ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная новая модификации метода глобального улучшения управления позволяет проводить расчеты по улучшению управления для задач большой размерности. Проведенные тестовые вычислительные эксперименты, в том числе для задачи управления квантовой системой с дискретным спектром, с помощью программной реализации разработанного метода на языке программирования C++, позволяют сделать вывод об эффективности метода для рассматриваемого класса задач управления гамильтоновыми системами с переменными коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 12-01-00256).

Библиографический список

1. *Boussaid N., Caponigro M., Chambrion T.* Periodic control laws for bilinear quantum system with discrete spectrum. 2011. URL : http://arXiv.org/pdf/1111.4550v1.

2. *Кротов В. Ф., Фельдман И. Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168. [*Krotov V. F., Feldman I. N.* Iterative method for solving optimal control problems // Izv. AS USSR. Techn. Cybern. 1983. № 2. P. 160–168.]

3. *Кротов В. Ф., Булатов А. В., Батурина О. В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // Автомат. и телемех. 2011. № 6. С. 64–78. [*Krotov V. F., Bulatov A. V., Baturina O. V.* Optimization of linear systems with controllable coefficients // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 6. P. 1199–1212.]

4. *Трушкова Е. А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // Автомат. и телемех. 2011. № 6. С. 151–159. [*Trushkova E. A.* Global control improvement algorithms // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, iss. 6. P. 1282–1290.]

УДК 591.65

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЕМЕЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА

И. А. Шакиров

Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов
E-mail: iskander@tatngpi.ru

Для семейства интерполяционных полиномов Лагранжа, определенных в четном числе узлов, получены различные явные (безмодульные) виды функций Лебега. Последние разбиты на непересекающиеся классы, которые затем последовательно исследованы с использованием элементов дифференциального исчисления. Установлена взаимосвязь между функциями, а также константами Лебега из этих классов.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы Лагранжа, обобщенное ядро Дирихле, функции и константы Лебега.

About the Fundamental Characteristics of the Lagrange Interpolation Polynomials Family

I. A. Shakirov

For the Lagrange interpolation polynomials family, determined in the even number of nodes, it is obtained various explicit (unmodulus) forms of the Lebesque functions. They are divided into uncrossing classes, which are consecutively studied using the elements of differential calculus then. The interdependence is established between the functions, as so as between the Lebesque constants from these classes.

Key words: Lagrange trigonometric polynomials, generalized Dirichlet kernel, Lebesque functions and constants.

ВВЕДЕНИЕ

В математической литературе до сих пор не проведено исследование аппроксимативных возможностей семейства интерполяционных полиномов Лагранжа [1]

$$\Phi_n(x,t,\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k)D_n^*(t_k - t) + \alpha \sin nt, \qquad D_n^*(u) = \frac{\sin nu}{2\,\mathrm{tg}(u/2)}, \tag{1}$$

в зависимости от поведения параметра α ($\alpha \in R$), в частности, в классическом пространстве непрерывных 2π-периодических функций $C_{2\pi} = C[0, 2\pi]$. Такая возможность появилась после моноядерного описания [2] полиномов (1) в виде

$$\Phi_n^c(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x(t_k)D_n^c(t_k - t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k)D_n^c(t_k - t), \qquad c \in R, \quad t \in [0, 2\pi], \tag{2}$$

где $D_n^c(u) = \dfrac{1}{2}\sin nu\left(\operatorname{ctg}\dfrac{u}{2} - c\right)$ — обобщенное ядро Дирихле (при $c = 0$ выполняется равенство $D_n^0(u) = D_n^*(u)$); параметры α, c связаны соотношением $\alpha = \dfrac{c}{2n}\sum\limits_{k=0}^{2n-1}(-1)^k x(t_k)$; $x(t) \in C_{2\pi}$ — заданная функция, интерполируемая в четном числе равномерно распределенных на отрезке $[0, 2\pi]$ узлов

$$t_k = t_k(n) = \pi k/n, \qquad k = \overline{0, 2n-1} \vee k = \overline{1, 2n}, \qquad n \in N. \tag{3}$$

Нахождению верхних и нижних оценок для функций и констант Лебега в различных функциональных пространствах, а также исследованию асимптотического поведения неограниченно возрастающих констант посвящено множество работ (см. монографии И. П. Натансона [3], Н. П. Корнейчука [4], В. К. Дзядыка [5], С. Б. Стечкина и Ю. Н. Субботина [6], К. И. Бабенко [7] и др.). Используя содержащуюся в них методологию получения и исследования фундаментальных характеристик интерполяционных процессов, в работе [2] получены соответствующие $\Phi_n^c(x,t)$ модульные выражения функций Лебега:

$$\lambda_n^c(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}|D_n^c(t_k - t)| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^c(t_k - t)|, \qquad c \in R, \qquad t \in \tilde{T} = [0, \pi/n]. \tag{4}$$

Заметим, что при значении параметра $c = 0$ в (2) и (4) имеем общеизвестный полином, имеющий минимальную норму в пространстве суммируемых с квадратом функций, и соответствующие ему фундаментальные характеристики:

$$\Phi_n^*(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^*(t_k - t), \qquad \lambda_n^*(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^*(t_k - t)|, \qquad \lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi.$$

Здесь неизвестными оставались безмодульный вид функции

$$\lambda_n^*(t) = \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right),$$

многие ее свойства [8]. В связи с этим в работе [5, с.43] не было полной строгости в доказательстве формулы для константы λ_n^*, точнее говоря, не установлено выполнение достаточного условия экстремума в рассматриваемой стационарной точке.

Ниже функции (4) предварительно разбиты (для удобства изучения) на три непересекающихся класса $\Phi^0 = \{\lambda_n^*(t) |\, \lambda_n^*(t) \equiv \lambda_n^0(t),\ c = 0\}$, $\Phi^+ = \{\lambda_n^c(t) |\, c > 0\}$, $\Phi^- = \{\lambda_n^{-c}(t) |\, c > 0\}$, которые затем подробно исследованы (Φ^0 исследован в [8]), используя при этом различные безмодульные виды этих функций и аппарат дифференциального исчисления. Далее, между графиками двух функций $\lambda_n^c(t) \in \Phi^+$ и $\lambda_n^{-c}(t) \in \Phi^-$ (c — произвольно фиксированное неотрицательное число) установлена тесная взаимосвязь, которая позволила существенно сократить объем проделанной в п. 2 технической работы при изучении класса Φ^-.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА Φ^+

Необходимым условием для исследования функций из класса Φ^+ является исключение модулей из состава обобщенного ядра Дирихле в формуле (4), используя при этом более тонкие свойства ядра $D_n^c(u)$ ($c > 0$, $u \in [0, 2\pi]$) и входящих в него функций. С целью получения более простых явных видов функций $\lambda_n^c(t)$ предварительно введем условие согласования параметров $n \geq 2$ и $c > 0$:

$$n^* = \frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c \qquad \left(n^* = n^*(n,c) = \left[\frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right], \quad [z] \text{— целая часть } z\right). \tag{5}$$

Заметим, что условие (5) определяет индекс одного из внутренних узлов интерполяции из множества (3), т.е.

$$t_{n^*} = 2\operatorname{arcctg} c \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{ctg}(t_{n^*}/2) = c, \qquad c > 0, \quad n \geq 2. \tag{6}$$

Эта равносильность имеет место, например, при выполнении равенства $c = \operatorname{ctg}(\pi/2m)$ (m — произвольный делитель числа $n \geq 2$); при этом соотношения (5) и (6) эквивалентны.

Теорема 1. *При выполнении условия* (5) *функции Лебега* $\lambda_n^c(t) \in \Phi^+$ $(n \geq 2)$, *определенные в узлах* (3), *на общем периоде* $\tilde{T} = [0, \pi/n]$ *представимы в явных видах:*

$$\lambda_n^c(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\right] \tag{7}$$

или

$$\lambda_n^c(t) = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right), \tag{8}$$

являются строго возрастающими в промежутке $[0, t_n^0)$ *и строго убывающими в* $(t_n^0, \pi/n]$ *функциями, в точках* $t_n^0 = t_n^0(c) \in (0, \pi/2n)$ *достигают своих максимальных значений* $\lambda_n^c = \max\limits_{t\in[0,\pi/n]} \lambda_n^c(t) = \max\limits_{t\in[0,\pi/2n]} \lambda_n^c(t) = \lambda_n^c(t_n^0)$ *и имеют область значений* $[1, \lambda_n^c]$; *являются выпуклыми на периоде* $\tilde{T}$ *при выполнении дополнительных условий согласования параметров* n *и* c *вида*

$$\left(\left[\frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right] = \frac{2n}{\pi}\operatorname{arcctg} c\right) \wedge (c < n/2), \qquad c > 0, \quad n \geq 2. \tag{9}$$

Доказательство. Предварительно отметим, что при $n = 1$ и выполнении условия (9) получим $\lambda_1^c(t) = \lambda_1^*(t) = 1$ при всех $t \in \tilde{T}$.

Упростим функцию Лебега (4), используя условие (5) и поведения графиков функций $y = \sin nu$, $y = \left|\operatorname{ctg}\frac{u}{2} - c\right|$ $(u \in [0, 2\pi])$ при сдвигах их аргументов вида $u = t_k - t$ $(t \in \tilde{T},\ t_k = \pi k/n,\ k = \overline{1, 2n})$:

$$\lambda_n^c(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin n(t_k - t)\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right)\right| = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left|\sin(\pi k - nt)\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}|\sin nt|\left|\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right| = \frac{\sin nt}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right)\operatorname{sign}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right) =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} - c\right) + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(-\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} + c\right) + \sum_{k=n+1}^{2n}\left(-\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} + c\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\right].$$

Таким образом, доказана справедливость формулы (7), когда между вполне определенным узлом интерполяции из множества (3) и положительной постоянной c имеется зависимость вида (6).

Далее преобразуем выражение (7):

$$\lambda_n^c(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n-n^*)\right] =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n} 2\operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2} + \sum_{k=n^*+1}^{n} 2c\right] =$$

$$= \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right), \qquad t \in \tilde{T}.$$

Первая составляющая последней суммы достаточно полно изучена в работе [8]. По аналогичной схеме исследуем (более простую, чем $\lambda_n^*(t)$) ее вторую составляющую

$$\psi_n(t) \equiv b_n(t)\sin nt = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right)\right]\sin nt, \quad t \in \tilde{T} = [0, \pi/2n] \cup (\pi/2n, \pi/n].$$

Для ее производных $\psi'_n(t) = b'_n(t)\sin nt + n\cos nt b_n(t)$ $(t \in \tilde{T})$ и $\psi''_n(t) = b''_n(t)\sin nt + 2n\cos nt b'_n(t) - n^2 \sin nt b_n(t)$ $(t \in \tilde{T})$

– на отрезке $[0, \pi/2n]$ верны соотношения

$$\psi_n(t) > 0 \quad \forall\, t \in \left(0, \frac{\pi}{2n}\right], \quad \psi_n(0) = 0, \quad \psi_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{2k-1}{4n}\pi\right) > 0,$$

$$\psi'_n(0) = \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{k}{2n}\pi\right) > 0, \quad \psi'_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{2k-1}{4n}\pi < 0,$$

$$\psi''_n(t) < 0 \quad \forall\, t \in [0, \pi/2n]\,;$$

— на второй составляющей $(\pi/2n, \pi/n]$ основного периода $\tilde{T}$ имеем:

$$\psi_n(t) > 0 \quad \forall\, t \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right), \quad \psi_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0, \quad \psi'_n(t) < 0 \quad \forall\, t \in \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right],$$

$$\psi''_n(0) = -\sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi k}{2n} < 0, \quad \psi''_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{k=n^*+1}^{n}\operatorname{cosec}^2\frac{k-1}{2n}\pi > 0.$$

Результаты второй части теоремы получаются теперь после дополнительных расчетов и рассуждений, если использовать при этом формулу (8), условия (5) и (9), известные и установленные выше свойства функций $\lambda^*_n(t)$, $\psi_n(t)$ $(t \in \tilde{T})$, а также следующие соотношения:

$$(\lambda^c_n)'(0) > 0, \quad (\lambda^c_n)'\left(\frac{\pi}{2n}\right) < 0, \quad (\lambda^c_n)'\left(\frac{\pi}{n}\right) < 0,$$

$$(\lambda^c_n)''(0) < 0, \quad (\lambda^c_n)''\left(\frac{\pi}{2n}\right) < 0, \quad (\lambda^c_n)''\left(\frac{\pi}{n}\right) < 0,$$

где последнее неравенство имеет место лишь при выполнении условия (9).

2. О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА Φ^-

Исследование поведения функций Лебега из класса Φ^- проведем по следующей схеме:

1) произвольную функцию из Φ^- предварительно выразим через функцию, принадлежащую классу Φ^+;

2) на основе установленной взаимосвязи между функциями из классов Φ^- и Φ^+, а также известных свойств $\lambda^c_n(t) \in \Phi^+$ (см. теорему 1), без больших усилий получим выводы о поведении функций $\lambda^{-c}_n(t) \in \Phi^-$;

3) затем, используя результаты пунктов 1), 2) и теоремы 1, определим явный вид функций $\lambda^{-c}_n(t) \in \Phi^-$.

Теорема 2. *Для функций $\lambda^{-c}_n(t) \in \Phi^-$, $\lambda^c_n(t) \in \Phi^+$ и соответствующих им констант Лебега λ^{-c}_n, λ^c_n справедливы соотношения*

$$\lambda^{-c}_n(t) = \lambda^c_n\left(\frac{\pi}{n} - t\right), \quad t \in \tilde{T}, \quad \lambda^{-c}_n = \lambda^c_n \quad \forall\, c > 0,\ n \geq 2; \tag{10}$$

а для функций из класса Φ^- верны представления

$$\lambda^{-c}_n(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right], \qquad t \in \tilde{T}, \tag{11}$$

$$\lambda^{-c}_n(t) = \lambda^*_n(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_{k-1}+t}{2}\right), \qquad t_k = \pi k/n, \quad n \geq 2. \tag{12}$$

Доказательство. 1. Предварительно установим зависимости, существующие между обобщенными ядрами Дирихле $D^{\pm c}_n(u)$, определяющими функции Лебега из классов $\Phi^{\pm}$:

$$D^c_n(u) = D^c_n(2\pi + u), \qquad D^{-c}_n(u) = \frac{\sin nu}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{u}{2} + c\right),$$

$$D_n^{-c}(u) = \frac{\sin n(-u)}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{-u}{2} - c\right) = D_n^{-c}(u) \quad \Rightarrow \quad D_n^{-c}(u) = D_n^c(2\pi - u).$$

Используя последнее равенство, после некоторых преобразований получим справедливость первой части формулы (10):

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^{-c}(t_k - t)| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}|D_n^c(2\pi - (t_k - t)| =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left|D_n^c\left(t_{2n+1-k} - \left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right)\right| = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{2n}\left|D_n^c\left(t_j - \left(\frac{\pi}{n} - t\right)\right)\right| = \lambda_n^c\left(\frac{\pi}{n} - t\right).$$

2. Теперь можем утверждать, что графики двух произвольно выбранных функций $\lambda_n^{-c}(t)$, $\lambda_n^c(t)$ $(c > 0)$ из соответствующих классов $\Phi^{\pm}$ являются зеркальными отображениями друг друга относительно прямой $t - \pi/2n = 0$, проходящей через центр их общего периода $\tilde{T}$, параллельно оси ординат. При этом соответствующие им константы Лебега λ_n^{-c} и λ_n^c естественно равны, что и завершает доказательство второй части формулы (10). Следовательно, учитывая установленную выше симметричность графиков функций $\lambda_n^{-c}(t)$ и $\lambda_n^c(t)$, все утверждения предыдущей теоремы с несущественными поправками переносятся на рассматриваемый здесь случай; при этом явные виды $\lambda_n^{-c}(t)$, $\lambda_n^c(t)$ $(c > 0)$ будут различными.

3. Используя формулы (7) и (10), установим явный вид функции $\lambda_n^{-c}(t) \in \Lambda^-$:

$$\lambda_n^{-c}(t) = \lambda_n^c\left(\frac{\pi}{n} - t\right) = \frac{\sin n(\pi/n - t)}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + (\pi/n - t)}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - (\pi/n - t)}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + (\pi/n - t)}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - (\pi/n - t)}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right] =$$

$$= \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2c(n - n^*)\right].$$

Итак, справедливость формулы (11) доказана. Проведя несложные преобразования в (11), получим формулу (12):

$$\lambda_n^{-c}(t) = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n^*}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n^*+1}^{n} 2c\right] = \frac{\sin nt}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} + \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n^*+1}^{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2} - \operatorname{ctg}\frac{t_k - t}{2}\right) + 2\sum_{k=n^*+1}^{n} c\right] = \lambda_n^*(t) + \frac{\sin nt}{n}\sum_{k=n^*+1}^{n}\left(c - \operatorname{ctg}\frac{t_{k-1} + t}{2}\right).$$

Примечание. Если в условиях теорем 1 и 2 положим $c = 0$, то получим функцию $\lambda_n^*(t) \in \Phi^0$. При этом результаты теорем относительно данной функции полностью согласуются с известными результатами работ [2] и [8].

Библиографический список

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 2. М. : Мир, 1965. [*Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. 2. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1968.]

2. *Шакиров И. А.* О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ // Изв. вузов. Математика. 2010. № 10. С. 60–68. [*Shakirov I. A.* The Lagrange trigonometric interpolation polynomial with the minimal norm considered as an operator from $C_{2\pi}$ to $C_{2\pi}$ // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2010. Vol. 54, № 10. P. 52–59.]

3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М. : Гостехиздат, 1949. [*Natanson I. P.* Constructive function theory. Vol. 1–3. New York : F. Ungar Publishing Co., 1964–1965.]

4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории

приближения. М. : Наука, 1987. [*Korneichuk N. P.* Exact Constants in Approximation Theory. Moscow : Nauka,1987.]
5. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988. [*Dzyadyk V. K.* Approximation methods for solving differential and integral equations. Kiev : Naukova Dumka, 1988.]
6. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976. [*Stechkin S. B., Subbotin Yu. N.* Splines in Computational Mathematics. Moscow : Nauka, 1976.]
7. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002. [*Babenko K. I.* Fundamentals of Numerical Analysis. Moscow; Izhevsk : NIC Regular and chaotic dynamics, 2002.]
8. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 80–88. [*Shakirov I. A.* A complete description of the Lebesgue functions for classical lagrange interpolation polynomials // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2011. Vol. 55, № 10. P. 70–77.]

УДК 517.518.82

КОНЕЧНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

Т. И. Шарапудинов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: sharapudinov@gmail.com

В настоящей работе построены новые конечные ряды, так называемые конечные предельные ряды по полиномам Чебышева (Хана), ортогональным на равномерной сетке, которые совпадают в концевых точках $x = 0$ и $x = N-1$ с исходной функцией $f(x)$. Конструкция конечных предельных рядов основана на предельном переходе при $\alpha \to -1$ конечных рядов Фурье $\sum_{k=0}^{N-1} f_k^{\alpha} \tau_k^{\alpha,\alpha}(x,N)$ по полиномам Чебышева (Хана) $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x,N)$, ортонормированным на равномерной сетке $\{0,1,\ldots,N-1\}$.

Ключевые слова: конечные ряды Фурье, ортогональные полиномы.

Finite Limit Series on Chebyshev Polynomials, Orthogonal on Uniform Nets

T. I. Sharapudinov

In the paper we construct new series, called finite limit series on Chebyshev (Hahn) polynomials $\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$, orthogonal on uniform net $\{0,1,\ldots,N-1\}$. Their partial sums $S_n(f;x)$ equal in boundary points $x = 0$ и $x = N-1$ with approximated function $f(x)$. Construction of finite limit series based on the passage to the limit with $\alpha \to -1$ of Fourier series $\sum_{k=0}^{N-1} f_k^{\alpha} \tau_k^{\alpha,\alpha}(x,N)$ on Chebyshev (Hahn) polynomials $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x,N)$, orthonormal on uniform net $\{0,1,\ldots,N-1\}$.

Key words: Fourier series, orthogonal polynomials.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах, связанных с обработкой временных рядов и изображений, возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, затем аппроксимировать его покусочно. Тогда в местах стыка, как правило, возникают нежелательные разрывы. Такая картина непременно возникает при использовании для приближения участков исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам, например полиномам Чебышева, ортогональным на равномерных сетках. Остановимся на этом случае более подробно.

Через $\tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ мы обозначим классические полиномы Чебышева [1], которые при $\alpha,\beta > -1$ образуют ортонормированную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0,1,\ldots,N-1\}$ с весом:

$$\mu(x) = \mu(x;\alpha,\beta,N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(x+\beta+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},$$

Для произвольной дискретной функции $f : \Omega_N \to \mathbf{R}$ мы можем определить коэффициенты Фурье–Чебышева, конечный ряд Фурье

$$f_k^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(j)\tau_k^{\alpha,\beta}(j,N)f(j), \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N),$$

и сумму Фурье:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N), \qquad 0 \le n \le N-1.$$