{\bar{1}2} e^{\lambda\omega_2} \Delta_0^+(\lambda), \tag{6}$$

и, следовательно, пучок (1), (2) является с.н.

Из (6) следует, что уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ имеет счетное число корней $\lambda_k = (2k\pi i + d_0)/\omega_2$, $k \in \mathbb{Z}$, где $d_0 := \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$). Обозначим $\Lambda := \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество ненулевых с.з. пучка $L(\lambda)$. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если $0 \in \Lambda$.

Из формул для с.з. следует, что в комплексной плоскости существуют кусочно круговые контуры Γ_ν, отстоящие от чисел λ_k на расстояние не меньше некоторого фиксированного числа $\delta > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k и имеют место оценки $c_1\nu <$ дл. $\Gamma_\nu < c_2\nu$, где c_1, c_2 есть некоторые фиксированные константы такие, что $0 < c_1 < c_2 < \infty$. Обозначим через Γ_ν^+ и Γ_ν^- части контура Γ_ν, лежащие в правой и левой комплексных полуплоскостях соответственно.

Линеаризуем задачу (4): положим $z_0 = y$, $z_1 = \lambda v_0$. Тогда получим задачу уже для линейного оператора $\hat{L}$, но в пространстве в.-ф. для $z = (z_0, z_1)^T$: $\hat{L}z = \lambda z$, где

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2} d_x^2 & -\frac{p_1}{p_2} d_x \end{pmatrix} z,$$

$$D_{\hat{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \Big| z_0', z_1 \in L_1[0,1], \quad U_j(z) = \alpha_{j1} z_0'(0) + \alpha_{j0} z_1(0) + \beta_{j1} z_0'(1) + \beta_{j0} z_1(1), \quad j = 1,2 \right\}.$$

Очевидно, с.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора $\hat{L}$ совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]) совпадает с системой с.в.-ф. оператора $\hat{L}$.

Хорошо известно, что $-\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} \hat{R}_\lambda f\, d\lambda$, где $\hat{R}_\lambda = (\hat{L} - \lambda E)^{-1}$, есть частичная сумма разложений в.-ф. f в биортогональный ряд Фурье по собственным в.-ф. оператора $\hat{L}$, соответствующим тем с.з., которые попали внутрь контура Γ_ν Пусть $\left(\hat{L} - \lambda E\right)^{-1} f = \left(z_0(x,\lambda;f), z_1(x,\lambda;f)\right)^T$ и $I_{i\nu} = -\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} z_i(x,\lambda;f)\, d\lambda$, $i = 0,1$.

Лемма 1. *Если* $f_0', f_1 \in L_1[0,1]$, $\tilde{f}(x) := -p_2 f_1(x) - p_1 f_0'(x)$ *и*

$$f_0(0) = f_0(1) = f_0'(0) = f_0'(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0, \tag{7}$$

то

$$z_0(x,\lambda;f) = \left(-\frac{a_{2\bar{2}}\gamma}{\lambda\Delta_0^-} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-t))} f_\lambda(t)\, dt + \frac{a_{\bar{1}1}\gamma}{\lambda\Delta_0^-} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t) + \omega_2 x)} f_\lambda(t)\, dt - \right.$$

$$\left. -\frac{a_{\bar{1}2}\gamma}{\lambda\Delta_0^-} \int_0^1 e^{\lambda(\omega_2 x + \omega_2(1-t))} f_\lambda(t)\, dt \right) - \left(\frac{\gamma}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda\omega_1(x-t)} f_\lambda(t)\, dt - \frac{\gamma}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda\omega_2(x-t)} f_\lambda(t)\, dt \right), \tag{8}$$

$$z_1(x,\lambda;f) = \lambda z_0(x,\lambda;f) + f_0(x), \tag{9}$$

где

$$f_\lambda(x) := \tilde{f}(x) - \lambda p_2 f_0. \tag{10}$$

Доказательство. Обратим оператор $(\hat{L}-\lambda E)$. Для этого решим задачу $(\hat{L}-\lambda E)z = f$ относительно в.-ф. z или, подробнее, решим задачу

$$\begin{cases} z_1 - \lambda z_0 = f_0, \\ \dfrac{1}{p_2} z_0'' - \dfrac{p_1}{p_2} z_1' - \lambda z_1 = f_1, \end{cases} \qquad U_j(z) = 0. \quad j = 1,2. \tag{11}$$

Выражая z_1 из первого уравнения системы в (11) и подставляя во второе (здесь требуется гладкость функции f_0) с учетом предположений (7) для нахождения z_0, получим следующую краевую задачу для линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами с ф.с.р. $y_i(x,\lambda)$, $i = 1,2$:

$$\ell(z_0,\lambda) = f_\lambda(x), \qquad U_j(z_0,\lambda) = 0, \qquad j = 1,2.$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных находим общее решение дифференциального уравнения, затем находим неизвестные константы из краевых условий и в результате получаем (8). Формула (9) есть простое следствие первого соотношения в системе (11). □

Пусть $K_\delta(\lambda_k)$ есть круги радиуса δ с центрами в λ_k и $\mathbb{C}_\delta = \mathbb{C} \setminus (\cup_{k\in\mathbb{Z}} K_\delta(\lambda_k))$. Обозначим через $\mathbb{C}_\delta^+$ ($\mathbb{C}_\delta^-$) части $\mathbb{C}_\delta$, лежащие в правой (левой) полуплоскости.

Лемма 2. *Существует такая положительная константа* C_δ*, что*

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{C}_\delta^- : \quad |\Delta_0^-(\lambda)| \ge C_\delta; \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{C}_\delta^+ : \quad |\Delta_0^+(\lambda)| \ge C_\delta. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\lambda \in \mathbb{C}_\delta^-$. Если $\operatorname{Re}\lambda \le -N$, то из (6) получим $|\Delta_0^-(\lambda)| \ge$ $\ge |a_{\bar{1}\bar{2}}|/2$ при N достаточно большом и таком, что $\Lambda \cap \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda \le -N\} = \emptyset$. Если же $-N \ge \operatorname{Re}\lambda \le 0$, то пользуясь периодичностью $\Delta_0^-(\lambda)$ и тем фактом, что $\Delta_0^-(\lambda) \ne 0$ при $\lambda \in \mathbb{C}_\delta^-$, аналогично [1, с. 74–84] получим $|\Delta_0^-(\lambda)| \ge C_{\delta,N} > 0$. Фиксируя N и объединяя две полученные оценки снизу, получим первое утверждение (12) леммы. Случай $\lambda \in \mathbb{C}_\delta^+$ рассматривается аналогично. □

Лемма 3. *Если* $\gamma(x,t)=\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 t$ $(\gamma_2\neq 0)$ *и* $\gamma(x,t)\operatorname{Re}\lambda\le 0\ \forall\ \lambda\in\Gamma_\nu^+(\Gamma_\nu^-)$ *при* $x\in[0,1]$, $t\in[a(x),b(x)]$, *где* $a(x)$, $b(x)$ — *заданные линейные функции,* $h\in L_p[0,1]$, $p>1$, $\chi_p(\nu)=\nu^{1/p}$ *при* $1<p<\infty$ *и* $\chi_\infty(\nu)=\ln\nu$ *при* $p=\infty$, *то*

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu{}^+(\Gamma_\nu^-)}\left(\int_{a(x)}^{b(x)}e^{\gamma(x,t)\lambda}h(t)\,dt\right)d\lambda\right|\le C\|h\|_p\chi(\nu). \qquad (13)$$

Доказательство. Обозначим $q=p/(p-1)$ и рассмотрим интеграл по Γ_ν^+ (интеграл по Γ_ν^- оценивается аналогично). Оценивая модуль интеграла в (13) через интеграл от модуля, применяя неравенство Гельдера к интегралу по t и делая вполне очевидные оценки и замену переменной, получим оценки

$$C\|h\|_p\left|\int_{\Gamma_\nu{}^+}\left(\frac{1-\exp(\eta\operatorname{Re}\lambda)}{\operatorname{Re}\lambda}\right)^{1/q}|d\lambda|\right|\le C\|h\|_p\int_0^{c_1|\eta|\pi\nu/2}\left(\frac{1-\exp(-\xi)}{\xi}\right)^{1/q}d\xi\le C\|h\|_p\chi_p(\nu),$$

где $\eta<0$ есть число, выражающееся через параметры леммы. □

Отметим, что аналогичные оценки впервые использовались в [4].

Теорема 1. *Если* $f_0'',f_1'\in L_p[0,1]$, $p>1$, *и выполняются условия* (3), (5), (7), *то*

$$I_{0\nu}(f)=f_0(x)+\gamma\Big(e_2\omega_2 f_0(\alpha_x)-e_1\omega_1 f_0(\beta_x)+\omega_1 f_0(x)\Big)+$$
$$+\gamma p_2\Big(e_2F_1(\alpha_x)-e_1F_1(\beta(x))+F_1(x)\Big)+o(1)\qquad \textit{при}\qquad \nu\to\infty, \qquad (14)$$
$$I_{1\nu}(f)=f_1(x)-\gamma\Big(e_2\omega_1 f_1(\alpha_x)-e_1\omega_2 f_1(\beta_x)+\omega_2 f_1(x)\Big)+$$
$$+\gamma\Big(e_2f_0'(\alpha_x)-e_1f_0'(\beta_x)+f_0'(x)\Big)+o(1)\qquad \textit{при}\qquad \nu\to\infty, \qquad (15)$$

где $F_1(x)=\int_0^x f_1(t)\,dt$ *и* $o(1)\rightrightarrows 0$ *по* $x\in[0,1]$. *В формулах* (14), (15) *функции полагаются продолженными нулями, если аргументы выходят за отрезок* $[0,1]$.

Доказательство. Обозначим через $A_1(x,\lambda;f(\cdot,\lambda))$ и $a_1(x,\lambda;f(\cdot,\lambda))$ выражения, стоящие в первых и вторых больших круглых скобках справа от равенства в (8) соответственно. С учетом (10) получим представление

$$z_0(x,\lambda;f)=A_1(x,\lambda;\tilde f)-a_1(x,\lambda;\tilde f)-\lambda p_2A_1(x,\lambda;f_0)+\lambda p_2a_1(x,\lambda;f_0).$$

Здесь $\lambda p_2a_1(x,\lambda;f_0)$ есть целая аналитическая функция, $a_1(x,\lambda;\tilde f)$ есть аналитическая функция во всей комплексной плоскости за исключением точки $\lambda=0$, в которой она имеет формально полюс первого порядка, а вычет равен нулю. Следовательно,

$$I_{0\nu}(f)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}A_1(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}a_1(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}\lambda p_2A_1(x,\lambda;f_0)\,d\lambda-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}\lambda p_2a_1(x,\lambda;f_0)\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}A_1(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu}\lambda p_2A_1(x,\lambda;f_0)\,d\lambda=$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_\nu^+}+\int_{\Gamma_\nu^-}\right)A_1(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_\nu^+}+\int_{\Gamma_\nu^-}\right)\lambda p_2A_1(x,\lambda;f_0)\,d\lambda=\sum_{j=1}^4 I_{0\nu}^j. \qquad (16)$$

По условию $f_0,f_0'\in L_\infty[0,1]$ и вещественные части показателей экспонент в $I_{0\nu}^2$ не положительны. Тогда по лемме 2 и 3 получим:

$$I_{0\nu}^2=O(\chi_\infty(\nu)/\nu)=O(\ln\nu/\nu)=o(1)\quad \text{при}\quad \nu\to\infty. \qquad (17)$$

Чтобы подсчитать $I_{0\nu}^4$, преобразуем $\lambda p_2A_1(x,\lambda;f_0)$, интегрируя по частям и используя условие (7). Будем иметь:

$$\lambda p_2A_1(x,\lambda;f_0)=-\frac{a_{2\bar 2}p_2\gamma}{\lambda\omega_2\Delta_0}\int_0^1 e^{\lambda(\omega_1x+\omega_2(1-t))}f_0'(t)\,dt+\frac{a_{\bar 1 1}p_2\gamma}{\lambda\omega_1\Delta_0}\int_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2x)}f_0'(t)\,dt-$$

$$-\frac{a_{\bar{1}2}p_2\gamma}{\lambda\omega_2\Delta_0}\int_0^1 e^{\lambda(\omega_2 x+\omega_2(1-t))}f_0'(t)\,dt.$$

Отсюда аналогично (17) на основании лемм 2 и 3 получим:

$$I_{0\nu}^4 = O(\chi_\infty(\nu)/\nu) = o(1) \quad \text{при } \nu\to\infty. \tag{18}$$

Для подсчета $I_{0\nu}^1$ преобразуем $A_1(x,\lambda;\tilde f)$. Используем представление $\Delta_0(\lambda)$ через $\Delta_0^+(\lambda)$ (см. (6)), умножаем коэффициенты перед интегралами на $1=\Delta_0^+ + c_0e^{-\lambda\omega_2}$ и разбиваем каждый интеграл в соответствии с этим представлением. Кроме того, разбиваем интегралы на сумму интегралов по отрезкам, на которых показатели экспонент имеют знакоопределенную вещественную часть. Получим:

$$A_1(x,\lambda;\tilde f) = \Bigg(-\frac{e_2\gamma}{\lambda}\int_{\alpha_x}^1 e^{\lambda(\omega_1 x-\omega_2 t)}\tilde f(t)\,dt + \frac{e_1\gamma}{\lambda}\int_{\beta_x}^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2(x-1))}\tilde f\,dt -$$
$$-\frac{\gamma}{\lambda}\int_x^1 e^{\lambda\omega_2(x-t)}\tilde f(t)\,dt + \frac{e_2c_0\gamma}{\lambda\Delta_0^+}\int_0^1 e^{\lambda(\omega_1 x-\omega_2(1+t))}\tilde f(t)\,dt - \frac{e_2c_0\gamma}{\lambda\Delta_0^+}\int_0^1 e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2(x-2))}\tilde f(t)\,dt +$$
$$+\frac{c_0\gamma}{\lambda\Delta_0^+}\int_0^1 e^{\lambda\omega_2(x-t-1)}\tilde f(t)\,dt\Bigg) + \Bigg(-\frac{e_2\gamma}{\lambda}\int_0^{\alpha_x} e^{\lambda(\omega_1 x-\omega_2 t)}\tilde f(t)\,dt + \frac{e_1\gamma}{\lambda}\int_0^{\beta_x} e^{\lambda(\omega_1(1-t)+\omega_2(x-1))}\tilde f\,dt -$$
$$-\frac{\gamma}{\lambda}\int_0^x e^{\lambda\omega_2(x-t)}\tilde f(t)\,dt\Bigg) = A_{11}(x,\lambda;\tilde f) + A_{12}(x,\lambda;\tilde f). \tag{19}$$

Так как в интегралах в $A_{11}(x,\lambda;\tilde f)$ показатели экспонент имеют неположительные вещественные части, то, как и до этого, на основании лемм 2 и 3 получим:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu^+} A_{11}(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda = o(1) \quad \text{при} \quad \nu\to\infty. \tag{20}$$

Что касается слагаемого $A_{12}(x,\lambda;\tilde f)$ в (19), то контурный интеграл от него можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu^+} A_{12}(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_\nu} - \int_{\Gamma_\nu^-}\right) A_{12}(x,\lambda;\tilde f)\,d\lambda\,.$$

Интеграл по Γ_ν считается как вычет в простом полюсе $\lambda=0$. Интеграл по Γ_ν^- оценивается по лемме 3 аналогично предыдущему, так как на Γ_ν^- показатели экспонент имеют уже неположительные вещественные части. Тогда с учетом предположений (7) теоремы, соотношения (19) и формулы (20) в результате получим при $\nu\to\infty$:

$$I_{0\nu}^1 = -\gamma p_2\Big(e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta(x)) + F_1(x)\Big) - \gamma p_1\Big(e_2 f_0(\alpha_x) - e_1 f_0(\beta_x) + f_0(x)\Big) + o(1). \tag{21}$$

Рассмотрим теперь слагаемое $I_{0\nu}^3$ в формуле (16). Оно отличается от слагаемого $I_{0\nu}^1$ тем, что отсутствует параметр λ в знаменателе. Но если провести в $I_{0\nu}^3$ внутри в интегралах по t один раз интегрирование по частям, воспользовавшись гладкостью f_0 и тем, что выполняются предположения (7), то получим контурный интеграл, который можно сосчитать совершенно аналогично интегралу $I_{0\nu}^1$. Проводя эти вычисления и опуская подробности, получим при $\nu\to\infty$:

$$I_{0\nu}^3 = -\gamma p_2\Big(\frac{e_2}{\omega_2}f_0(\alpha_x) + \frac{e_1}{\omega_1}f_0(\beta_x) + \frac{1}{\omega_2}f_0(x)\Big) + o(1). \tag{22}$$

Подставляя (17), (18), (21) и (22) в (16), получим утверждение (14) теоремы.

Для получения формулы (15) сразу провести рассуждения, аналогичные тем, при помощи которых была получена формула (14), не представляется возможным из-за дополнительного множителя λ в числителе в подинтегральном выражении $I_{1\nu}$. Предварительно нужно во всех интегралах по переменной t, входящих в $z_1(x,\lambda;f)$, провести одно интегрирование по частям и воспользоваться условием (7) и соответствующей гладкостью функций f_0 и f_1. А далее проводим рассуждения, полностью аналогичные предыдущим, и получаем формулу (15). □

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Для того, чтобы имели место формулы при* $\nu \to \infty$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} v_0(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_0(x)+o(1), \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} v_1(x,\lambda;f)\,d\lambda = f_1(x)+o(1), \tag{23}$$

необходимо и достаточно, чтобы функции f_0, f_1 *удовлетворяли системе уравнений:*

$$\begin{cases} \Big(e_2\omega_2 f_0(\alpha_x) - e_1\omega_1 f_0(\beta_x) + \omega_1 f_0(x)\Big) - p_2\Big(e_2F_1(\alpha_x) - e_1F_1(\beta_x) + F_1(x)\Big) = 0, \\ \Big(e_2\omega_1 f_1(\alpha_x) - e_1\omega_2 f_1(\beta_x) + \omega_2 f_1(x)\Big) - \Big(e_2f_0'(\alpha_x) - e_1f_0'(\beta_x) + f_0'(x)\Big) = 0. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение (ввиду нулевых начальных условиях получим эквивалентное уравнение) и анализируя полученную систему, без труда получим простое условие разложимости вектора $(f_0, f_1)^T$ по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 1 *и* $e_2 = 0$ *(это эквивалентно условию* $a_{2\bar{2}} = 0$*). Для того, чтобы имели место формулы* (23)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* $f_0'(x) = \omega_2 f_1(x)$ *для всех* $x \in [0,1]$.

Из полученных результатов видно, что когда корни х.м. лежат на одном луче, для разложимости функции в ряд по с.ф. пучка $L(\lambda)$ в с.н. случае так же, как и в случае оператора первого порядка, рассмотренного в [2], не требуется аналитичности разлагаемой функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. [*Naimark M. A.* Linear Differential Operators. Parts I. New York : Ungar Publ. Co., 1967; *Naimark M. A.* Linear Differential Operators. Parts II. New York : Ungar Publ. Co., 1968.]

2. *Гуревич А. П., Хромов А. П.* Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 3–15. [*Gurevich A. P., Khromov A. P.* First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign // Math. Notes. 1994. Vol. 56, iss.1. P. 653—661.]

3. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182–193. [*Khromov A. P.* Expansion in eigenfunctions a boundary value problem of the third order // Issledovaniya po teorii operatorov. Ufa, 1988. P. 182–193.]

4. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405. [*Hromov A. P.* Equiconvergence theorems for integrodifferential and integral operators // Math. USSR Sb. 1982. Vol. 42, iss. 3. P. 331–355.]

УДК 517.53/54

СЧЕТНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ НЕ ГОМЕОМОРФНА НЕСЧЕТНОСВЯЗНОЙ

В. В. Старков

Петрозаводский государственный университет
E-mail: VstarV@list.ru

В 1923 году Керекьярто доказал, что счетносвязная область не гомеоморфна несчетносвязной. В этой заметке дано другое доказательство этого факта с использованием методов комплексного анализа.

Ключевые слова: гомеоморфизмы бесконечносвязных областей.

A Countably Connected Domain is not Homeomorphic to an Uncountably Connected Domain

V. V. Starkov

In 1923 Керекьярто proved, that a countably connected domain is not homeomorphic to an uncountaby connected domain. We give another proof of this statement.

Key words: homeomorphism of multy connected domains.

Под *континуумом*, как обычно, будем понимать связное замкнутое подмножество расширенной плоскости. Граничной компонентой области D называется каждый континуум $K \subset \partial D$, обладающий тем свойством, что любой континуум $K' \subset \partial D$, $K' \supset K$, совпадает с K.