14. Baskakov A. G. Wiener's theorem and asymptotic estimates for elements of inverse matrices. *Funct. Anal. Appl.*, 1990, vol. 24, no. 3, pp. 222–224.
15. Baskakov A. G. Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates for elements of inverse matrices. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 764–771.
16. Baskakov A. G. Asymptotic estimates for elements of matrices of inverse operators, and harmonic analysis. *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 10–22.
17. Baskakov A. G. Estimates for the elements of inverse matrices, and the spectral analysis of linear operators. *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 6, pp. 1113–1135. DOI: 10.4213/im164.
18. Baskakov A. G. Theory of representations of Banach algebras, and abelian groups and semigroups in the spectral analysis of linear operators. *J. Math. Sci. (N. Y.)* 2006, vol. 137, no. 4, pp. 4885–5036.
19. Baskakov A. G., Krishtal I. A. Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties. *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 439–486. DOI: 10.4213/im639.
20. Kupcov N. P. Direct and inverse theorems of approximation theory and semigroups of operators. *Uspehi Mat. Nauk.*, 1968, vol. 23, no. 4, pp. 117–178. (in Russian).
21. Hille E., Phillips R. S. Functional analysis and semigroups. *AMS Colloquium Publications*. Vol. 31, rev. ed. Providence, R.I., American Math. Soc., 1957.
22. Zygmund A. *Trigonometric series*. Cambridge Univ. Press, vol. 1, 1959. 615 p.
23. Jackson D. *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*. Preisschrift und Dissertation, Universitat Gottingen, 1911.

УДК 517.518.82

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ С ВЕСОМ ЯКОБИ

М. С. Султанахмедов

Научный сотрудник, отдел математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sultanakhmedov@gmail.com

Пусть $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1$, $\lambda_N = \max\limits_{0\le j\le N-1}(\eta_{j+1} - \eta_j)$. Работа посвящена исследованию свойств полиномов, образующих ортонормированную систему с весом Якоби $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ на произвольной (не обязательно равномерной) сетке $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ такой, что $\eta_j \le t_j \le \eta_{j+1}$. В случае целых $\alpha, \beta \ge 0$ для построенных таким образом дискретных ортонормированных полиномов $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ $(n = 0, \dots, N-1)$ при $n = O(\lambda_N^{-1/3})$ $(\lambda_N \to 0)$ получена асимптотическая формула вида $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat P_n^{\alpha,\beta}(t) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$, в которой $\hat P_n^{\alpha,\beta}(t)$ –- классический полином Якоби, $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ –- остаточный член. В качестве следствия асимптотической формулы получена весовая оценка полиномов $\hat P_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Ключевые слова: ортогональные полиномы, неравномерная сетка, асимптотика, весовые оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1, \qquad (1)$$
$$\triangle\,\eta_j = \eta_{j+1} - \eta_j \qquad (0 \le j \le N-1), \qquad \lambda_N = \max_{0\le j\le N-1} \triangle\,\eta_j.$$

Рассмотрим сетку $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, в которой узлы t_j удовлетворяют условию

$$\eta_j \le t_j \le \eta_{j+1} \qquad (0 \le j \le N-1), \qquad (2)$$

причем $t_i \ne t_j$, если $i \ne j$. Для $\alpha, \beta \ge 0$ положим $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\rho = \rho(t_j) = \kappa^{\alpha,\beta}(t_j)\,\triangle\,\eta_j$. Рассмотрим пространство $l_{2,\rho}(\Omega_N)$ дискретных функций вида $f : \Omega_N \to R$, в котором скалярное произведение задано следующим образом:

$$\langle f,g\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)g(t_j)\rho(t_j) = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)g(t_j)\kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \vartriangle \eta_j. \tag{3}$$

Через $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ $(0 \le n \le N-1)$ обозначим полиномы, образующие конечную ортонормированную систему относительно скалярного произведения (3), т. е.

$$\langle \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}, \hat{P}_{m,N}^{\alpha,\beta}\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\hat{P}_{m,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \vartriangle \eta_j = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \ne m, \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

Будем называть полиномы $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ $(0 \le n \le N-1)$ дискретными ортонормированными полиномами Якоби. Основной целью данной работы является изучение асимптотических свойств $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $\lambda_N \to 0$, $n \to \infty$ в случае целых α, β. При $n = O(\lambda_N^{-1/3})$ нами получена формула вида

$$\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ — ортонормированный классический полином Якоби, $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ — остаточный член, для которого установлена следующая оценка:

$$\left|\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\theta)\right| \le c(\alpha,\beta,a)\left(\frac{3-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1-\lambda_N^2\chi^2(2n+\alpha+\beta)^4}\right)^{1/2} \begin{cases} \theta^{-\alpha-1/2}n^{3/2}\sqrt{\lambda_N}, & an^{-1} \le \theta \le \pi/2, \\ n^{\alpha+2}\sqrt{\lambda_N}, & 0 \le \theta \le an^{-1}, \end{cases}$$

где здесь и далее c, $c(\alpha)$, $c(\alpha,\beta)$, $c(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)$ — положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, и различные в разных местах, χ — наименьшая константа в интегральном неравенстве Маркова об оценке интеграла от производной алгебраического полинома (см. (6)). В качестве следствия асимптотической формулы, получены весовые оценки для полиномов $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$.

Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на дискретных сетках, впервые были исследованы в работах И. И. Шарапудинова (см. работу [1] и библиографический список к ней). Им был внесен существенный вклад в асимптотическую теорию дискретных ортогональных полиномов, в частности классических полиномов Чебышева, Мейкснера, Кравчука, ортогональных на равномерных сетках. В работах И. И. Шарапудинова [2–5] и А. А. Нурмагомедова [6, 7] были проведены исследования асимптотических свойств полиномов, ортогональных на неравномерных сетках числовой оси. В частности, в работе [7] рассмотрены асимптотические свойства дискретных полиномов Якоби $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ с целыми α, β, ортогональных на неравномерных дискретных сетках Ω_N с $t_j = (\eta_j + \eta_{j+1})/2$ $(0 \le j \le N-1)$. Как уже отмечалось выше, в настоящей работе рассматривается более общий случай, когда $\eta_j \le t_j \le \eta_{j+1}$ $(0 \le j \le N-1)$. Другие аспекты асимптотической теории дискретных ортогональных полиномов отражены в работах [8–10] и библиографических списках к ним.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства классических полиномов Якоби, которые мы соберем в следующем параграфе.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОЛИНОМАХ ЯКОБИ

Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(t)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ с помощью формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{\kappa^{\alpha,\beta}(t)}\frac{d^n}{dt^n}\{\kappa^{\alpha,\beta}(t)\sigma^n(t)\},$$

где α, β — произвольные действительные числа, $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\sigma(t) = 1-t^2$.

Если $\alpha, \beta > -1$, то многочлены Якоби образуют ортогональную систему с весом $\kappa^{\alpha,\beta}(t)$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(t)P_m^{\alpha,\beta}(t)\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta} \asymp n^{-1}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Нам понадобится следующая весовая оценка $(-1 \le t \le 1)$ [11]:

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-t}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2}\left(\sqrt{1+t}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}, \tag{4}$$

из которой, в частности, следует, что

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \qquad (0 \le t \le 1-n^{-2}),$$
$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)n^{\alpha+1/2} \qquad (1-n^{-2} \le t \le 1),$$
$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)(1+t)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \qquad (-1+n^{-2} \le t \le 0),$$
$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right| \le c(\alpha,\beta)n^{\beta+1/2} \qquad (-1 \le t \le -1+n^{-2}).$$

Соответствующие ортонормированные полиномы Якоби обозначим через $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$, т. е. $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = (h_n^{\alpha,\beta})^{-1/2}P_n^{\alpha,\beta}(t)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\{\eta_j\}_{j=0}^N$, $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ *— системы узлов, удовлетворяющие условиям* (1) *и* (2) *соответственно,* $f(x)$ *— абсолютно непрерывная функция, заданная на* $[-1, 1]$. *Тогда имеет место следующий аналог формулы Эйлера–Маклорена:*

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \bigtriangleup \eta_j + r_N(f),$$

где для остаточного члена справедлива оценка

$$|r_N(f)| \le \lambda_N \int_{-1}^{1} |f'(t)|\,dt.$$

Доказательство. Для абсолютно непрерывной функции $f(x)$ имеем:

$$f(x) = f(t_j) + \int_{t_j}^{x} f'(t)\,dt.$$

Отсюда для любого сегмента $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ справедливо

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(x)\,dx = f(t_j) \bigtriangleup \eta_j + \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} dx \int_{t_j}^{x} f'(t)\,dt.$$

Рассмотрим интеграл в правой части этого равенства

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} dx \int_{t_j}^{x} f'(t)\,dt = \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} dx \int_{t_j}^{x} f'(t)\,dt - \int_{\eta_j}^{t_j} dx \int_{x}^{t_j} f'(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} f'(t)\,dt \int_{t}^{\eta_{j+1}} dx - \int_{\eta_j}^{t_j} f'(t)\,dt \int_{\eta_j}^{t} dx = \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} f'(t)(\eta_{j+1}-t)\,dt - \int_{\eta_j}^{t_j} f'(t)(t-\eta_j)\,dt.$$

Таким образом, получаем:

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(x)\,dx = f(t_j) \vartriangle \eta_j + r_{N,j}(f),$$

где остаточный член

$$|r_{N,j}(f)| = \left| \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} f'(t)(\eta_{j+1}-t)\,dt - \int_{\eta_j}^{t_j} f'(t)(t-\eta_j)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{t_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|(\eta_{j+1}-t)\,dt + \int_{\eta_j}^{t_j} |f'(t)|(t-\eta_j)\,dt \leq$$

$$\leq \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|(\eta_{j+1}-t)\,dt + \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|(t-\eta_j)\,dt,$$

и отсюда

$$|r_{N,j}(f)| \leq \vartriangle \eta_j \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|\,dt. \tag{5}$$

В то же время имеем:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \vartriangle \eta_j + \sum_{j=0}^{N-1} r_{N,j}(f) = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \vartriangle \eta_j + r_N(f).$$

Поэтому, воспользовавшись оценкой (5), выводим

$$|r_N(f)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} |r_{N,j}(f)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \vartriangle \eta j \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|\,dt \leq \lambda_N \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} |f'(t)|\,dt = \lambda_N \int_{-1}^{1} |f'(t)|\,dt.$$

Лемма доказана.

Далее нам понадобится обобщение на интегральную метрику неравенства Маркова для оценки производной алгебраического многочлена (см. [12, 13]), имеющее для $r = 1$ следующий вид:

$$\int_{-1}^{1} |q_m'(t)|\,dt \leq c(m)m^2 \int_{-1}^{1} |q_m(t)|\,dt, \tag{6}$$

где $q_m(t)$ — произвольный алгебраический полином степени m. Для каждого m наименьшую из констант $c(m)$, удовлетворяющих неравенству (6), обозначим через χ_m, т.е.

$$\chi_m = \sup_{q_m} \frac{\int_{-1}^{1} |q_m'(t)|\,dt}{m^2 \int_{-1}^{1} |q_m(t)|\,dt},$$

где верхняя грань берется по всем полиномам $q_m(t)$ степени не выше m и не равных нулю тождественно. В работе Н. К. Бари [12] было показано, что $\chi = \sup\limits_{m \geq 1} \chi_m < \infty$. С учетом этого факта из неравенства (6) мы выводим

$$\int_{-1}^{1} |q_m'(t)|\,dt \leq \chi m^2 \int_{-1}^{1} |q_m(t)|\,dt. \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть* $\lambda_N \chi (2n+\alpha+\beta)^2 < 1$. *Тогда для дискретных полиномов Якоби в случае целых* $\alpha, \beta \geq 0$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = 1 + R_{n,N}, \tag{8}$$

в котором для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_{n,N}| \leq \frac{\lambda_N \chi (2n+\alpha+\beta)^2}{1-\lambda_N \chi (2n+\alpha+\beta)^2}.$$

Доказательство. Применим к левой части (8) лемму 1:

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \vartriangle \eta_j + r_N(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}), \tag{9}$$

где

$$|r_N(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta})| \leq \lambda_N \int\limits_{-1}^{1} \left| \left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \right)' \right| dt. \tag{10}$$

Поскольку для целых $\alpha, \beta \geq 0$ выражение $\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)$ представляет собой алгебраический полином степени $m = 2n+\alpha+\beta$, то в силу интегрального неравенства Маркова (7) имеем:

$$\int\limits_{-1}^{1} \left| \left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \right)' \right| dt \leq \chi m^2 \int\limits_{-1}^{1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt. \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) следует, что

$$|r_N(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta})| \leq \lambda_N \chi m^2 \int\limits_{-1}^{1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt.$$

Отсюда и из (9) выводим

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt \leq 1 + \lambda_N \chi m^2 \int\limits_{-1}^{1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt \leq \frac{1}{1-\lambda_N \chi m^2} = 1 + \frac{\lambda_N \chi m^2}{1-\lambda_N \chi m^2}.$$

Сопоставляя это неравенство с (8), убеждаемся в справедливости леммы 2.

Лемма 3. *Имеет место следующее неравенство:*

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} \geq 1 - \frac{\lambda_N \chi (2n+\alpha+\beta)^2}{1+\lambda_N \chi (2n+\alpha+\beta)^2},$$

где $k_n^{\alpha,\beta}, k_{n,N}^{\alpha,\beta}$ *— старшие коэффициенты полиномов* $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}$ *и* $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}$ *соответственно.*

Доказательство. В силу свойства экстремальности ортогональных полиномов имеем:

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} = \frac{1}{k_n^{\alpha,\beta} \left(\sum\limits_{j=0}^{N-1} \left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t_j)/k_{n,N}^{\alpha,\beta}\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t_j) \vartriangle \eta_j \right)^{1/2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{k_n^{\alpha,\beta}\left(\sum\limits_{j=0}^{N-1}\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j)/k_n^{\alpha,\beta}\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t_j)\,\triangle\,\eta_j\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=0}^{N-1}\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j)\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t_j)\,\triangle\,\eta_j\right)^{1/2}}. \tag{12}$$

Воспользовавшись леммой 1, находим:

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t_j)\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t_j)\,\triangle\,\eta_j = \int\limits_{-1}^{1}\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt - r_N = 1 - r_N \leq 1 + |r_N|,$$

где

$$|r_N| = |r_N\left(\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}\right)| \leq \lambda_N\int\limits_{-1}^{1}\left|\left(\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t)\right)'\right|\,dt. \tag{13}$$

Сопоставляя (13) с неравенством (7), получаем

$$|r_N| \leq \lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2\int\limits_{-1}^{1}\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = \lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2. \tag{14}$$

Таким образом, из (12) и (14) следует

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} \geq \frac{1}{(1+\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2)^{1/2}} \geq \frac{1}{1+\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2} = 1 - \frac{\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1+\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *При целых $\alpha,\beta \geq 0$ и $\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2 < 1$ имеет место следующая оценка сверху*

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} \leq \frac{1}{(1-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2)^{1/2}}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся интегральным неравенством Коши–Буняковского и леммой 2:

$$\frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}} = \int\limits_{-1}^{1}\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt \leq \left(\int\limits_{-1}^{1}\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-1}^{1}\left(\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\right)^2\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2)^{1/2}}.$$

Лемма доказана.

Ниже нам понадобится следующее

Утверждение 1. *Пусть $\alpha,\beta > -1$, $M_n(x)$ — произвольный полином степени n, подчиненный условию*

$$\int\limits_{-1}^{1}\kappa^{\alpha,\beta}(x)|M_n(x)|^2\,dx = 1.$$

Тогда имеет место следующая оценка:

$$|M_n(\cos(\theta))| \leq c(\alpha,\beta,a)\begin{cases} n^{\alpha+1}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1},\\ \theta^{-\alpha-1/2}n^{1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases} \tag{15}$$

Аналогичные оценки справедливы на отрезке $\theta \in [\pi/2,\pi]$.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [11, §7.71, теорема 7.71.2].

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$

Далее, для краткости все рассуждения мы будем проводить на отрезке $\theta \in [0, \pi/2]$, для отрезка $\theta \in [\pi/2, \pi]$ они получаются абсолютно аналогично.

Теорема 1. *Пусть $0 \le \alpha, \beta$ — целые, $\lambda_N \chi (2n+\alpha+\beta)^2 < 1$. Тогда имеет место равенство:*

$$\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t),$$

где для остаточного члена $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}$ имеет место оценка (здесь $t = \cos\theta$)

$$\left|\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\theta)\right| \le c(\alpha,\beta,a)\left(\frac{3-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1-\lambda_N^2\chi^2(2n+\alpha+\beta)^4}\right)^{1/2}\begin{cases} n^{\alpha+2}\sqrt{\lambda_N}, & 0 \le \theta \le an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}n^{3/2}\sqrt{\lambda_N}, & an^{-1} \le \theta \le \pi/2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1}\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) - \hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = \int_{-1}^{1}\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt +$$

$$+\int_{-1}^{1}\left(\hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt - 2\int_{-1}^{1}\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = I_1 + 1 - 2I_2. \tag{16}$$

Оценим сначала интеграл I_1, для чего воспользуемся леммой 1. Тогда

$$I_1 = \int_{-1}^{1}\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t) \vartriangle \eta_j + r_N(I_1), \tag{17}$$

$$|r_N(I_1)| = \left|r_N\left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}\right)\right| \le \lambda_N \int_{-1}^{1}\left|\left(\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\right)'\right| dt.$$

Отсюда в силу неравенства (7) получим:

$$|r_N(I_1)| \le \lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2\int_{-1}^{1}\left|\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\right| dt.$$

Тогда из (17) находим

$$I_1 \le 1 + \lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2 I_1.$$

Откуда

$$I_1 \le \frac{1}{1-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2} = 1 + \frac{\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}. \tag{18}$$

Перейдем к оценке интеграла I_2:

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)\hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)\kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}}\int_{-1}^{1}\left(\hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt = \frac{k_{n,N}^{\alpha,\beta}}{k_n^{\alpha,\beta}}.$$

Воспользуемся леммой 3, тогда:

$$I_2 \ge 1 - \frac{\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1+\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}. \tag{19}$$

Сопоставляя (18) и (19) с (16), получим:

$$\int_{-1}^{1}\left(\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) - \hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)\right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\,dt \le \frac{\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2} + \frac{2\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1+\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2} = A,$$

где

$$A = \lambda_N \chi (2n+\alpha+\beta)^2 \frac{3-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1-\lambda_N^2\chi^2(2n+\alpha+\beta)^4}.$$

В силу того что по условию теоремы $A \neq 0$, можем записать

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) - \hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(t)}{\sqrt{A}} \right)^2 \kappa^{\alpha,\beta}(t)\, dt \leq 1.$$

Откуда, воспользовавшись (15), выводим ($t = \cos\theta$):

$$\left| \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\theta) - \hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(\cos\theta) \right| \leq c(\alpha,\beta,a)\sqrt{A} \begin{cases} n^{\alpha+1}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}n^{1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Подставляя сюда значение A, приходим к искомой оценке. Теорема доказана.

Обозначим для краткости

$$B = \left(\frac{3-\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2}{1-\lambda_N^2\chi^2(2n+\alpha+\beta)^4} \right)^{1/2}.$$

Следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $0 \leq \alpha, \beta$ *— целые и* $\lambda_N\chi(2n+\alpha+\beta)^2 < 1$*, тогда существует постоянная* $c(\alpha,\beta,a)$ *такая, что:*

$$\left| \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\theta) \right| \leq c(\alpha,\beta,a) \left(1 + B\sqrt{n^3\lambda_N} \right) \begin{cases} n^{\alpha+1/2}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Доказательство. Весовая оценка (4) для ортонормированных классических полиномов Якоби $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}$ принимает вид

$$\left| \hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(\cos\theta) \right| \leq c(\alpha,\beta,a) \begin{cases} n^{\alpha+1/2}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь теоремой 1, проведем следующую оценку

$$\left| \hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\theta) \right| \leq \left| \hat{P}_{n}^{\alpha,\beta}(\cos\theta) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\theta) \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} c(\alpha,\beta,a)n^{\alpha+1/2} + c(\alpha,\beta,a)Bn^{\alpha+2}\sqrt{\lambda_N}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1} \\ c(\alpha,\beta,a)\theta^{-\alpha-1/2} + c(\alpha,\beta,a)Bn^{3/2}\theta^{-\alpha-1/2}\sqrt{\lambda_N}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases} \leq$$

$$\leq c(\alpha,\beta,a) \left(1 + B\sqrt{n^3\lambda_N} \right) \begin{cases} n^{\alpha+1/2}, & 0 \leq \theta \leq an^{-1}, \\ \theta^{-\alpha-1/2}, & an^{-1} \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность И. И. Шарапудинову за постановку задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : ДНЦ РАН, 2004. 276 с.

2. *Шарапудинов И. И.* Асимптотика полиномов, ортогональных на сетках из единичной окружности и числовой прямой // Современные проблемы математики, механики, информатики : материалы междунар. науч. конф. Тула : Изд-во ТулГУ, 2009. С. 100–106.

3. *Шарапудинов И. И.* Некоторые свойства полиномов, ортогональных на неравномерных сетках из единичной окружности и отрезка // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 15-й Сарат. зим. шк., посвящ. 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов : Научная книга, 2010. С. 187.
4. *Шарапудинов И. И.* Асимптотические свойства полиномов, ортогональных на конечных сетках единичной окружности // Вестн. Дагестан. науч. центра. 2011. № 42. С. 5–14.
5. *Шарапудинов И. И.* Полиномы, ортогональные на сетках из единичной окружности и числовой оси // Дагестан. электрон. мат. изв. 2013. Т. 1. С. 1–55.
6. *Нурмагомедов А. А.* Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 1. С. 25–31.
7. *Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып 2. С. 10–19.
8. *Baik J., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Miller P. D.* Discrete orthogonal polynomials. Asymptotics and applications. Princeton : Princeton Univ. Press, 2007. 184 p.
9. *Ou C., Wong R.* The Riemann-Hilbert approach to global asymptotics of discrete orthogonal polynomials with infinite nodes // Analysis and Applications. 2010. Vol. 8. P. 247–286.
10. *Ferreira C., Lo´pez J.L., Sinusía E.P.* Asymptotic relations between the Hahn-type polynomials and Meixner–Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials // J. of Comp. and Appl. Math. 2008. Vol. 217. P. 88–109.
11. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 500 с.
12. *Бари Н.К.* Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1954. Т. 18, № 2. С. 159—176.
13. *Конягин С.В.* О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике L // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1980. № 145. С. 117–125.

Asymptotic Properties and Weighted Estimation of Polynomials, Orthogonal on the Nonuniform Grids with Jacobi Weight

M. S. Sultanakhmedov

Department of mathematics and computer science, Daghestan scientific center, 45, M. Gadzhieva str., 367000, Makhachkala, Daghestan, Russia, sultanakhmedov@gmail.com

Let $-1 = \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{N-1} < \eta_N = 1, \lambda_N = \max\limits_{0 \le j \le N-1}(\eta_{j+1} - \eta_j)$. Current work is devoted to investigation of properties of polynomials, orthogonal with Jacobi weight $\kappa^{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ on nonuniform grid $\Omega_N = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$, where $\eta_j \le t_j \le \eta_{j+1}$. In case of integer $\alpha, \beta \ge 0$ for such discrete orthonormal polynomials $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ $(n = 0, \dots, N-1)$ asymptotic formula $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) + \upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ with $n = O(\lambda_N^{-1/3})$ $(\lambda_N \to 0)$ was obtained, where $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ –- classical Jacobi polynomial, $\upsilon_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ –- remainder term. As corollary of asymptotic formula it was deduced weighted estimation of $\hat{P}_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ polynomials on segment $[-1, 1]$.

Key words: orthogonal polynomials, nonuniform grid, asymptotic formula, weighted estimation.

References

1. Sharapudinov I. I. Smeshannye riady po ortogonal'nym polinomam. Teoriia i prilozheniia [Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications]. Makhachkala, 2004, 276 p. (in Russian).
2. Sharapudinov I. I. Asimptotika polinomov, ortogonal'nykh na setkakh iz edinichnoi okruzhnosti i chislovoi priamoi [Asymptotics of polynomials orthogonal on grids of the unit circle and the number line]. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: materialy mezhdunar. nauch. konf.* Russia, Tula, 2009, pp. 100-106 (in Russian) .
3. Sharapudinov I. I. Nekotorye svoistva polinomov, ortogonal'nykh na neravnomernykh setkakh iz edinichnoi okruzhnosti i otrezka [Some properties of polynomials orthogonal on nonuniform grids of the unit circle and the segment]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia. Materialy 15-i Saratovskoi zimnei shkoly, posviashchennoi 125-letiiu so dnia rozhdeniia V. V. Golubeva i 100-letiiu SGU*. Saratov, 2010, pp. 187 (in Russian).
4. Sharapudinov I. I. Asymptotic properties of the polynomials orthogonal on the finite nets of the unite circle [Asimptoticheskie svoistva polinomov, ortogonal'nykh na konechnykh setkakh edinichnoi okruzhnosti]. *Vestnik Dagestanskogo nauchnogo tsentra*, 2011, no. 42, pp. 5–14 (in Russian).

5. Sharapudinov I. I. Polynomials, orthogonal on grids from unit circle and number axis. *Dagestanskie elektronnye matematicheskie izvestiia* [Daghestan electronic mathematical reports], 2013, vol. 1, pp. 1–55 (in Russian).
6. Nurmagomedov A. A. About approximation polynomials, orthogonal on random grids. *Izv. Sarat. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, iss. 1, pp. 25–31 (in Russian).
7. Nurmagomedov A. A. Asymptotic properties of polynomials $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, orthogonal on any sets in the case of integers α and β. *Izv. Sarat. Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, iss. 2, pp. 10–19 (in Russian).
8. Baik J., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Miller P. D. *Discrete orthogonal polynomials. Asymptotics and applications*. Princeton, Princeton Univ. Press, 2007, 184 p.
9. Ou C., Wong R. The Riemann–Hilbert approach to global asymptotics of discrete orthogonal polynomials with infinite nodes. *Analysis and Applications*, 2010, vol. 8, pp. 247–286.
10. Ferreira C., López J. L., Sinusía E. P. Asymptotic relations between the Hahn-type polynomials and Meixner–Pollaczek, Jacobi, Meixner and Krawtchouk polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, vol. 217, pp. 88–109.
11. Szego G. *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloq. Publ, 1939, vol. 23, 154 p.
12. Bari N. K. Generalization of inequalities of S. N. Bernshtein and A. A. Markov. *Izv. AS USSR. Ser. matem.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 159–176 (in Russian).
13. Konyagin S. V. V. A. Markov's inequality for polynomials in the metric of L [O neravenstve V. A. Markova dlia mnogochlenov v metrike L]. *Trudy Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklova*, 1980, no. 145, pp. 117–125 (in Russian).

УДК 517.5

ПРОЕКТИВНОЕ И ИНЪЕКТИВНОЕ ОПИСАНИЯ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

А. Б. Шишкин

Доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет, филиал в г. Славянске-на-Кубани, Shishkin-home@mail.ru

Исследования инвариантных подпространств дифференциальных операторов бесконечного порядка в комплексной области породили целый ряд вопросов, связанных с переходом к двойственным задачам. Настоящая работа посвящена преодолению этих трудностей.

Ключевые слова: инвариантные подпространства, спектральный синтез, локальное описание, инъективное описание, проективное описание, двойственность.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — произвольное локально выпуклое пространство над полем $\mathbf{C}$, $\pi : H \to H$ — линейный непрерывный оператор. Подпространство $W \subseteq H$ называется инвариантным относительно оператора π (далее просто инвариантным или π-инвариантным), если $\pi W \subseteq W$. Основной вопрос по отношению к произвольному замкнутому π-инвариантному подпространству $W \subseteq H$: возможно ли инъективное (внутреннее) описание этого подпространства, например, в терминах корневых подпространств оператора π? Корневым подпространством оператора π, отвечающим собственному значению $\lambda \in \mathbf{C}$, называется непустое подпространство $\{x \in H : (\pi - \lambda)^n x = 0, n \in \mathbf{N}\}$. Элементы этого подпространства принято называть корневыми. Говорят, что замкнутое π-инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез, если замыкание линейной оболочки корневых элементов оператора π, лежащих в W, совпадает с W. Задача спектрального синтеза для оператора π состоит в нахождении условий, при которых замкнутое π-инвариантное подпространство $W \subseteq H$ допускает спектральный синтез.

Если H — конечномерное пространство, то любое инвариантное подпространство является прямой суммой конечного множества корневых подпространств. Из теоремы Гильберта–Шмидта о спектраль-

