приближения. М. : Наука, 1987. [*Korneichuk N. P.* Exact Constants in Approximation Theory. Moscow : Nauka,1987.]
5. *Дзядык В. К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Наук. думка, 1988. [*Dzyadyk V. K.* Approximation methods for solving differential and integral equations. Kiev : Naukova Dumka, 1988.]
6. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976. [*Stechkin S. B., Subbotin Yu. N.* Splines in Computational Mathematics. Moscow : Nauka, 1976.]
7. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2002. [*Babenko K. I.* Fundamentals of Numerical Analysis. Moscow; Izhevsk : NIC Regular and chaotic dynamics, 2002.]
8. *Шакиров И. А.* Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа // Изв. вузов. Математика. 2011. № 10. С. 80–88. [*Shakirov I. A.* A complete description of the Lebesgue functions for classical lagrange interpolation polynomials // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 2011. Vol. 55, № 10. P. 70–77.]

УДК 517.518.82

# КОНЕЧНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

**Т. И. Шарапудинов**

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: sharapudinov@gmail.com

В настоящей работе построены новые конечные ряды, так называемые конечные предельные ряды по полиномам Чебышева (Хана), ортогональным на равномерной сетке, которые совпадают в концевых точках $x = 0$ и $x = N - 1$ с исходной функцией $f(x)$. Конструкция конечных предельных рядов основана на предельном переходе при $\alpha \to -1$ конечных рядов Фурье $\sum\limits_{k=0}^{N-1} f_k^\alpha \tau_k^{\alpha,\alpha}(x, N)$ по полиномам Чебышева (Хана) $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x, N)$, ортонормированным на равномерной сетке $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$.

**Ключевые слова:** конечные ряды Фурье, ортогональные полиномы.

**Finite Limit Series on Chebyshev Polynomials, Orthogonal on Uniform Nets**

**T. I. Sharapudinov**

In the paper we construct new series, called finite limit series on Chebyshev (Hahn) polynomials $\tau_n^{\alpha,\beta}(x) = \tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$, orthogonal on uniform net $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$. Their partial sums $S_n(f; x)$ equal in boundary points $x = 0$ и $x = N - 1$ with approximated function $f(x)$. Construction of finite limit series based on the passage to the limit with $\alpha \to -1$ of Fourier series $\sum\limits_{k=0}^{N-1} f_k^\alpha \tau_k^{\alpha,\alpha}(x, N)$ on Chebyshev (Hahn) polynomials $\tau_n^{\alpha,\alpha}(x, N)$, orthonormal on uniform net $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$.

**Key words:** Fourier series, orthogonal polynomials.

## ВВЕДЕНИЕ

В задачах, связанных с обработкой временных рядов и изображений, возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, затем аппроксимировать его покусочно. Тогда в местах стыка, как правило, возникают нежелательные разрывы. Такая картина непременно возникает при использовании для приближения участков исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам, например полиномам Чебышева, ортогональным на равномерных сетках. Остановимся на этом случае более подробно.

Через $\tau_n^{\alpha,\beta}(x, N)$ мы обозначим классические полиномы Чебышева [1], которые при $\alpha, \beta > -1$ образуют ортонормированную систему на равномерной сетке $\Omega_N = \{0, 1, \ldots, N - 1\}$ с весом:

$$\mu(x) = \mu(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(N)2^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(N + \alpha + \beta + 1)} \frac{\Gamma(x + \beta + 1)\Gamma(N - x + \alpha)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(N - x)},$$

Для произвольной дискретной функции $f : \Omega_N \to \mathbf{R}$ мы можем определить коэффициенты Фурье–Чебышева, конечный ряд Фурье

$$f_k^{\alpha,\beta} = \sum_{j=0}^{N-1} \mu(j)\tau_k^{\alpha,\beta}(j, N)f(j), \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha,\beta}(x, N),$$

и сумму Фурье:

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta}\tau_k^{\alpha,\beta}(x, N), \qquad 0 \le n \le N - 1.$$

Указанные выше разрывы в точках «стыка» возникают из-за того, что суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$ не совпадают с исходной функцией $f(x)$ в точках $x=0$ и $x=N-1$. С другой стороны, проанализировав асимптотические свойства полиномов $\tau_k^{\alpha,\beta}(x,N)$ вблизи концов 0 и $N-1$ (см. [1]), можно заметить, что суммы Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ по этим полиномам имеют тенденцию стремиться к $f(x)$ точках $x=0$ и $x=N-1$ при $\alpha,\beta\to-1$, т. е.

$$S_{n,N}^{-1}(f,x)=f(x),\qquad x\in\{0,N-1\},\tag{1}$$

где $S_{n,N}^{-1}(f,x)=\lim\limits_{\alpha,\beta\to-1}S_{n,N}^{\alpha,\beta}(x)$. В настоящей статье мы исследуем, что собой представляет $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ и нельзя ли использовать $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ в качестве альтернативного суммам Фурье $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,x)$ аппарата приближения дискретных функций.

## 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Пусть $\alpha$, $\beta$ — произвольные действительные числа. Полиномы Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ мы определим с помощью обобщенной гипергеометрической функции следующим образом:

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=(-1)^n\binom{n+\beta}{n}{}_3F_2(-n,-x,\alpha+\beta+1+n;\beta+1,1-N;1)=$$
$$=(-1)^n\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n^{[k]}(n+\alpha+\beta+1)_kx^{[k]}}{\Gamma(k+\beta+1)k!(N-1)^{[k]}},\tag{2}$$

где $a^{[0]}=1$, $a^{[k]}=a(a-1)\cdots(a-k+1)$, $(a)_0=1$, $(a)_k=a(a+1)\cdots(a+k-1)$, в частности,

$$T_0^{\alpha,\beta}(x,N)=1,\qquad T_1^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{\alpha+\beta+2}{N-1}x-\beta-1.\tag{3}$$

Ниже нам понадобятся следующие [1] свойства полиномов $T_n^{\alpha,\beta}(x,N)$:

*ортогональность при* $\alpha,\beta>-1$

$$\sum_{x=0}^{N-1}\mu(x)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)T_m^{\alpha,\beta}(x,N)=\delta_{nm}h_{n,N}^{\alpha,\beta},\tag{4}$$

где

$$h_{n,N}^{\alpha,\beta}=\frac{(N+n+\alpha+\beta)^{[n]}}{(N-1)^{[n]}}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)},\tag{5}$$

*равенства*

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=(-1)^nT_n^{\beta,\alpha}(N-1-x,N),$$
$$(n+\alpha+1)T_n^{\alpha,\beta}(x,N)-(n+1)T_{n+1}^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{2n+\alpha+\beta+2}{N-1}(N-1-x)T_n^{\alpha+1,\beta}(x,N-1),$$
$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(n+\beta)!}{n!}\frac{(n+\alpha)^{[-\beta]}x^{[-\beta]}}{(N-1)^{[-\beta]}}T_{n+\beta}^{\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\beta),$$

где $\beta$ — целое, $-n\le\beta\le-1$, причем, если $\alpha,\beta$ — целые, $-n\le\beta\le-1$, $-(n+\beta)\le\alpha\le-1$, то

$$T_n^{\alpha,\beta}(x,N)=\frac{(-1)^\alpha x^{[-\beta]}(N-x-1)^{[-\alpha]}}{(N-1)^{[-\beta]}(N-1+\beta)^{[-\alpha]}}T_{n+\alpha+\beta}^{-\alpha,-\beta}(x+\beta,N+\alpha+\beta).\tag{6}$$

## 2. КОНЕЧНЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ РЯД ПО ПОЛИНОМАМ ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Пусть $\alpha>-1$,

$$\tau_n^\alpha(x)=\tau_n^\alpha(x,N)=\{h_{n,N}^{\alpha,\alpha}\}^{-\frac12}T_n^{\alpha,\alpha}(x,N),\qquad 0\le n\le N-1.\tag{7}$$

Тогда в силу (4) полиномы $\tau_n^\alpha(x)=\tau_n^\alpha(x,N)\,(0\le n\le N-1)$ образуют на сетке $\Omega_N=\{0,1,\dots,N-1\}$ ортонормированную систему с весом

$$\mu^\alpha(x)=\mu^\alpha(x,N)=\mu(x;\alpha,\alpha,N)=\frac{\Gamma(N)2^{2\alpha+1}}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\frac{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)},\tag{8}$$

т. е.

$$\sum_{x=0}^{N-1} \mu^\alpha(x)\tau_n^\alpha(x)\tau_m^\alpha(x) = \delta_{nm}. \tag{9}$$

Дискретную функцию $f : \Omega_N \to \mathbf{R}$ мы можем представить в виде конечного ряда Фурье по полиномам $\tau_n^\alpha(x) = \tau_n^\alpha(x, N)$ $(0 \le n \le N-1)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x), \qquad x \in \Omega_N, \tag{10}$$

где

$$f_k^\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\tau_k^\alpha(j)\mu^\alpha(j). \tag{11}$$

Конечным предельным рядом по полиномам Чебышева, ортогональным на равномерной сетке, мы будем называть конечный ряд, полученный в результате почленного предельного перехода при $\alpha \to -1$ в конечном ряде Фурье–Чебышева (10), т. е. конечный ряд вида $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{N-1} f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x)$, $x \in \Omega_N$, где $f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x) = \lim\limits_{\alpha\to-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x)$. При этом отметим, что выражение $f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x)$, вообще говоря, не может быть определено с помощью равенств (7) и (11), так как сумма $\sum\limits_{j=0}^{N-1} f(j)\tau_k^{-1}(j)\mu^{-1}(j)$ теряет смысл из-за того, что $\mu^{-1}(0) = \mu^{-1}(N-1) = \infty$ (см.(8)). Поэтому возникает вопрос о том, что представляет собой выражение $f_k^{-1}\tau_k^{-1}(x) = \lim\limits_{\alpha\to-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x)$. Рассмотрим сначала два случая: $k = 0$ и $k = 1$.

Из (3) и (7) имеем:

$$\tau_0^\alpha(x) = \{h_{0,N}^{\alpha,\alpha}\}^{-1/2} = \frac{\sqrt{\Gamma(2\alpha+2)}}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)} = \pi^{-1/4}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+1)}}, \tag{12}$$

$$\tau_1^\alpha(x) = \{h_{1,N}^{\alpha,\alpha}\}^{-1/2}(\alpha+1)\left(\frac{2x}{N-1} - 1\right) = \pi^{-1/4}\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+5/2)(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}}\sqrt{\frac{N-1}{N+1+2\alpha}}\left(\frac{2x}{N-1} - 1\right).$$

Из (11) и (12) находим

$$\begin{aligned} f_0^\alpha \tau_0^\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \mu^\alpha(j)\tau_0^\alpha(j) f(j)\tau_0^\alpha(x) = \\ &= \pi^{-1/2}\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(N)2^{2\alpha+1}(\alpha+1)}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(N-j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(N-j)} f(j) = \\ &= \pi^{-1/2}\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(N)2^{2\alpha+1}}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\left[\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(N+\alpha)}{\Gamma(1)\Gamma(N)} f(0) + \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(N+\alpha)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(N)\Gamma(1)} f(N-1) + (\alpha+1)\sum_{j=1}^{N-2}\frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(N-j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(N-j)} f(j)\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (13) непосредственно следует, что

$$\lim_{\alpha\to-1} f_0^\alpha \tau_0^\alpha(x) = \frac{f(0)+f(N-1)}{2}. \tag{14}$$

В случае $k = 1$ из (12) и (7) имеем:

$$\begin{aligned} f_1^\alpha \tau_1^\alpha(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \mu^\alpha(j)\tau_1^\alpha(x)\tau_1^\alpha(j) f(j) = \pi^{-1/2} 2^{2\alpha+2}\frac{\Gamma(\alpha+5/2)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{N-1}{N+1+2\alpha}\left(\frac{2x}{N-1} - 1\right) \times \\ &\times (\alpha+1)\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{2j}{N-1} - 1\right)\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N+2\alpha+1)}\frac{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(N-j+\alpha)}{\Gamma(j+1)\Gamma(N-j)} f(j). \end{aligned} \tag{15}$$

Применяя такие же рассуждения, какие применялись при доказательстве (14), из (15) выводим

$$\lim_{\alpha\to-1} f_1^\alpha \tau_1^\alpha(x) = \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right). \tag{16}$$

Перейдем теперь к случаю, когда $k \geq 2$. В этом случае, пользуясь равенствами (7), (8) и (11), мы можем записать

$$f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x) = \frac{T_k^{\alpha,\alpha}(x,N)}{h_{k,N}^{\alpha,\alpha}} \sum_{j=0}^{N-1} \mu^\alpha(j) T_k^{\alpha,\alpha}(j,N) f(j) = \frac{T_k^{\alpha,\alpha}(x,N)}{h_{k,N}^{\alpha,\alpha}} \sum_{j=1}^{N-2} \mu^\alpha(j) T_k^{\alpha,\alpha}(j,N) g(j), \tag{17}$$

где

$$g(t) = f(t) - \frac{f(0)+f(N-1)}{2} - \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2t}{N-1}-1\right).$$

Далее, при $k \geq 2$, $1 \leq j \leq N-2$ имеем (см. (5))

$$\lim_{\alpha\to-1} h_{k,N}^{\alpha,\alpha} = \frac{(N+k-2)^{[k]}}{(N-1)^{[k]}} \frac{(k-1)!^2)}{2k!(k-2)!(2k-1))} = \frac{(N+k-2)^{[k]}}{(N-1)^{[k]}} \frac{k-1}{2k(2k-1)}, \tag{18}$$

$$\lim_{\alpha\to-1} \mu^\alpha(j) = \frac{\Gamma(N)}{2\Gamma(N-1)} \frac{\Gamma(x)\Gamma(N-x-1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)} = \frac{N-1}{2j(N-1-j)} = \mu^{-1}(j). \tag{19}$$

Кроме того из (2) и (6) имеем:

$$\lim_{\alpha\to-1} T_k^{\alpha,\alpha}(x,N) = T_k^{-1,-1}(x,N) = -\frac{x(N-x-1)}{(N-1)(N-2)} T_{k-2}^{1,1}(x-1,N-2). \tag{20}$$

Сопоставляя (18)–(20) с (17), при $k \geq 2$ находим

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x) &= \frac{2k(2k-1)}{k-1} \frac{(N-1)^{[k]}}{(N+k-2)^{[k]}} \frac{x(N-x-1)}{(N-1)(N-2)} T_{k-2}^{1,1}(x-1,N-2)\times \\ &\times \sum_{j=1}^{N-2} \mu^{-1}(j) \frac{j(N-j-1)}{(N-1)(N-2)} T_{k-2}^{1,1}(j-1,N-2) g(j) = \\ &= g_{k-2} \frac{k(2k-1)}{k-1} \frac{(N-3)^{[k-2]}}{(N+k-2)^{[k-2]}} T_{k-2}^{1,1}(x-1,N-2) \frac{x(N-x-1)}{N(N-1)},\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$g_m = g_m(N) = \frac{1}{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} T_m^{1,1}(j-1,N-2) g(j). \tag{22}$$

Из (10), (14), (16), (21) и (22) мы выводим следующее равенство:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1}-1\right) + \\ &+ \frac{x(N-x-1)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{N-3} \frac{(k+2)(2k+3)}{k+1} \frac{(N-3)^{[k]}}{(N+k)^{[k]}} g_k T_k^{1,1}(x-1,N-2). \end{aligned} \tag{23}$$

Равенству (23) можно придать несколько иной вид. С этой целью заметим, что в силу (5)

$$h_{k,N-2}^{1,1} = \frac{(N+k)^{[k]}}{(N-3)^{[k]}} \frac{\Gamma(k+2)\Gamma(k+2)2^3}{k!\Gamma(k+3)(2k+3)} = 8\frac{(N+k)^{[k]}}{(N-3)^{[k]}} \frac{k+1}{(k+2)(2k+3)},$$

отсюда, с учетом (7) и (21), для $k \geq 2$ имеем

$$\lim_{\alpha\to-1} f_k^\alpha \tau_k^\alpha(x) = \frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)} \hat{g}_{k-2} \tau_{k-2}^1(x-1,N-2),$$

где

$$\hat{g}_m = \hat{g}_m(N) = \frac{1}{N-2} \sum_{j=1}^{N-2} \tau_m^1(j-1,N-2) g(j). \tag{24}$$

Поэтому из (10), (14) и (16) мы выводим следующий результат

**Теорема 1.** *Для любой дискретной функции $f(x)$, заданной на сетке $\Omega_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, справедливо следующее равенство*

$$f(x) = \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1} - 1\right) + \frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{N-3} \hat{g}_k \tau_k^1(x-1, N-2), \quad (25)$$

*в котором коэффициенты $\hat{g}_k$ определены с помощью равенства* (24).

Рассмотрим частичные суммы конечного ряда (25) следующего вида:

$$S_{n,N}^{-1}(f,x) = \frac{f(N-1)+f(0)}{2} + \frac{f(N-1)-f(0)}{2}\left(\frac{2x}{N-1} - 1\right) + \\ + \frac{8x(N-x-1)}{N(N-1)} \sum_{k=0}^{n} \hat{g}_k \tau_k^1(x-1, N-2). \quad (26)$$

Из равенства (26) видно, что $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ совпадают в концевых точках $x = 0$ и $x = N-1$ с исходной функцией $f(x)$, т. е. $S_{n,N}^{-1}(f,x) = f(0)$, $S_{n,N-1}^{-1} = f(N-1)$.

Следует отметить, что полиномы $\tau_n^{-1}(x,N) = \lim\limits_{\alpha,\beta\to-1} \tau_n^{\alpha,\beta}(x,N)$ не образуют ортонормированной системы на $\Omega_N$. Тем не менее $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ является проектором на подпространство алгебраических полиномов степени $n$. Можно показать, что $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ как аппарат приближения дискретных функций не уступает суммам Фурье–Чебышева по полиномам Чебышева $\tau_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(x,N)$. Отметим еще, что конструкция сумм $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ столь же проста, как конструкция конечных рядов Фурье по ортогональным полиномам. Но она является более удобной с точки зрения численной реализации, так как в выражении, определяющем коэффициенты $\tilde{g}_k$, фигурирующие в конструкции сумм $S_{n,N}^{-1}(f,x)$, не участвует весовая функция типа $\dfrac{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(N-x+\alpha)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$, которая в случае $\alpha < 0$ привела бы к существенным вычислительным сложностям. Это обстоятельство вместе с (1) делают суммы $S_{n,N}^{-1}(f,x)$ весьма привлекательным инструментом для решения задач, связанных с аппроксимацией дискретных функций.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ* (*проект* 10-01-00191-а).

**Библиографический список**

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с. [*Sharapudinov I. I.* Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications. Makhachkala : Dagestan. nauch. center RAN, 2004. 276 p.]

УДК 517.518.8

# АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{2\pi}^{p(x)}$

**Т. Н. Шах-Эмиров**

Дагестанский научный центр, Махачкала
E-mail: Tadgius@gmail.com

В работе рассмотрены аппроксимативные свойства линейных средних типа Норлюнда $\mathcal{N}_n(f,x)$ и Рисса $\mathcal{R}_n(f,x)$ для тригонометрических рядов Фурье в пространстве Лебега с переменным показателем $L_{2\pi}^{p(x)}$. При определенных условиях на методы суммирования Норлюнда и Рисса доказано, что если $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ $(0 < \alpha \le 1)$, то $\|f - \mathcal{N}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$, $\|f - \mathcal{R}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$.

**Ключевые слова:** пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, модуль непрерывности.

**Approximation Properties of Some Types of Linear Means in Space $L_{2\pi}^{p(x)}$**

**T. N. Shakh-Emirov**

Approximative properties of Norlund $\mathcal{N}_n(f,x)$ and Riesz $\mathcal{R}_n(f,x)$ means for trigonometric Fourier series in Lebesgue space of variable exponent $L_{2\pi}^{p(x)}$ are considered. Under certain conditions on Norlund and Riesz summation methods it is proved that the estimates $\|f - \mathcal{N}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$, $\|f - \mathcal{R}_n\|_{p(\cdot)} \le CM\delta^\alpha$ hold for $f \in \mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(\alpha, M)$ $(0 < \alpha \le 1)$.

**Key words:** Lebesgue and Sobolev spaces of variable exponent, module of continuity.