УДК 517.983.2

ОБ УСЛОВИИ s-РЕГУЛЯРНОСТИ Н. П. КУПЦОВА

В. П. Скляров

Саратовский государственный университет
E-mail: sklyarovvp@sgu.ru

Исследуется условие s-регулярности для оператора $Qy = -y''(x) + x^2y(x)$ в пространствах $L^p(-\infty, \infty)$.

Ключевые слова: многочлены и функции Эрмита, s-регулярность.

The Condition of N. P. Kuptsov s-regularity

V. P. Sklyarov

We investigate the condition of s-regularity for the operator $Qy = -y''(x) + x^2y(x)$ in the spaces $L^p(-\infty, \infty)$.

Key words: polynomials and Hermite functions, s-regularity.

Предполагается, что линейный оператор Q действует из банахова пространства X в X, $R_\lambda(Q) = \left(Q - \lambda E\right)^{-1}$. Следующее понятие было введено Н. П. Купцовым [1, с. 137] в 1968 г.

Определение. Оператор Q будем называть *s-регулярным*, если при некотором натуральном s существует действительное число θ такое, что

$$\left\|R_\lambda\left(e^{i\theta}Q^s\right)\right\| \le \frac{C}{|\mathrm{Im}\lambda|},$$

где C не зависит от λ.

Пусть $Qy = -y''(x) + x^2y(x)$, а в роли пространства X выступает $L^p(-\infty, \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L^p(-\infty,\infty)} = \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}, \qquad p \ge 1.$$

В 1976 г. Н. П. Купцовым был поставлен вопрос о s-регулярности оператора Q в пространстве $C_0(-\infty, \infty)$. Ответ оказался отрицательным [2]. Ниже исследуется s-регулярность оператора Q в пространствах $L^p(-\infty, \infty)$.

Известно [3, с. 114], что ортонормированную систему функций этого оператора образуют функции Эрмита, определяемые равенством

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\rho(x)H_\nu(x)}{\sqrt{2^\nu \nu! \sqrt{\pi}}}.$$

Здесь $H_\nu(x)$ — полином Эрмита:

$$H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(e^{-x^2}\right), \qquad \rho(x) = e^{-x^2/2}.$$

Собственные числа оператора задает последовательность $\lambda_\nu = 2\nu + 1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, следовательно, $Q\varphi_\nu = \lambda_\nu\varphi_\nu$.

Нетрудно заметить, что при $p = 2$ имеем $R_\lambda f = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{a_\nu}{\lambda_\nu - \lambda}\,\varphi_\nu(x)$, где $a_\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx$. Все собственные значения λ_ν вещественные, поэтому легко получаем оценку

$$\|R_\lambda f\|^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu^2}{|\lambda_\nu - \lambda|^2} \le \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|^2}\,\|f\|^2.$$

Таким образом, в пространстве $L^2_{(-\infty,\infty)}$ рассматриваемый оператор 1-регулярен.

Пусть $S_n f = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu\varphi_\nu(x)$, известно [1, с. 151, следствие 2.1.1], что в этом случае наличие s-регулярности влечет порядковое равенство $\|S_n\| = O(\ln(n+1))$, а в [4, p. 189, theorem 2] было доказано: существует натуральная подпоследовательность n_k такая, что

$$\|S_{n_k}\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}} \ge C_1 \begin{cases} (n_k)^{\frac{2}{3p}-\frac{1}{2}}, & 1 \le p \le 4/3, \\ 1, & 4/3 \le p \le 4, \\ (n_k)^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3p}}, & 4 < p \le \infty. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, если $p \notin [4/3, 4]$, то оператор Q не может быть s-регулярным при любом s. Одновременно с этим справедливо утверждение.

Теорема. *Если $p \in (4/3, 4)$, то при любом натуральном s оператор $Qy = -y'' + x^2 y$ будет s-регулярным в пространстве $L^p(-\infty, \infty)$.*

Доказательство. В [5] было доказано, что в этом случае нормы операторов $S_n f = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu(f)\,\varphi_\nu(x)$ ограничены числом, не зависящим от n. Поскольку область определения D_Q всюду плотна в $L^p_{(-\infty,\infty)}$, то на D_Q резольвента оператора Q^s будет задаваться равенством

$$R_\lambda(Q^s) f = (Q^s - \lambda E)^{-1} f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\lambda_\nu^s - \lambda}\,\varphi_\nu(x).$$

Применив преобразование Абеля в правой части, получим

$$R_\lambda(Q^s) f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{(\lambda_{\nu+1}^s - \lambda)(\lambda_\nu^s - \lambda)}\, S_\nu f.$$

Последнее представление резольвенты влечет оценку

$$\|R_\lambda(Q^s) f\| \le C_2\, \|f\| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|\left(\lambda_{\nu+1}^s - \lambda\right)\left(\lambda_\nu^s - \lambda\right)\right|}.$$

Пусть $\operatorname{Re}\lambda = \alpha$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta \ne 0$ и $\alpha \in [\lambda_{\nu_\alpha}^s, \lambda_{\nu_\alpha+1}^s)$, тогда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|\left(\lambda_{\nu+1}^s - \lambda\right)\left(\lambda_\nu^s - \lambda\right)\right|} = \sum_{\nu=0}^{\nu_\alpha - 1} + \frac{\lambda_{\nu_\alpha+1}^s - \lambda_{\nu_\alpha}^s}{\left|\left(\lambda_{\nu_\alpha+1}^s - \lambda\right)\left(\lambda_{\nu_\alpha}^s - \lambda\right)\right|} + \sum_{\nu=\nu_\alpha+1}^{\infty} := I_1 + I_2 + I_3.$$

Независимо от того в левой или правой половине промежутка $[\lambda_{\nu_\alpha}^s, \lambda_{\nu_\alpha+1}^s)$ оказывается α, справедливо неравенство $I_2 \le 2/|\beta|$, а для каждой из сумм имеем:

$$I_1 \le \sum_{\nu=0}^{\nu_\alpha-1} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|\lambda_{\nu+1}^s - \lambda\right|^2}, \qquad I_3 \le \sum_{\nu=\nu_\alpha+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\left|\lambda_\nu^s - \lambda\right|^2}.$$

Поскольку $\lambda_\nu = 2\nu + 1$, то теорема Лагранжа дает равенства $\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s = 2s(\xi_\nu)^{(s-1)}$, где $\xi_\nu \in (\lambda_{\nu+1}, \lambda_\nu)$, поэтому

$$\frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} \ge 1.$$

С другой стороны, $\lambda_{\nu+1} = \lambda_\nu + 2$, следовательно,

$$\frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} = \left[\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}}\right]^s \frac{\left(1 + \frac{2}{\lambda_\nu}\right)^s - 1}{\left(1 + \frac{2}{\lambda_{\nu-1}}\right)^s - 1} \le \left[1 + \frac{1}{\nu - \frac{1}{2}}\right]^s \le 3^s.$$

Отсюда приходим к двухсторонней оценке:

$$1 \le \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} \le 3^s.$$

Возвращаясь к величинам I_1, I_3, заключаем

$$I_1 \le \sum_{\nu=0}^{\nu_\alpha-1} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_{\nu+2}^s - \lambda_{\nu+1}^s} \cdot \frac{\lambda_{\nu+2}^s - \lambda_{\nu+1}^s}{\left|\lambda_{\nu+1}^s - \lambda\right|^2} \le \int\limits_0^{\lambda_{\nu_\alpha}} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

$$I_3 \le \sum_{\nu=\nu_\alpha+1}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu+1}^s - \lambda_\nu^s}{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s} \cdot \frac{\lambda_\nu^s - \lambda_{\nu-1}^s}{\left|\lambda_\nu^s - \lambda\right|^2} \le 3^s \int\limits_{\lambda_{\nu_\alpha}}^{\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Таким образом,

$$I_1 + I_3 \leq 2\cdot 3^s \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}. \leq 2\cdot 3^s \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+\beta^2} = \frac{4\pi\cdot 3^s}{|\beta|}.$$

Теорема доказана. □

Следствие. *Оператор $Qy = -y'' + x^2 y$ будет s-регулярным при любом натуральном s в пространстве $L^p_{(-\infty,\infty)}$ тогда и только тогда, когда $p \in (4/3, 4)$.*

Доказательство. Выше уже отмечалось, что при $p \notin [4/3, 4]$ оператор Q не может быть s-регулярным, поэтому для доказательства следствия достаточно убедиться в отсутствии s-регулярности при $p = 4/3, 4$.

Предположив противное, с помощью [1, с. 140, лемма 2.4] заключаем, что нормы операторов $\operatorname*{res}\limits_{\lambda=\lambda_\nu} R_\lambda$ должны быть ограничены величиной, не зависящей от номера собственного значения. Легко заметить, что при любом $f \in L^p(-\infty,\infty)$ имеет место оценка

$$\left\| \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} R_\lambda \right\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}\to L^p_{(-\infty,\infty)}} \geq \frac{\|\varphi_n\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)\varphi_n(s)\,ds \right|}{\|f\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}}}. \tag{1}$$

Естественно, величина правой части в неравенстве (1) существенно зависит от выбора элемента f. Воспользуемся асимптотическим соотношением для L^p-нормы функции Эрмита из [4, p. 190, (2.6)]

$$\|\varphi_n\|_{L^p_{(-\infty,\infty)}} \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}}, & 1 \leq p < 4, \\ n^{-\frac{1}{8}}(\ln(n))^{\frac{1}{4}}, & p = 4, \\ n^{-\frac{1}{6p}-\frac{1}{12}}, & 4 < p \leq \infty. \end{cases}$$

Знак $f(n) \sim g(n)$ здесь означает наличие двусторонней оценки $Ag(n) \leq f(n) \leq Bg(n)$, в которой величины A, B не зависят от n. Очевидно, одновременно с этим справедливо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(s)|^p\,ds \sim \begin{cases} n^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}}, & 1 \leq p < 4, \\ n^{-\frac{1}{2}}\ln(n), & p = 4, \\ n^{-\frac{1}{6}-\frac{p}{12}}, & 4 < p \leq \infty. \end{cases}$$

Вернемся к (1), положив $p = 4/3$ и $f(x) = \varphi_n^3(x)$, это влечет цепочку неравенств:

$$\left\| \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} R_\lambda \right\|_{L^{\frac{4}{3}}_{(-\infty,\infty)}\to L^{\frac{4}{3}}_{(-\infty,\infty)}} \geq C_3 \frac{n^{\frac{1}{8}}\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(n)}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(s)|^4\,ds\right]^{\frac{3}{4}}} \geq C_4 \frac{n^{\frac{1}{8}}\cdot n^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(n)}{\left[n^{-\frac{1}{2}}\cdot \ln(n)\right]^{\frac{3}{4}}} = C_4\cdot \ln^{\frac{1}{4}}(n). \tag{2}$$

При $p = 4$ полагаем $f(x) = \varphi_n^{\frac{1}{3}}(x)$ и получаем

$$\left\| \operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} R_\lambda \right\|_{L^4_{(-\infty,\infty)}\to L^4_{(-\infty,\infty)}} \geq C_5 \frac{n^{-\frac{1}{8}}\cdot [\cdot\ln(n)]^{\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(s)|^{\frac{4}{3}}\,ds\right]^{\frac{1}{4}}} \geq C_6 \frac{n^{-\frac{1}{8}}\cdot [\cdot\ln(n)]^{\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}{\left[n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} = C_6\cdot \ln^{\frac{1}{4}}(n). \tag{3}$$

Отсюда следует, что нормы операторов $\operatorname*{res}\limits_{\lambda=\lambda_\nu} R_\lambda$ не могут быть ограничены величиной, не зависящей от номера собственного значения. Полученное противоречие доказывает следствие. □

Библиографический список

1. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, № 4(142). С. 117–178. [*Kuptsov N. P.* Direct and converse theorems of approximation theory and semigroups of operators // Russ. Math. Surv. 1968. Vol. 23, № 4. P. 115–177.]

2. *Скляров В. П.* Еще раз о равномерных приближениях функциями Эрмита // Дифференциальные уравнения и теория функций : науч. сб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1980. Вып. 3. С. 105—113. [*Sklyarov V. P.* Again on uniform approximation of Hermite functions // Differencial'nie uravneniya i teoriya funkcii : nauch. sb. Saratov, 1980. Iss. 3. P. 105–113.]

3. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. : ГИФМЛ, 1962. 500 с. [*Szegö, Gábor*, Orthogonal polynomials. American Mathematical Society (AMS). Colloquium Publ. 23. New York : AMS, 1959. Vol. VIII. 421 p.]

4. *Markett C.* Norm estimates for (C,δ) means of Hermite expansions and bounds for δ_{eff} // Acta Math. Hung. 1984. Vol. 43. P. 187–198.

5. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. Vol. 87. P. 695–708.

УДК 517.538.52+517.538.53

ЭРМИТОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Старовойтов

Гомельский государственный университет
E-mail: svoitov@gsu.by

Для системы, состоящей из функций $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$, изучаются асимптотические свойства её аппроксимаций Эрмита–Паде $\{\pi^j_{n,m}(z;\, e^{\lambda_j \xi})\}^2_{j=1}$. В частности, для любого z при $n \to \infty$ найдена асимптотика поведения разностей $e^{\lambda_j z} - \pi^j_{n,m}(z;\, e^{\lambda_j \xi})$, $j=1,2$. Полученные результаты дополняют аналогичные исследования Эрмита, Паде, Перрона, Д. Браесса, А. И. Аптекарева и других авторов.

Ключевые слова: совершенная система функций, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита–Паде, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.

Hermitian Approximation of Two Exponents

A. P. Starovoitov

We study the asymptotic properties of Hermite–Pade approximants $\{\pi^j_{n,m}(z;\, e^{\lambda_j \xi})\}^2_{j=1}$ for a system consisting of functions $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$. In particular, we determine asymptotic behavior of differences $e^{\lambda_j z} - \pi^j_{n,m}(z;\, e^{\lambda_j \xi})$ for $j=1,2$ and $n \to \infty$ for any complex number z. The obtained results supplement research of Pade, Perron, D. Braess and A. I. Aptekarev dealing with study of the convergence of joinnt Pade approximants for systems of exponents.

Key words: perffect system of functions, joint Pade approximant, Hermite–Pade approximants, asymptotic equality, Hermite integrals.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^j_k z^k, \qquad j = 1,2,\ldots,r \tag{1}$$

голоморфных в нуле функций, или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицатетельные числа $n, m_1, m_2, \ldots, m_r$. Обозначим $\sum\limits_{j=1}^{r} m_j = m$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1,2,\ldots,r$. Известно [1], что при $j = 1,2,\ldots,r$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P^j_{n_j}$, $\deg Q_m \leqslant m$, $\deg P^j_{n_j} \leqslant n_j$, для которых

$$R^j_{n,m}(z) = Q_m(z) f_j(z) - P^j_{n_j}(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots \tag{2}$$

Если $r=1$, то согласно теореме Паде [2, теорема 1.1.1] многочлены $Q_m(z)$, $P^1_n(z)$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z, f_1) = P^1_n(z)/Q_m(z)$, которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$. При $r \geqslant 2$ дроби $\pi^j_{n,m}(z) = \pi^j_{n_j,m}(z, f_j) = P^j_{n_j}(z)/Q_m(z)$, $j = 1,2,\ldots,r$ условиями (2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi^j_{n,m}\}^r_{j=1}$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде (аппроксимациями Эрмита–Паде) для системы функций (1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [1, 3–7]). Совершенной, в частности, является система экспонент $f_j(z) = e^{\lambda_j z}$, $j = 1,2,\ldots,r$, где $\{\lambda_j\}^r_{j=1}$ — различные комплексные числа [1, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен Ш. Эрмитом (C. Hermite) [8].

Для одной экспоненты e^z, т. е. при $r=1$, явные выражения для числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z; e^{\xi})$ получил Паде (H. Pade) [9]. Опираясь на полученные представления, он доказал, что при $n/m \to \gamma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty$, на компактах $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,m}(z; e^{\xi})$ равномерно сходятся к e^z. О. Перон

