ИНФОРМАТИКА

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

УДК 501.1

РАСПОЗНАВАНИЕ ВХОДОВ ЛИНЕЙНОГО АВТОМАТА ПО НЕЧЕТКИМ ВЫХОДАМ

Д. В. Сперанский

Доктор технических наук, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Московский государственный университет путей сообщений, Speranskiy.DV@gmail.com

Предложен метод решения задачи распознавания неизвестных входных последовательностей линейного автомата при наблюдении нечетких выходов.

Ключевые слова: автомат без потери информации, системы линейных уравнений с нечеткими переменными над полем $GF(p)$.

ВВЕДЕНИЕ

Названная в заголовке статьи задача возникает в ряде практических приложений. Так, устройства, описывемые моделью линейного автомата (ЛА), могут быть использованы как каналы связи, в которых осуществляется кодирование передаваемой информации. Использование таких каналов очевидно имеет смысл в том случае, если получаемая на выходе информация может быть декодирована. Кроме того, устройства, обладающие возможностью декодирования получаемой информации, позволяют применять для них простые и вместе с тем эффективные схемы встроенного контроля (СВК). Такие СВК основаны на принципе сравнения входных сигналов, восстановленных по наблюдаемым выходам с реальными сигналами, поступающими на входы устройства. Очевидно, что рассогласование восстановленных и реальных сигналов свидетельствует о неправильном функционировании контролируемого устройства.

Класс автоматов (в общем случае нелинейных), для которых возможно распознавание неизвестных входных слов, был впервые введен D. A. Huffman [1] и назван классом автоматов без потери информации (БПИ). При этом предполагалась помимо знания выходных слов и его начального состояния возможность проведения дополнительного эксперимента.

В [2] было введено определение ЛА БПИ, распознавание неизвестных входных слов которого (в отличие от [1]) не требовало проведения дополнительного эксперимента. В [3] доказано, что для ЛА два упомянутых определения автомата БПИ эквивалентны.

При решении задачи распознавания неизвестных входных слов в [1, 2] использовался классический математический аппарат, базирующийся на операциях с точными значениями величин (данных), на традиционной математической логике и т. д. Однако информация о реальной системе, для которой строится модель ЛА, не всегда удовлетворяет упомянутым требованиям по объективным причинам.

Например, исходные данные (в частности, значения выходных сигналов ЛА) могут быть неточными (нечеткими) из-за несовершенства измерительной аппаратуры. В этих условиях важно наличие средств для отражения упомянутой нечеткости (неопределенности).

Возникшее в последние 50 лет понимание необходимости разработки математического аппарата для работы с неопределенностями различного типа привело к возникновению новых дисциплин, в частности, интервального анализа [4]. Задача, упомянутая в заголовке предлагаемой статьи в условиях неопределенностей интервального типа, была исследована в [5]. Важной вехой на пути создания подходящего математического аппарата для работы с неопределенностями других типов явилось создание Л. Заде (L. A. Zadeh) концепции нечетких множеств [6]. На этой основе начали развиваться нечеткая логика, нечеткая теория управления, нечеткая алгебра, нечеткая арифметика и т.д. Что касается нечеткой арифметики, развитой для операций с вещественными числами, то с основными ее результатами можно ознакомиться, например, по обобщающим работам [7–10].

Поскольку в предлагаемой статье объектом исследования является ЛА, заданный над полем $GF(p)$, то необходимо будет ввести соответствующие операции над элементами поля $GF(p)$ и исследовать особенности нечеткой арифметики над этим полем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является ЛА [2, 3], заданный над полем $GF(p)$, где p — простое число, следующими уравнениями переходов и выходов:

$$\bar{s}(t+1) = A\bar{s}(t) + B\bar{u}(t), \tag{1}$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{s}(t) + D\bar{u}(t). \tag{2}$$

Здесь t — момент дискретного времени; $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times l}$, $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, $D = [d_{ij}]_{m\times l}$ — характеристические матрицы. Элементы всех этих матриц — это элементы поля $GF(p)$. Входной вектор $\bar{u}(t)$, выходной вектор $\bar{y}(t)$ и вектор-состояние $\bar{s}(t)$ представляют собой упорядоченные наборы-столбцы из элементов того же поля:

$$\bar{u}(t) = [u_1(t), ..., u_l(t)]', \quad \bar{y}(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]', \quad \bar{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_n(t)]'.$$

Известно [2, 3], что конечное состояние ЛА и выходная реакция ЛА в результате подачи входной последовательности $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \dots, \bar{u}(t)$ длины $t+1$ при начальном состоянии $\bar{s}(0)$ вычисляются по формулам:

$$\bar{s}(t+1) = A^{t+1}\bar{s}(0) + A^tB\bar{u}(0) + \dots + AB\bar{u}(t-1) + B\bar{u}(t), \tag{3}$$

$$\bar{y}(t) = CA^t\bar{s}(0) + CA^{t-1}\bar{u}(0) + \dots + CB\bar{u}(t-1) + D\bar{u}(t). \tag{4}$$

В [2] рассматривалась следующая задача: у заданного ЛА БПИ известно его начальное состояние и на его выходах может наблюдаться реакция на неизвестную входную последовательность. По этим данным требуется распознать упомянутую входную последовательность.

В этой классической задаче наблюдаемый выходной сигнал $\bar{y}(t)$ был представлен в виде упорядоченной совокупности точных значений его координат. В предлагаемой статье рассматривается та же задача распознавания, но в предположении, что наблюдаемый выход ЛА есть вектор $\bar{y}(t)$, представленный в виде $\bar{y}(t) = [y_1^*, \dots, y_m^*]$, где y_i^* — нечеткие числа (например, «примерно k»). Условимся далее интерпретировать каждый элемент поля $GF(p)$ как «четкое» число из множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$, считая его представителем соответствующего класса чисел по модулю p.

2. НЕЧЕТКАЯ АРИФМЕТИКА НАД ПОЛЕМ $GF(p)$

Известно [11], что нечеткие числа могут быть представлены в различных формах (табличной, графической и др.). Ниже будет использоваться так называемая L-R форма представления, которая отличается простотой и удобством выполнения операций над нечеткими числами. (Условимся, что все используемые в статье, но не определяемые в ней, понятия и термины понимаются в смысле [11].)

Поскольку при решении рассматриваемой задачи потребуется выполнять арифметические операции над нечеткими числами в поле $GF(p)$, нам придется их ввести. При определении правил вычисления в такой нечеткой арифметике будет использован известный принцип обобщения Л. Заде, который, в частности, детально описан в [11].

Условимся, что в поле $GF(p)$ нечеткое число A представляется в L-R форме вида $A = (m, \alpha, \beta)$, в которой степень принадлежности элемента x нечеткому множеству A есть

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L((m-x)/\alpha), & \forall x \leqslant m, \alpha > 0, \\ R((x-m)/\beta), & \forall x \geqslant m, \beta > 0. \end{cases}$$

Здесь L и R — некоторые функции от x (например, показательные, экспоненциальные, линейные и т. п.), m — номинальное значение нечеткого числа, α и β — левая и правая границы интервала нечеткости соответственно. Это означает, что все носители числа A лежат в интервале $(m-\alpha, m+\beta)$. Такое число графически может быть изображено в аналоге декартовой системы координат. На оси абсцисс $0X$ этой системы располагаются последовательно в возрастающем порядке периодически повторяющиеся элементы $GF(p) = \{0, 1, ..., p-1\}$. На оси ординат $0Y$ этой системы располагаются значения функции принадлежности $\mu_A(x) \in [0, 1]$ элементов нечеткого множества A. Носители x числа A лежат в интервале с центром в точке m, а величины α и β есть соответственно левое и правое смещения, определяющие границы этого интервала. Таким образом, L-R представление числа A в выбранном нами варианте в графическом изображении имеет треугольную форму.

Заметим, что в L-R представлении нечетких чисел в поле $GF(p)$ параметры α и β не могут быть произвольными (как это было в случае нечетких вещественных чисел в [11]).

Введем теперь операцию сложения нечетких чисел в $GF(p)$. Пусть A_1 и A_2 — нечеткие числа, тогда их сумма также есть нечеткое число, которое задается выражением

$$(A_1 + A_2)(y) = \bigvee_{y = x_1 + x_2} [A_1(x_1) \wedge A_2(x_2)], \quad \forall x_1, x_2, y \in GF(p). \tag{5}$$

В этой записи $A_1(x)$ $(A_2(x))$ — элементы x_1 (x_2) из множества носителей нечеткого числа A_1 (A_2), $(A_1 + A_2)(y)$ — элемент y из множества носителей нечеткого числа $(A_1 + A_2)$. Символы $\wedge$ и $\vee$ соответствуют операторам пересечения и объединения множеств на основе одной из известных норм.

Функцию принадлежности для суммы определим так:

$$\mu_{A_1+A_2}(y) = \max_{y = x_1 + x_2} \left\{ \min \left\{ \mu_{A_1}(x_1),\ mu_{A_2}(x_2) \right\} \right\}, \quad \forall\ x_1, x_2, y \in GF(p). \tag{6}$$

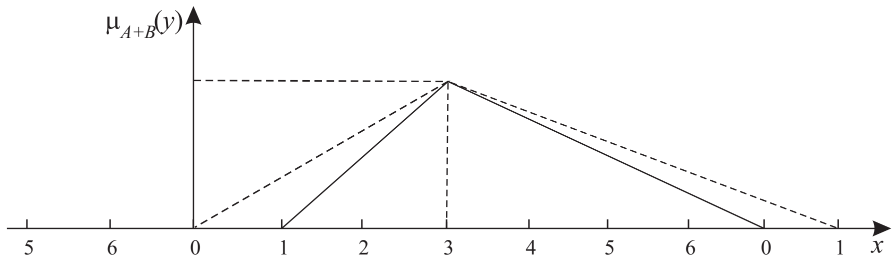
Понятно, что сложение нечетких чисел по формулам (5) и (6) есть трудоемкий процесс. По этой причине вместо него ниже предлагается упрощенный механизм вычисления характеристических параметров суммы, использующий L-R представление слагаемых. Этот механизм базируется на аналоге соответствующего механизма для нечетких вещественных чисел с учетом принципа обобщения, сформулированного Л. Заде.

Напомним, что для вещественных чисел L-R представление суммы нечетких чисел A и B в треугольной форме имеет следующий вид [11]:

$$(A + B) = (m_A + m_B, \alpha_A + \alpha_B, \beta_A + \beta_B). \tag{7}$$

Здесь индекс параметра указывает нечеткое число, к которому этот индекс относится.

Сохраняя этот механизм вычисления параметров для $GF(p)$, следует иметь в виду, что формальное применение формулы (7) может привести к получению интервала нечеткости, длина которого будет больше $p-1$. Например, рассмотрим в поле $GF(p)$ при $p = 7$ два нечетких числа $A = (1, 2, 3)$ и $B = (2, 1, 2)$. Применение формулы (7) по правилам традиционной арифметики приводит к следующему результату: $(A + B) = (1 + 2, 2 + 1, 3 + 2) = (3, 3, 5)$. На рисунке представлено графическое изображение этого числа.



L-R представление числа $A + B = (3, 3, 5)$ до и после сжатия интервала нечеткости

Пунктиром представлено графическое изображение с учетом того, что $\alpha_{A+B} = 3$ и $\beta_{A+B} = 5$ являются смещениями от точки $m_{A+B} = 3$ на оси абсцисс влево и вправо соответственно (если m_{A+B} будет больше $p - 1$, то сумма берется по модулю p). Из этого рисунка видно, что длина интервала нечеткости Δ равна 8 и точками этого интервала являются, в частности, два элемента 0 и два элемента 1 поля $GF(p)$. Чтобы обеспечить корректность результатов суммирования для поля $GF(p)$, необходимо сжать этот интервал, превратив его в интервал $\bar{\Delta}$ длиной $p - 1 = 6$. Понятно, что такое сжатие естественно осуществлять на основе принципа пропорциональности. Проиллюстрируем его на нашем примере. Поскольку левый полуинтервал Δ имеет длину $\alpha_{A+B} = 3$, то соответствующий ему полуинтервал в $\bar{\Delta}$ должен иметь длину $(|\bar{\Delta}|/|\Delta|) \cdot \alpha_{A+B} = \frac{6}{8} \cdot 3 = 2.25$, а правый полуинтервал — длину $(|\bar{\Delta}|/|\Delta|) \cdot \beta_{A+B} = \frac{6}{8} \cdot 5 = 3.75$. Осуществив округление полученных результатов до целых чисел 2 и 4 соответственно, получаем искомое L-R представление суммы $A = (3, 2, 4)$. Графическое изображение этого нечеткого числа представлено на рисунке сплошными линиями.

Обратимся теперь к вопросу задания функции принадлежности $\mu_{A+B}(y)$ элементов нечеткого множества $(A + B)$. От соответствующей процедуры естественно потребовать, во-первых, чтобы она имела невысокую трудоемкость и обеспечивала гладкую зависимость $\mu_{A+B}(y)$ при изменении слагаемых. Обоим этим требованиям удовлетворяет простейшая кусочно-линейная функция, которая и будет нами использована. Проиллюстрируем ее построение на рассмотренном выше примере.

Опорными точками графика (вида, представленного на рисунке) кусочно-линейной функции $\mu_{A+B}(y)$ будут служить точки $M_0(m_A + m_B, 1)$, $M_1(\alpha_{A+B}, 0)$, $M_2(\beta_{A+B}, 0)$. Координаты этих точек очевидным образом формируются из выражения (7). Для нашего примера эти точки таковы: $M_0(3, 1)$, $M_1(1, 0)$, $M_2(0, 0)$. Отметим, что две последние точки лежат на оси абсцисс и являются границами интервала $\bar{\Delta}$. График этой функции состоит из четырех отрезков прямых: два из них лежат на оси абсцисс, а два других — отрезки (M_0, M_1) и (M_0, M_2). Аналитические выражения для отрезков прямых (M_0, M_1) и (M_0, M_2) получим, используя аппарат аналитической геометрии. С этой целью «наложим» на ось абсцисс на рисунке ось 0 декартовой системы координат. Очевидно, что в общем случае в новой системе координаты точек M_1 и M_2 могут трансформироваться. Так, в нашем примере они превращаются в $M_1(1, 0)$ и $M_2(7, 0)$. С учетом этого уравнения прямых (M_0, M_1) и (M_0, M_2) имеют вид $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$. При вычислении значений представленной ниже функции принадлежности следует помнить, что элементам $GF(p)$ $x = 1, 2, \ldots, 6$ соответствуют вещественные числа $1, 2, \ldots, 6$, а элементу $0 \in GF(p)$ — вещественное число 7. С учетом сказанного получаем аналитическое представление функции принадлежности:

$$\mu_{A+B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & \text{если } 1 < x \leqslant 3, \\ -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}, & \text{если } 3 < x \leqslant 7, \\ 0, & \text{если } x > 7. \end{cases}$$

Естественно, что вычисление значений этой функции производится по правилам традиционной арифметики.

Перейдем теперь к определению операции умножения нечетких чисел над полем $GF(p)$, которое в принципе можно сформулировать с помощью аналога формулы (5). Однако, как и в случае операции сложения, используем упрощенный механизм с учетом принципа обобщения Л. Заде. Напомним [11], что для вещественных чисел L-R представление произведения нечетких чисел A и B в треугольной форме $(AB) = (m_{AB}, \alpha_{AB}, \beta_{AB})$ его параметры вычисляются по формулам

$$m_{AB} = m_A \cdot m_B, \quad \alpha_{AB} = m_A\alpha_B + m_B\alpha_A - \alpha_A\alpha_B, \quad \beta_{AB} = m_A\beta_B + m_B\beta_A + \beta_A\beta_B. \tag{8}$$

Если результат перемножения приводит к интервалу нечеткости длины больше $p-1$, то сжимаем его тем же способом, что описан выше для суммирования. Полная аналогия с суммированием имеет место также и при получении аналитического выражения для функции принадлежности (кусочно-линейного типа) произведения.

Так, например, произведение нечетких чисел $A = (5, 3, 2)$ и $B = (2, 1, 2)$ при $p = 7$ в соответствии с формулой (8) имеют следующие параметры:

$$m_{AB} = 5 \cdot 2 = 10, \qquad \alpha_{AB} = 8, \qquad \beta_{AB} = 14.$$

Величина m_{AB} по модулю 7 равна 3. Длина интервала нечеткости в десятичной системе счисления равна $8 + 14 = 22$. Сжимая этот интервал до длины $7 - 1 = 6$, получаем скорректированные границы интервала нечеткости : $\alpha_{AB} = \frac{6}{22} \cdot 8 = 2.09$, $\beta_{AB} = \frac{6}{22} \cdot 14 = 3.8$. Округляя дробные значения до целых чисел 2 и 4, получаем искомое L-R представление произведения $(A \cdot B) = (3, 2, 4)$.

Условимся считать два нечетких треугольных числа равными, если у них равны соответствующие параметры. Это есть следствие того, что функция принадлежности для нечеткого числа над полем $GF(p)$ определяется однозначно по описанному выше алгоритму на основе его параметров.

Отметим, наконец, что для определенных выше операций сложения и умножения нечетких чисел над полем $GF(p)$, как нетрудно доказать, оказываются справедливыми свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

3. РАСПОЗНАВАНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

В [2] приведено условие того, что линейный автомат является автоматом БПИ: для того чтобы ЛА являлся автоматом БПИ, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы D равнялся l, где l — число входных каналов ЛА.

Доказательство теоремы следует из метода нахождения неизвестной входной последовательности, который состоит в пошаговом распознавании входных слов $\bar{u}(0), \bar{u}(1), \ldots$. На первом шаге, поскольку известны начальное состояние $\bar{s}(0)$ ЛА и наблюдаемый выходной вектор $\bar{y}(0)$ в ответ на подачу неизвестного входного вектора $\bar{u}(0)$, последний однозначно определяется из системы

$$\bar{y}(0) - C\bar{s}(0) = D\bar{u}(0). \tag{9}$$

Из алгебры известно, что для этого и должно выполняться условие приведенной выше теоремы. Если вектор $\bar{u}(0)$ распознан, то по формуле (1) вычисляется следующее состояние $\bar{s}(1)$ ЛА и из системы

$$\bar{y}(1) - C\bar{s}(1) = D\bar{u}(1)$$

находится входной вектор $\bar{u}(1)$. Далее процесс распознавания продолжается аналогичным образом.

Итак, нахождение неизвестной входной последовательности длины $k+1$ с учетом формул (3) и (4) сводится к решению следующих систем линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{gathered} D\bar{u}(0) = \bar{y}(0) - C\bar{s}(0), \\ D\bar{u}(1) = CA\bar{s}(0) - \bar{y}(1) - CB\bar{u}(0), \\ \ldots \\ D\bar{u}(k) = CA^k\bar{s}(0) - \bar{y}(k) - \cdots - CB\bar{u}(k-1). \end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим правую часть первой системы из (10). В ней в соответствии с постановкой задачи слагемое $C\bar{s}(0)$ есть четкое число из поля $GF(p)$, а слагаемое $\bar{y}(0)$ — нечеткое. Понятно, что четкое число можно рассматривать как частный случай нечеткого, у которого в треугольном R-L представлении $A(m,\alpha,\beta)$ параметры α и β равны нулю. Тогда сложение и умножение двух чисел, одно из которых есть четкое, а второе — нечеткое, в качестве результата дает нечеткое число. Очевидно, что это относится и ко всем другим системам из (10).

В общем случае каждую систему из (10) можно представить в виде

$$D \cdot X = V, \tag{11}$$

где D — матрица из четких чисел, а X и V — векторы-столбцы, компоненты которых есть нечеткие числа, причем вектор X есть искомый вектор.

Заменим систему (11), записанную в матричной форме, на эквивалентную ей систему, записанную в координатной форме:

$$\begin{gathered} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1l}x_l = v_1 (\operatorname{mod} p), \\ d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \dots + d_{2l}x_l = v_2 (\operatorname{mod} p), \\ \dots \\ d_{m1}x_1 + d_{m2}x_2 + \dots + d_{ml}x_l = v_m (\operatorname{mod} p). \end{gathered} \tag{12}$$

Понятно, что решение этой системы сравнений будет множество классов чисел по модулю p. Поскольку число решений этой системы конечно, то в принципе они могут быть найдены методом перебора. Этот метод даже при сравнительно небольших p трудоемок, поэтому желательно иметь в арсенале более эффективные методы. Отметим, что задача решения системы типа (12) относится к алгебре и теории чисел и для ее решения ныне известен целый ряд различных методов. В частности, один из возможных подходов к решению связан с интерпретацией (12) как системы уравнений в целых или натуральных числах. В этом случае возможно применение аналога метода Гаусса, преобразующего систему к ступенчатой форме.

Отметим, что известен также быстрый алгоритм решения названной системы, описанный в [12]. В литературе приведены данные апробации этого алгоритма, подтверждающие его высокое быстродействие.

Проиллюстрируем на простом примере, каким образом может быть построена система вида (12). Пусть задана следующая система вида (11) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m_1,\alpha_1,\beta_1) \\ (m_2,\alpha_2,\beta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,0,4) \\ (6,1,3) \\ (5,3,4) \end{bmatrix},$$

где первая слева матрица состоит из четких чисел — элементов поля $GF(p)$ при $p=7$, вторая слева матрица содержит неизвестные нечеткие числа в $GF(p)$, третья матрица состоит из нечетких чисел в $GF(p)$.

Для перевода в координатную форму этой системы воспользуемся формулами (7) и (8) с учетом, что элементы первой системы есть четкие числа, т. е. границы α и β интервалов нечеткости для них равны нулю. После выполнения соответствующих вычислений получим следующие равенства по модулю $p=7$:

$$\begin{gathered} (4m_1+5m_2, 4\alpha_1+5\alpha_2, 4\beta_1+5\beta_2) = (2,0,4), \\ (2m_1+3m_2, 2\alpha_1+3\alpha_2, 2\beta_1+3\beta_2) = (6,1,3), \\ (m_1+m_2, \alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2) = (5,3,4). \end{gathered}$$

Исходя из определения равенства двух нечетких чисел, приведенного выше, приходим к такой системе линейных уравнений:

$$\begin{gathered} 4m_1 + 5m_2 = 2, \qquad 4\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0, \qquad 4\beta_1 + 5\beta_2 = 4, \\ 2m_1 + 3m_2 = 6, \qquad 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1, \qquad 2\beta_1 + 3\beta_2 = 3, \\ m_1 + m_2 = 5, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 3, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 4. \end{gathered} \tag{13}$$

Эту систему можно решить методом перебора: $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 2$.

Итак, искомые нечеткие числа в поле $GF(7)$ (неизвестные входные векторы ЛА) таковы: $(2, 1, 2)$ и $(3, 2, 2)$.

Заметим, что системы вида (13) в общем случае могут и не иметь решения. Таким образом, для распознавания неизвестной входной последовательности ЛА в рассматриваемой постановке задачи условия теоремы, приведенной в начале п. 3, в общем случае являются только необходимыми, но не достаточными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в статье результаты свидетельствуют о том, что поиск решения задачи распознавания в рассматриваемой постановке оказывается более трудоемким, чем в классической постановке. Кроме того, при выполнении необходимых и достаточных условий разрешимости классической задачи рассматриваемая здесь задача может и не иметь решения.

Библиографический список

1. *Huffman D. A.* Canonical forms for information-lossless finite-state logical machines // Information Theory, IRE Transactions on. 1959. Vol. 5, № 5. P. 41–59. DOI: 10.1109/TIT.1959.1057537.
2. *Гилл А.* Линейные последовательностные машины. Анализ, синтез и приложения. М. : Наука, 1974. 288 с.
3. *Сперанский Д. В.* Лекции по теории экспериментов с конечными автоматами. М. : Интернет-университет информационных технологий : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 287 с.
4. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М. : Мир, 1987. 912 с.
5. *Сперанский Д. В.* Задача распознавания входного слова линейного автомата в интервальной постановке // Автоматика и вычислительная техника. 2012. № 2. С. 50–56.
6. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. № 8. P. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X.
7. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy numbers : An overview // Analysis of Fuzzy Information, Vol. I : Mathematics and Logic. Boca Raton, FL : CRC Press, 1988. P. 3–39.
8. *Kaufman A., Gupta M. M.* Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications. N. Y. : Van Nostrand Reinhold Co., 1991. 351 p.
9. *Kandel A.* Fuzzy Mathematical Techniques with Applications. Boston, MA, USA : Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986. 274 p.
10. *Hanss M.* Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications. Berlin ; Heidelberg : Springer Publishing Company, Inc., 2010. 256 p.
11. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. 798 с.
12. *Dixon J. D.* Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions // Numerische Mathematik. 1982. Vol. 40, № 1. P. 137–142. DOI: 10.1007/BF01459082.

Recognition of a Linear Automaton Outputs by the Fuzzy Outputs

D. V. Speranskiy

Moscow State University of Railway Engineering, 2/22, Chasovaya str., 125993, Moscow, Russia, Speranskiy.DV@gmail.com

A method is proposed to solve the recognition problem for unknown input sequences of a linear automaton when observed the fuzzy outputs.

Key words: information lossless automaton, systems of a linear equation with fuzzy variables over the field $GF(p)$.

References

1. Huffman D. A. Canonical forms for information-lossless finite-state logical machines *Information Theory, IRE Transactions on*, 1959, vol. 5, no. 5, pp. 41–59. DOI: 10.1109/TIT.1959.1057537.

2. Gill A. *Linear sequential circuits: analysis, synthesis, and applications*. New York, McGraw-Hill, 1962, 215 p.

3. Speranskij D. V. *Lekcii po teorii jeksperimentov s konechnymi avtomatami* [Lection on the theory of experiments with finite automata]. Moscow, Internet-Universitet Informacionnyh Tehnologij, BINOM. Laboratorija znanij, 2010, 287 p. (in Russian).

4. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to interval computations*. New York, Academic Press, 1983, 333 p.

5. Speransky D. V. Fuzzy automaton finite state recognition. *Automatic Control and Computer Sciences*, vol. 46, iss. 5, pp. 185–190. DOI: 10.3103/S014641161 2050070.

6. Zadeh L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, no. 8, pp. 338–353. DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90 241-X.

7. Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: An overview. *Analysis of Fuzzy Information, Vol. I : Mathematics and Logic*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1988, pp. 3–39.

8. Kaufman A., Gupta M. M. *Introduction to fuzzy arithmetic : theory and applications*. New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1991, 351 p.

9. Kandel A. *Fuzzy Mathematical Techniques with Applications*. Boston, MA, USA, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1986, 274 p.

10. Hanss M. *Applied Fuzzy Arithmetic : An Introduction with Engineering Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer Publishing Company, Incorporated, 2010. 256 p.

11. Piegat A. *Fuzzy Modeling and Control*. Heidelberg, Germany, Physica-Verlag GmbH. 2010, 728 p. (Rus. ed. : Piegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie*. Moscow, BINOM, Laboratoriia znanii, 2013, 798 p.)

12. *Dixon J. D.* Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions. *Numerische Mathematik*, 1982, vol. 40, no. 1, pp. 137–142. DOI: 10.1007/BF01459082.