Аналогично при $x \in [\varepsilon + 1/2, 1-\varepsilon]$ имеем $-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{2,\lambda} f\, d\lambda = \sigma_{r/|\omega|}(f_3, x-1/2) + o(1)$. $\square$

Так как $S_{1,r}(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_{1,\lambda} f\, d\lambda$ и $R_\lambda = T^{-1}R_{1,\lambda}T$, то в силу теорем 1 и 3 справедлива

Теорема 4. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеют место соотношения*

$$S_r(f,x) = \begin{cases} \sigma_{r/|\omega|}\left(g_1, \frac{x}{2\gamma}\right) + o(1), & x \in [\varepsilon, \gamma-\varepsilon], \\ \sigma_{r/|\omega|}\left(g_2, \frac{1}{2(1-\gamma)}(x+1-2\gamma)\right) + o(1), & x \in [\gamma+\varepsilon, 1\varepsilon-], \end{cases}$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $g_1(x) = f(2\gamma x)$, $g_2(x) = f(2(1-\gamma)x+\gamma)$, $o(1) \to 0$ равномерно по x при $[\varepsilon, \gamma-\varepsilon]$, $[\gamma+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 67–76. [*Kuvardina L. P., Khromov A. P.* The equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of an integral operator with involution // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2008. Vol. 52, № 5. P. 58—66.]
2. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции : Информ. бюл. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55. [*Khromov A. P.* The equiconvergence of expansions in eigenfunctions and associated functions of an integral operators with variable limits of integration (in Russian) // Integral Transforms and Special Functions. Inform. Byulleten. 2006. Vol. 6, № 1. P. 46–55.]

УДК 517.587

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В $L_{2\pi}^{p(x)}$ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА

И. И. Шарапудинов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: sharapud@mail.ru

Рассматривается пространство Лебега $L_{2\pi}^{p(x)}$ с переменным показателем $p(x)$, состоящее из измеримых функций $f(x)$, для которых существует интеграл $\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)}\,dx$. Для $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ средние Валле–Пуссена $V_m^n(f,x)$ определим так $V_m^n(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum\limits_{l=0}^{m} S_{n+l}(f,x)$, где $S_k(f,x)$ — частичная сумма Фурье функции $f(x)$ порядка k. Исследованы аппроксимативные свойства операторов $V_m^n(f) = V_m^n(f,x)$ в метрике пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$. В случае, когда 2π-периодический переменный показатель $p(x) \ge 1$ удовлетворяет условию Дини–Липшица, доказано, что при $m = n-1$ и $m = n$ имеет место оценка $\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \le \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ где $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ — наилучшее приближение функции $f^{(r)}(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n в метрике пространства $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Ключевые слова: пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, приближение тригонометрическими полиномами, средние Валле–Пуссена.

Approximation of Smooth Functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by Vallee–Poussin Means

I. I. Sharapudinov

Variable exponent $p(x)$ Lebesgue spaces $L_{2\pi}^{p(x)}$ is considered. For $f \in L_{2\pi}^{p(x)}$ Vallee–Poussin means $V_m^n(f,x)$ can be defined as $V_m^n(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum\limits_{l=0}^{m} S_{n+l}(f,x)$, where $S_k(f,x)$ — partial Fourier sum of $f(x)$ of order k. Approximative properties of operators $V_m^n(f) = V_m^n(f,x)$ are investigated in $L_{2\pi}^{p(x)}$. Let $p(x) \ge 1$ be 2π-periodical variable exponent that satisfies Dini–Lipschitz condition. When $m = n-1$ and $m = n$ the following estimate is proved: $\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \le \frac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$, where $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ is the best approximation of function $f^{(r)}(x)$ by trigonometric polynomials of order n in $L_{2\pi}^{p(x)}$.

Key words: variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, approximation by trigonometric polynomials, Vallee–Poussin means.

ВВЕДЕНИЕ

Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим пространство измеримых, по Лебегу, функций, определенных на измеримом множестве E и таких, что

$$\int\limits_E |f(x)|^{p(x)}\,dx < \infty,$$

где $p(x)$ — измеримая на E функция. Если $p(x) \geq 1$, $x \in E$ и существенно ограничена на E, то $L^{p(x)}(E)$ является [1] нормированным пространством с нормой:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

Теория и приложения пространств $L^{p(x)}(E)$ вызывает в последнее время усиливающийся интерес у специалистов самых различных областей. Не является исключением [2–10] и вопросы теории приближений в пространствах $L^{p(x)}(E)$. Пусть $p = p(x)$ — измеримая 2π-периодическая функция, $p_- = \inf\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $p^- = \sup\{p(x) : x \in \mathbb{R}\}$, $1 \leq p_- \leq p^- < \infty$, $L_{2\pi}^{p(x)}$ — пространство измеримых 2π-периодических функций, для которых $\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)}\,dx < \infty$. Полагая

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\},$$

мы превратим $L_{2\pi}^{p(x)}$ в банахово пространство.

Через $\mathcal{P}_{2\pi}$ обозначим множество всех 2π-периодических переменных показателей $p = p(x) \geq 1$, удовлетворяющих на периоде условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{2\pi}{|x-y|} \leq d \qquad (x, y \in [0, 2\pi]).$$

Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$, $a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$, $b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$,

$$S_n(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx.$$

Мы определим суммы Валле–Пуссена $V_m^n(f, x)$ с помощью равенства

$$V_m^n(f, x) = \frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m} S_{n+l}(f, x). \tag{1}$$

Далее, построим классы функций $W_{p(\cdot)}^r(M)$ по типу известных классов Соболева, а именно класс $W_{p(\cdot)}^r(M)$ состоит из r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций $f(x)$, у которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)} \leq M$. Через $W_{p(\cdot)}^r$ обозначим объединение всех классов $W_{p(\cdot)}^r(M)$. $W_{p(\cdot)}^r(M)$ и $W_{p(\cdot)}^r = \bigcup_{M>0} W_{p(\cdot)}^r(M)$ принято называть соответственно классами и пространствами Соболева с переменным показателем $p(x)$. Для удобства будем считать, что $W_{p(\cdot)}^0 = L_{2\pi}^{p(x)}$.

Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f \in W_{p(\cdot)}^r$. В настоящей работе при $m = n-1$ и $m = n$ установлена (теорема 1) следующая оценка: $\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \dfrac{c_r(p)}{n^r} E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)} \qquad (r \geq 0)$, где $E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)}$ — наилучшее приближение в $L_{2\pi}^{p(x)}$ функции $f^{(r)}(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n, а c_r, $c_r(p)$ здесь и далее — положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров.

1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Нам понадобятся следующие тождества:

$$\frac{1}{2}+\cos v+\ldots+\cos nv=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{v}{2}}, \tag{2}$$

$$\cos v+\cos 3v+\ldots+\cos(2n-1)v=\frac{\sin 2nv}{2\sin v}, \tag{3}$$

$$\sin v+\sin 2v+\ldots+\sin nv=\frac{\sin\frac{nv}{2}\sin\frac{(n+1)v}{2}}{\sin\frac{v}{2}}, \tag{4}$$

$$\sin v+\sin 3v+\ldots+\sin(2n-1)v=\frac{\sin^2 nv}{\sin v} \tag{5}$$

и обозначения $g_s(t)=t^{-2s}$, $q_s(t)=t^{-2s+1}$, $\Delta\varphi(t)=\varphi(t+1)-\varphi(t)$, $\Delta^2\varphi(t)=\Delta(\Delta\varphi(t))$,

$$R_{r,n}(u)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos(ku+\frac{\pi r}{2})}{k^r}, \tag{6}$$

$$\kappa^n_{r,m+1}(x)=(m+1)^{r-1}\sum_{l=0}^{m}R_{r,n+l}(x) \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Рассмотрим некоторые свойства последовательности функций $\kappa^n_{r,n}(x)$ (n=1,2,...).

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства:*

$$\kappa^n_{2s,n}(u)=(-1)^s n^{2s-1}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(l+1)u}{2}\sin\frac{(k+1)u}{2}\cos(2n+k+l+2)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta^2 g_s(n+1+k+l)+$$
$$+(-1)^s n^{2s-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{nu}{2}\sin\frac{(k+1)u}{2}\cos(3n+k+l)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta g_s(2n+k), \tag{8}$$

$$\kappa^n_{2s-1,n}(u)=(-1)^s n^{2s-2}\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(l+1)u}{2}\sin\frac{(k+1)u}{2}\sin(2n+k+l+2)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta^2 q_s(n+1+k+l)+$$
$$+(-1)^s n^{2s-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{nu}{2}\sin\frac{(k+1)u}{2}\sin(3n+k+l)\frac{u}{2}}{2\sin^2\frac{u}{2}}\Delta q_s(2n+k). \tag{9}$$

Доказательство. Из (6) и (7) имеем:

$$\kappa^n_{r,n}(u)=n^{r-1}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((n+1+l+k)u+\frac{\pi r}{2})}{(n+1+l+k)^r}.$$

Отсюда, воспользовавшись преобразованием Абеля, мы можем записать:

$$\kappa^n_{r,n}(u)=n^{r-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\left[\frac{1}{(n+1+k+l)^r}-\frac{1}{(n+2+k+l)^r}\right]v^n_{k,l}(u),$$

где

$$v^n_{k,l}(u)=\sum_{j=0}^{k}\cos\left((n+1+l+j)u+\frac{\pi r}{2}\right). \tag{10}$$

Рассмотрим два случая в зависимости от четности или нечетности числа r. Если $r=2s$, то $\cos(\mu u+\frac{\pi r}{2})=(-1)^s\cos\mu$, стало быть, (10) в силу (2) принимает вид

$$v^n_{k,l}(u)=(-1)^s\sum_{j=0}^{k}\cos(n+1+l+j)u=\frac{\sin(2(n+1+l+k)+1)\frac{u}{2}-\sin(2(n+l)+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}.$$

Подставим это выражение в (10) и применим к внутренней сумме преобразование Абеля. Тогда после несложных элементарных преобразований мы приходим к равенству (8). Совершенно аналогично, пользуясь тождествами (2)–(5), доказывается также равенство (9). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $0 \le k \le l$. Тогда*

$$\int\limits_0^\pi \frac{|\sin\frac{k+1}{2}u\sin\frac{l+1}{2}u|}{\sin^2\frac{u}{2}}du \le 2(k+1)\left(2+\ln\frac{l+1}{k+1}\right)+\frac{\pi}{3-\pi^2/8}.$$

Несложное доказательство этой леммы мы опускаем.

Из лемм 1 и 2 без особого труда можно вывести следующие утверждения.

Лемма 3. *Пусть $r \ge 1$. Тогда имеет место оценка*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\kappa_{r,n}^n(u)|du \le c_r.$$

Лемма 4. *Для $r \ge 1$, $n^{-1/2} \le u \le 2\pi - n^{-1/2}$ имеет место неравенство $|\kappa_{r,n}^n(u)| \le c_r$.*

Лемма 5. *Справедлива оценка*

$$\max_u |\kappa_{r,n}^n(u)| \le c_r n \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Ниже нам понадобится также один результат, установленный в работе автора [3].

Теорема D. *Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$ и для каждого вещественного $\lambda \ge 1$ задана измеримая существенно ограниченная 2π-периодическая функция (ядро) $\kappa_\lambda = \kappa_\lambda(t)$. Если имеют место оценки*

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |k_\lambda(x)|\,dx \le c_1$;

б) $\sup\limits_x |k_\lambda(x)| \le c_2\lambda^v$;

в) $|k_\lambda(x)| \le c_3$ *при* $\lambda^{-\gamma} \le |x| \le \pi$,

где v, γ, $c_j > 0$ не зависят от λ, то семейство линейных операторов свертки $\mathcal{K}_\lambda(f) = \mathcal{K}_\lambda(f)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\kappa_\lambda(t-x)\,dt$, действующих в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, равномерно огранчено в нем, т. е. найдется положительная постоянная $c(p)$, не зависящая от λ, для которой

$$\|\mathcal{K}_\lambda(f)\|_{p(\cdot)} \le c(p)\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Лемма 6. *Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $f(x) \in L_{2\pi}^{p(x)}$,*

$$\mathcal{K}_{r,n}(f) = \mathcal{K}_{r,n}(f)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\kappa_{r,n}^n(t-x)\,dt.$$

Тогда при $r \ge 1$ справедлива оценка

$$\|\mathcal{K}_{r,n}(f)\|_{p(\cdot)} \le c_r(p)\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Доказательство. Из лемм 3–5 следует, что последовательность ядер $\kappa_{r,n}^n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ удовлетворяет условиям а)–в) теоремы D с параметрами $v = 1$, $\gamma = -1/2$. Поэтому утверждение леммы 6 является следствием теоремы D.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В $L_{2\pi}^{p(x)}$ СУММАМИ ВАЛЛЕ – ПУССЕНА

Перейдем к формулировке основного результата настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $p(x) \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $r \ge 0$, $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$. Тогда при $m = n-1$ и $m = n$ имеет место неравенство*

$$\|f - V_m^n(f)\|_{p(\cdot)} \le \frac{c_r(p)}{n^r}E_n(f^{(r)})_{p(\cdot)} \qquad (r \ge 0).$$

Доказательство. Пусть сначала $r \ge 1$, $m = n-1$. Тогда если $f(x) \in W_{p(\cdot)}^r$, то имеет место равенство

$$f(x) - S_{n+l}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)R_{r,n+l}(t-x)\,dt. \tag{11}$$

Из (1), (6), (7) и (11) имеем:

$$f(x) - V^n_{n-1}(f,x) = \frac{1}{\pi n^r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\kappa^n_{r,n}(t-x)\,dt,$$

поэтому утверждение теоремы 1, относящееся к случаю $r \geq 1$ и $m = n-1$, непосредственно вытекает из леммы 6. Доказательство теоремы 1 в случае $r \geq 1$ и $m = n$ ничем не отличается от рассмотренного случая. Поэтому нам остается рассмотреть случай $r = 0$. Но в этом случае из равенства (1) следует, что

$$V^n_m(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\kappa^n_m(t-x)\,dt,$$

где

$$\kappa^n_m(u) = \frac{1}{2(m+1)\sin\frac{u}{2}} \sum_{l=0}^{m} \sin(2(n+l)+1)\frac{u}{2} = \frac{\sin^2(n+m+1)\frac{u}{2} - \sin^2 n\frac{u}{2}}{2(m+1)\sin^2\frac{u}{2}}.$$

Отсюда нетрудно увидеть, что последовательность ядер $\kappa^n_m(u)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при $m = n-1$ и $m = n$ удовлетворяет условиям теоремы D. Следовательно, справедлива оценка

$$\|V^n_m(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\|f\|_{p(\cdot)}. \tag{12}$$

Далее заметим, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка n имеет место равенство

$$V^n_m(T_n, x) = T_n(x). \tag{13}$$

Утверждение теоремы 1, относящееся к случаю $r = 0$, вытекает из (12) и (13).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(x)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632. [*Sharapudinov I. I.* Topology of the space $L^{p(x)}([0,1])$ // Math. Notes. 1979. Vol. 26, № 4. P. 796—806.]

2. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы Хаара в пространстве $L^{p(x)}([0,1])$ и принципе локализации в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130(172), № 2(6). С. 275–283. [*Sharapudinov I. I.* On the basis property of the Haar system in the space $L^{p(x)}([0,1])$ and the principle of localization in the mean // Math. USSR Sb. 1987. Vol. 58, № 1. P. 279–287.]

3. *Шарапудинов И. И.* О равномерной ограниченности в L^p $(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Мат. заметки.1996. Т. 59, вып. 2. С. 291–302. [*Sharapudinov I. I.*. Uniform boundedness in L^p $(p = p(x))$ of some families of convolution operators // Math. Notes. 1996. Vol. 59, № 2. P. 205–212.]

4. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^p(x)$ // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 2. P. 135–153. [*Sharapudinov I. I.* Some problems of approximation theory in spaces $L^p(x)$ // Analysis Math. 2007. Vol. 33, № 2. P. 135–153.]

5. *Шарапудинов И. И.* О базисности системы полиномов Лежандра в пространстве $L^{p(x)}(-1,1)$ переменным показателем $p(x)$// Мат. сб. 2009. Т. 200, № 1. С. 137–160. [*Sharapudinov I. I.* The basis property of the Legendre polynomials in the variable exponent Lebesgue space $L^{p(x)}(-1,1)$ // Sb. Math. 2009. Vol. 200, № 1. P. 133—156.]

6. *Guven A., Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ // J. of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.

7. *Akgün R.* Polynomial approximation of function in weigted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth // Georgian Math.J. 2011. Vol. 18. P. 203–235.

8. *Akgün R.* Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent // Ukrainian Math. J. 2011. Vol. 63, № 1. P. 3–23.

9. *Akgün R., Kokilashvili V.* On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces // Banach J. Math. Anal. 2011. Vol. 5, № 1. P. 70–82.

10. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L^{p(x)}_{2\pi}$ // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2011. Т. 5. С. 108–117. [*Sharapudinov I. I.* Some problems in approximation theory by trigonometric polynomials in $L^{p(x)}_{2\pi}$ // Math. Forum (Itogi nauki. The South of Russia). 2011. Vol. 5. P. 108–117.]