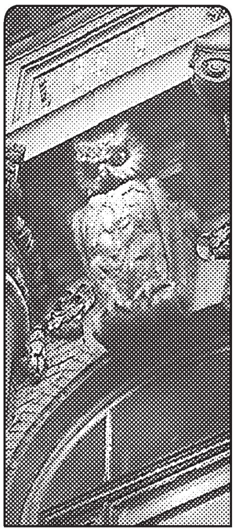

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Алматы, Казахстан, aldash51@mail.ru

В работе для модельного многомерного эллиптико-параболического уравнения показана однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Ключевые слова: уравнение, задача, область, функция.

Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задачи Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. Дальнейшее изучение этой задачи приведено в [2].

В работе для модельного многомерного эллиптико-параболического уравнения доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1,\ldots,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное смешанное эллиптико-параболическое уравнение:

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u + u_{tt},\ t > 0, \\ \Delta_x u - u_t,\ t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим r, $\theta_1,\ldots$, θ_{m-1}, t, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2,3,\ldots,m-1$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \qquad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t,\theta), \qquad u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(t,\theta), \tag{3}$$

при этом $\varphi_1(1,\theta) = \psi_1(\alpha,\theta)$, $\varphi_2(1,\theta) = \psi_2(\beta,\theta)$, $\psi_1(0,\theta) = \psi_2(0,\theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0,1,\ldots$ — пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [3].

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \ge m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам:*

$$|f_0^1(r)| \le c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f_n^k(r)|^2 \le c_2, \qquad c_1,\ c_2 = \mathrm{const}.$$

Обозначим через $\bar\varphi_{2n}^k(r)$, $\psi_{2n}^k(t)$ коэффициенты ряда (4) разложений функций $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$ соответственно. Тогда справедлива

Теорема. *Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $l > 3m/2$, то задача 1 однозначно разрешима.*

Доказательство. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \qquad g_1 = 1, \qquad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \qquad j > 1.$$

Известно [3], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar u_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [3], будем иметь

$$\bar u_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar u_{nr}^k - \bar u_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar u_n^k = 0, \qquad k = \overline{1,k_n}, \qquad n = 0,1,\ldots\,, \tag{7}$$

при этом краевое условие (3) с учетом леммы 1 соответственно запишется в виде

$$\bar u_n^k(r,\beta) = \bar\varphi_{2n}^k(r), \qquad \bar u_n^k(1,t) = \psi_{2n}^k(t), \qquad k = \overline{1,k_n}, \qquad n = 0,1,\ldots\,. \tag{8}$$

В (7), (8) произведем замену переменных $\bar\upsilon_n^k(r,t) = \overline{u}_n^k(r,t) - \psi_{2n}^k(t)$ и получим:

$$\bar\upsilon_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar\upsilon_{nr}^k - \bar\upsilon_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar\upsilon_n^k = \overline{f}_n^k(r,t), \tag{9}$$

$$\bar\upsilon_n^k(r,\beta) = \varphi_{2n}^k(r), \quad \bar\upsilon_n^k(1,t) = 0, \qquad k = \overline{1,k_n}, \qquad n = 0,1,\ldots\,, \tag{10}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t) = \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{2n}^k(t), \qquad \varphi_{2n}^k(r) = \overline{\varphi}_{2n}^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta).$$

Произведя замену переменной $\bar{\upsilon}_n^k(r,t) = r^{(1-m)/2}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (9), (10) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k - \upsilon_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k = f_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(r,\beta) = \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \qquad f_n^k(r,t) = r^{(m-1)/2}\bar{f}_n^k(r,t), \qquad \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{(m-1)/2}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k r, t + \upsilon_{2n}^k(r,t),$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k = f_n^k r, t, \tag{13}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\beta) = 0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{14}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$– решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k = 0, \tag{15}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\beta) = \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r), \qquad \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{16}$$

Решение вышеуказанных задач аналогично [4] рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учетом (18) получим:

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0 < r < 1, \tag{19}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad \left|R_s(0)\right| < \infty, \tag{20}$$

$$T_{st} + \mu_{s,n} T_s = -a_{s,n}^k(t), \qquad \beta < t < 0, \tag{21}$$

$$T_s(\beta) = 0. \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является [5]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{23}$$

где $\nu = n + (m-2)/2$, $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (21), (22) является

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\mu_{s,n}^2 t)) \int_t^\beta a_{s,n}^k(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \xi)\, d\xi. \tag{24}$$

Подставляя (23) в (18) получим:

$$r^{-1/2} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad r^{-1/2}\tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad 0 < r < 1. \tag{25}$$

Ряды (25) — разложения в ряды Фурье–Бесселя [6], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{26}$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{27}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1,2,\ldots$, — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (17),(23), (24) получим решение задачи (13), (14)

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяется из (26).

Далее, подставляя (17) в (15), (16), с учетом (18) будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \qquad \beta < t < 0, \qquad T_s(\beta) = b_{s,n}^k,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n}^k \exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t). \tag{29}$$

Из (23), (29) получим:

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k \sqrt{r} (\exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{30}$$

где $b_{s,n}^k$ находится из (27).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{(1-m)/2} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{31}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (28), (30).

Учитывая формулу $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ [6], оценки [3, 4]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \qquad \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \qquad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{m/2-1+l}, \qquad j = \overline{1, m-1}, \qquad l = 0,1,\ldots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_2(t,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, как в [7], можно доказать, что полученное решение (31) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (28), (30),(31) при $t \to -0$ имеем:

$$u(r,\theta,t) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{32}$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{(2-m)/2} \left[\int_0^\beta a_{s,n}^k(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi + b_{s,n}^k (\exp \mu_{s,n}^2 \beta) \right] J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n} r).$$

Из (26)–(28), (30), а также из лемм 1 и 2, вытекает, что $\tau(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2) и (32), мы приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для многомерного уравнения Лапласа:

$$\Delta_x u + u_{tt} = 0 \tag{33}$$

с данными

$$u|_S = \tau(r,\theta), \qquad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \qquad u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \tag{34}$$

которое имеет единственное решение в классе $C(\overline{\Omega}_\alpha)\bigcap C^2(\Omega_\alpha)$ [7, 8].

В [7, 8] приводится явный вид решения (33), (34), поэтому можно записать представления решения и для задачи (1). Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка // Сб. переводов. Математика. 1963. Т. 7, № 6. С. 99–121.
2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2010. 360 с.
3. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М : Наука, 1977. 659 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 2 т. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Справочная математическая библиотека. М. : Наука, 1974. 297 с.
7. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. Новосиб. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
8. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7.

Well-posedness of the Dirichlet Problem in a Cylindrical Domain for Multidimensional Elliptic-parabolic Equation

S. A. Aldashev

Kazakh National Pedagogical University named after Abai, 13, Dostyk ave., 050010, Almaty, Kazakhstan, aldash51@mail.ru

A unique solvability of classic solutions to Dirichlet's problem in the cylindrical domain for the model multidimensional elliptic-parabolic equation is shown in the article.

Key words: equation, problem, domain, function.

References

1. Fikera G. K edinoi teorii kraevykh zadach dlia elliptiko-parabolicheskikh uravnenii vtorogo poriadka [The unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order]. *Sbornik perevodov. Matematika*. 1963, vol. 7, no. 6, pp. 99–121 (in Russian).

2. Oleinik O. A., Radkevich E. V. *Uravneniia s neotritsatel'noi kharakteristicheskoi formoi* [Equations with nonnegative characteristic form]. Moscow, Moscow Univ. Press, 2010, 360 p. (in Russian).

3. *Mihlin S. G. Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya* [Higher-dimensional singular integrals and integral equations]. Moscow, Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., 1962, 254 p. (in Russian).

4. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of mathematical physics*. Translated from the Russian by A. R. M. Robson and P. Basu. Reprint of the 1963 translation. New York, Dover Publications, Inc., 1990. 765 p.

5. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym* [Manual of ordinary differential equations]. Third revised edition. Translated from the German by S. V. Fomin. Moscow, Nauka, 1965, 703 p. (in Russian).

6. Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye*

funktsii. T. II: Funktsii Besselya, funktsii paraboliches-kogo tsilindra, ortogonal'nye mnogochleny [Higher transcendental functions. Vol. II: Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials]. Translated from the English by N. Ja. Vilenkin. Second edition, unrevised. Spravochnaya Matematicheskaya Biblioteka [Mathematical Reference Library]. Moscow, Nauka, 1974. 295 p. (in Russian).

7. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for one class of multi-dimensional elliptic equations. *Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ. Ser. Math., mech., inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).

8. Aldashev S. A. The correctness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for equation Laplase. *Izv. Saratov. Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian).

УДК 517.95; 517.984

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТЕЙШЕГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

М. Ш. Бурлуцкая[1], А. П. Хромов[2]

[1] Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, bmsh2001@mail.ru

[2] Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Исследуется смешанная задача для дифференциального уравнения первого порядка с инволюцией в потенциале и с периодическими краевыми условиями. Получены уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи, на основе которых проводится обоснование применения метода Фурье. Использованы приемы, позволяющие избежать исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье и получить классическое решение при минимальных требованиях на начальные данные задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, инволюция, метод Фурье, классическое решение, асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака.

В данной работе методом Фурье решается следующая смешанная задача с инволюцией:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q(x)u(1-x,t), \qquad x \in [0,1], \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $q(x)$ — комплекснозначная функция из $C^1[0,1]$ такая, что $q(0) = q(1)$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным минимальным требованиям: $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Как и в [1, 2], где также рассматривается простейшая смешанная задача с инволюцией при производной $u_x(x,t)$, применяя идеи А. Н. Крылова [3] и В. А. Чернятина [4], мы избегаем исследования равномерной сходимости почленно продифференцированного формального решения по методу Фурье. Это позволяет получить классическое решение задачи при минимальных требованиях на $\varphi(x)$.

1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

1. Введем оператор L:

$$Ly = l[y] = y'(x) + q(x)y(1-x), \quad y(0) = y(1).$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу $Ly = \lambda y$:

$$y'(x) + q(x)y(1-x) = \lambda y(x), \tag{4}$$