2. *Скляров В. П.* Еще раз о равномерных приближениях функциями Эрмита // Дифференциальные уравнения и теория функций : науч. сб. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1980. Вып. 3. С. 105—113. [*Sklyarov V. P.* Again on uniform approximation of Hermite functions // Differencial'nie uravneniya i teoriya funkcii : nauch. sb. Saratov, 1980. Iss. 3. P. 105–113.]

3. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М. : ГИФМЛ, 1962. 500 с. [*Szegö, Gábor*, Orthogonal polynomials. American Mathematical Society (AMS). Colloquium Publ. 23. New York : AMS, 1959. Vol. VIII. 421 p.]

4. *Markett C.* Norm estimates for (C, δ) means of Hermite expansions and bounds for δ_{eff} // Acta Math. Hung. 1984. Vol. 43. P. 187–198.

5. *Askey R., Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. Vol. 87. P. 695–708.

УДК 517.538.52+517.538.53

ЭРМИТОВСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Старовойтов

Гомельский государственный университет
E-mail: svoitov@gsu.by

Для системы, состоящей из функций $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$, изучаются асимптотические свойства её аппроксимаций Эрмита–Паде $\{\pi^j_{n,m}(z; e^{\lambda_j \xi})\}^2_{j=1}$. В частности, для любого z при $n \to \infty$ найдена асимптотика поведения разностей $e^{\lambda_j z} - \pi^j_{n,m}(z; e^{\lambda_j \xi})$, $j = 1, 2$. Полученные результаты дополняют аналогичные исследования Эрмита, Паде, Перрона, Д. Браесса, А. И. Аптекарева и других авторов.

Ключевые слова: совершенная система функций, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита–Паде, асимптотические равенства, интегралы Эрмита.

Hermitian Approximation of Two Exponents

A. P. Starovoitov

We study the asymptotic properties of Hermite–Pade approximants $\{\pi^j_{n,m}(z; e^{\lambda_j \xi})\}^2_{j=1}$ for a system consisting of functions $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$. In particular, we determine asymptotic behavior of differences $e^{\lambda_j z} - \pi^j_{n,m}(z; e^{\lambda_j \xi})$ for $j = 1, 2$ and $n \to \infty$ for any complex number z. The obtained results supplement research of Pade, Perron, D. Braess and A. I. Aptekarev dealing with study of the convergence of joinnt Pade approximants for systems of exponents.

Key words: perffect system of functions, joint Pade approximant, Hermite–Pade approximants, asymptotic equality, Hermite integrals.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим набор

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^j_k z^k, \qquad j = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

голоморфных в нуле функций, или формальных степенных рядов. Зафиксируем произвольные целые неотрицатетельные числа $n, m_1, m_2, \ldots, m_r$. Обозначим $\sum\limits_{j=1}^{r} m_j = m$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Известно [1], что при $j = 1, 2, \ldots, r$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P^j_{n_j}$, $\deg Q_m \leqslant m$, $\deg P^j_{n_j} \leqslant n_j$, для которых

$$R^j_{n,m}(z) = Q_m(z) f_j(z) - P^j_{n_j}(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots \tag{2}$$

Если $r = 1$, то согласно теореме Паде [2, теорема 1.1.1] многочлены $Q_m(z)$, $P^1_n(z)$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z, f_1) = P^1_n(z)/Q_m(z)$, которую называют аппроксимацией Паде для $f_1(z)$. При $r \geqslant 2$ дроби $\pi^j_{n,m}(z) = \pi^j_{n_j,m}(z, f_j) = P^j_{n_j}(z)/Q_m(z)$, $j = 1, 2, \ldots, r$ условиями (2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi^j_{n,m}\}^r_{j=1}$ его элементы называют совместными аппроксимациями Паде (аппроксимациями Эрмита–Паде) для системы функций (1). Единственность, в частности, имеет место для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [1, 3–7]). Совершенной, в частности, является система экспонент $f_j(z) = e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, где $\{\lambda_j\}^r_{j=1}$ — различные комплексные числа [1, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен Ш. Эрмитом (C. Hermite) [8].

Для одной экспоненты e^z, т. е. при $r = 1$, явные выражения для числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z; e^{\xi})$ получил Паде (H. Pade) [9]. Опираясь на полученные представления, он доказал, что при $n/m \to \gamma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty$, на компактах $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,m}(z; e^{\xi})$ равномерно сходятся к e^z. О. Перон

(O. Perron) [10] обобщил результаты о сходимости $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z, доказав ее при $n+m\to\infty$. Основываясь на результатах численного эксперемента Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z-\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$. Гипотеза Г. Мейнардуса была доказана Д. Браессом (D. Braess) [11] (подробнее см. [12]): для любого комплексного z при $n+m\to\infty$

$$e^z-\pi_{n,m}(z;e^{\xi})=\frac{(-1)^m\,n!\;m!\;e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\;(n+m+1)!}\,z^{n+m+1}(1+o(1)). \tag{3}$$

При доказательстве асимптотического равенства (3) Д. Браесс существенно опирается на интегральные представления числителя и знаменателя $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$, полученные О. Перроном [10]:

$$P_n^1(z;e^{\xi})=\int_0^{\infty}t^m\,(t+z)^n\,e^{-t}\,dt,\qquad Q_m(z;e^{\xi})=\int_0^{\infty}t^n\,(t-z)^m\,e^{-t}\,dt.$$

Позже выяснилось (см., например, [1, 13]), что явный вид числителей и знаменателей аппроксимаций Паде для e^z и, более того, для совместных аппроксимаций Паде к набору экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{r}$, фактически, был известен Эрмиту задолго до Паде и О. Перрона. Именно при доказательстве трансцендентности числа e Эрмит (см. [8, 14]) ввел в рассмотрение интегралы

$$\begin{gathered}
M=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{\infty}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}\,dx,\\
M_j=\frac{1}{(p-1)!}\int_j^{\infty}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}\,dx,\\
\varepsilon_j=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{j}\left[x\prod_{i=1}^{r}(x-i)\right]^{p-1}e^{-x}\,dx,
\end{gathered} \tag{4}$$

которые при некотором простом числе p дают удобные приближения к набору $\{e^j\}_{j=1}^{r}$:

$$e^j-M_j/M=\varepsilon_j/M,\qquad j=1,2,\dots,r.$$

Интегралы Эрмита (4) после небольших преобразований (см. [1, 13]) приводят к решению системы (2) для набора экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{r}$:

$$\begin{gathered}
Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}\,dx,\\
P_{n_j}^{j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^{\infty}\left[x^n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda)^{m_i}\right]e^{-zx}\,dx,\\
R_{n,m}^{j}(z)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j}\left[x^n\prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{m_i}\right]e^{-zx}\,dx.
\end{gathered} \tag{5}$$

В первых двух интегралах (5) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $\operatorname{Re}z>0$. При $\operatorname{Re}z\leqslant 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^{j}(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^{j}(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

Е. М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы экспонент. Её решение было получено А. И. Аптекаревым [13], который доказал, что при $n+m\to\infty$ для любого $j=1,2,\dots,r$ $\quad\pi_{n_j,m}^{j}(z;e^{\lambda_j\xi})$ сходится равномерно на компактах в $\mathbb{C}$ к $e^{\lambda_j z}$. Для этого в [13] была установлена асимптотика интеграла Эрмита, определяющего в равенствах (5) $Q_m(z)$ — знаменатель совместных аппроксимаций Паде: для любого $z\in\mathbb{C}$ при $n+m\to\infty$

$$Q_m(z)=\exp\left\{-\frac{\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_j m_j}{n+m}\,z\right\}(1+o(1)). \tag{6}$$

В данной работе при некоторых ограничениях на m и $n \to \infty$ для систем из двух экспонент $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ установлены асимптотические равенства для интегралов Эрмита, определяющих в (5) функции $R^j_{n,m}(z)$, $j = 1, 2$. Это позволило получить аналоги результата Д. Браесса для совместных аппроксимаций Паде к набору из двух экспонент. Отметим, что в диагональном случае для системы двух марковских функций асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде найдена В. А. Калягиным [15] (см. также работу [6], в которой, в частности, имеются подробные ссылки).

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ

Лемма. *Пусть $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^{2}$ — набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами λ_1, λ_2. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} m^2(n)/n = 0$, то для любого комплексного числа $|z| \leqslant M$ равномерно по всем m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, при $n \to \infty$*

$$R^1_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{n!\, m_1!\, (\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\, \lambda_1^{n+m_1+1}\; e^{\lambda_1 m_1 z/(n+m_1)}}{(n+m)!\;(n+m_1+1)!}\; z^{n+m+1}\;(1+o(1))\,, \tag{7}$$

$$R^2_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{n!\, m_2!\, (\lambda_1-\lambda_2)^{m_1}\, \lambda_2^{n+m_2+1}\; e^{\lambda_2 m_2 z/(n+m_2)}}{(n+m)!(n+m_2+1)!}\; z^{n+m+1}\,(1+o(1))\,. \tag{8}$$

Доказательство. В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^{\lambda_1} x^n\,(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} e^{z\,(\lambda_1 - x)}\,dx$$

сделаем замену $x = \lambda_1 t$. В результате получим

$$I_1(z) = \lambda_1^{n+m_1+1}\int_0^1 t^n\,(t-1)^{m_1}\,(\lambda_1 t - \lambda_2)^{m_2}\; e^{z\,\lambda_1(1-t)}\,dt\,.$$

Перейдем здесь к новой переменной интегрирования $u = 1 - t$. Тогда

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\int_0^1 (1-u)^n\,u^{m_1}\,\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2} e^{\lambda_1 z u}\,du\,.$$

Исследуем асимптотику поведения следующего интеграла при $n \to \infty$

$$J_1^0 = \int_0^1 (1-u)^n\,u^{m_1}\,\left(1+\frac{\lambda_1 u}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{m_2} du.$$

Для этого подынтегральное выражение преобразуем с помощью формулы бинома Ньютона, а затем воспользуемся свойствами бета-функции Эйлера:

$$J_1^0 = \sum_{k=0}^{m_2} C^k_{m_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^k \int_0^1 (1-u)^n\,u^{m_1+k}\,du\; =$$

$$= \frac{n!\,m_1!}{(n+m_1+1)!}\left[1+\sum_{k=1}^{m_2} C^k_{m_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^k \frac{(m_1+1)(m_1+2)\cdots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\cdots(n+m_1+k+1)}\right].$$

Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{m_2} C^k_{m_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^k \frac{(m_1+1)(m_1+2)\cdots(m_1+k)}{(n+m_1+2)\cdots(n+m_1+k+1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_2} C^k_{m_2}\left|\frac{\lambda_1 m}{(\lambda_2-\lambda_1)(n+m+1)}\right|^k = \left[1+\frac{|\lambda_1| m}{|\lambda_2-\lambda_1|(n+m+1)}\right]^{m_2} - 1,$$

то, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} m^2/n = 0$, правая часть последнего соотношения убывает к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$J_1^0 = \frac{n!\,m_1!}{(n+m_1+1)!}\,(1+o(1))\,. \tag{9}$$

Аналогично показывается, что при $p = 1, 2, \ldots$ и $n \to \infty$

$$J_1^p = \int_0^1 (1-u)^n\, u^{m_1+p} \left(1 + \frac{\lambda_1\, u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} du = \frac{n!\,(m_1+p)!}{(n+m_1+p+1)!}\,(1+o(1))\,. \tag{10}$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0$. Тогда при $n \to \infty$

$$u_0 = J_1^1/J_1^0 = (m_1/(n+m_1))\,(1+o(1))\,. \tag{11}$$

Следовательно, при достаточно больших n $u_0 \in [0,\, 1]$. По формуле Тейлора:

$$e^{\lambda_1 u z} = e^{\lambda_1 u_0 z} e^{\lambda_1 (u-u_0) z} = e^{\lambda_1 u_0 z}\left(1 + \lambda_1 z(u-u_0) + \frac{(\lambda_1 z)^2 (u-u_0)^2}{2!} + \ldots\right) =$$
$$= e^{\lambda_1 u_0 z} + \lambda_1 z(u-u_0)\, e^{\lambda_1 u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \leqslant M$ и $u \in [0,\, 1]$

$$|\rho_u(z)| \leqslant M_1 |u-u_0|^2 \left\{\frac{(|\lambda_1| M)^2}{2!} + \ldots + \frac{(|\lambda_1| M)^n}{n!} + \ldots\right\} \leqslant M_2 (u-u_0)^2. \tag{12}$$

Учитывая выбор u_0, равенства (9) и (11), получим, что при $n \to \infty$

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \left\{\frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!}\; e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1} z}\,(1+o(1)) + A\rho_u(z)\right\},$$

где при достаточно больших n

$$|A\rho_u(z)| \leqslant \int_0^1 (1-u)^n\, u^{m_1} \left(1 + \frac{|\lambda_1|\, u}{|\lambda_2 - \lambda_1|}\right)^{m_2} |\rho_u(z)|\, du \leqslant$$
$$\leqslant 2M_1 \left\{\frac{n!\,(m_1+2)!}{(n+m_1+3)!} + \frac{2m_1}{n+m_1} \cdot \frac{n!\,(m_1+1)!}{(n+m_1+2)!} + \left(\frac{m_1}{n+m_1}\right)^2 \frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!}\right\}.$$

При получении последнего неравенства воспользовались неравенством (12), равенствами (9)–(11), учитывая при этом, что правая часть в (9) и (10) не зависит от λ_1 и λ_2. Из двух последних соотношений окончательно получаем, что при $n \to \infty$

$$I_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \frac{n!\, m_1!}{(n+m_1+1)!}\, e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1} z}\,(1+o(1))\,.$$

Равенство (7) доказано. Доказательство (8) — аналогично. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть* $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^2$ *— набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами* λ_1, λ_2. *Тогда если* $\lim\limits_{n\to\infty} m^2(n)/n = 0$, *то для любого комплексного числа* z *равномерно по всем* m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, *при* $n \to \infty$

$$e^{\lambda_1 z} - \pi^1_{n_1,\, m}(z;\, e^{\lambda_1 \xi}) =$$
$$= (-1)^m \frac{n! m_1! (\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \lambda_1^{n+m_1+1} z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_1+1)!}\, e^{\frac{\lambda_1 m_1}{n+m_1} z} e^{\frac{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}{n+m} z}\,(1+o(1))\,, \tag{13}$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi^2_{n_2,\, m}(z;\, e^{\lambda_2 \xi}) =$$
$$= (-1)^m \frac{n!\, m_2!\, (\lambda_1 - \lambda_2)^{m_1} \lambda_2^{n+m_2+1} z^{n+m+1}}{(n+m)!(n+m_2+1)!}\, e^{\frac{\lambda_2 m_2}{n+m_2} z} e^{\frac{\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2}{n+m} z}\,(1+o(1))\,. \tag{14}$$

Доказательство. Утверждения теоремы 1 очевидным образом вытекают из равенств (7), (8) и (6). Теорема 1 доказана. □

По определению $m = m_1 + m_2$, где m_1, m_2 — целые неотрицательные числа. Анализируя доказательство леммы 1, нетрудно заметить, что при $m \to \infty$ и ограниченности одного из слагаемых m_j утверждение теоремы можно усилить.

Теорема 2. *Пусть* $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^2$ *— набор из двух экспонент с произвольными различными комплексными числами* λ_1, λ_2, $m = m_1 + m_2$ *и* m_2 *— ограничено. Тогда для любого комплексного* *числа z: 1) асимптотическое равенство* (13) *справедливо равномерно по всем m, $0 \leqslant m \leqslant m_1(n)$, где $m_1(n) = o(n)$, при $n \to \infty$; 2) асимптотическое равенство* (14) *справедливо равномерно по всем m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, где $m(n) = o(\sqrt{n})$, при $n \to \infty$.*

В простейшей ситуации из теоремы 1 получаем

Следствие. *Пусть $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, $m = m_1$, $m_2 = 0$. Тогда для любого комплексного числа z равномерно по всем m, $0 \leqslant m \leqslant m(n)$, где $m(n) = o(\sqrt{n})$, при $n \to \infty$*

$$e^z - \pi^1_{n,m}(z;\, e^\xi) = \frac{(-1)^m\; n!\, m!\; e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!\;(n+m+1)!}\; z^{n+m+1}\;(1+o(1))\,, \tag{15}$$

$$e^{2z} - \pi^2_{n+m,m}(z;\, e^{2\xi}) = \frac{2^{n+1}\, e^{mz/(n+m)}}{(n+m)!\;(n+1)!}\; z^{n+m+1}\,(1+o(1))\,.$$

В силу единственности аппроксимации Паде отсюда и из (3) следует, что $\pi^1_{n,m}(z;\, e^\xi)$ — совместная аппроксимация Паде для набора экспонент $\left\{e^z,\, e^{2z}\right\}$ совпадает с аппроксимацией Паде $\pi_{n,m}(z;\, e^\xi)$ функции e^z. Согласно теореме Д. Браесса асимптотическое равенство (15) верно при $n + m \to \infty$, что согласуется с первым утверждением теоремы 2. Можно показать, что при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $n = m_1 = m_2$ равенства (13), (14) не сохраняются. Поэтому ограничения на рост m в теореме 1, вообще говоря, необходимы.

Библиографический список

1. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с. [*Nikishin E. M., Sorokin V. N.* Rational approximations and orthogonality. Moscow : Nauka, 1988. 256 p.]
2. *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М. : Мир, 1986. 502 с. [*Baker G. A. Jr., Graves-Morris P.* Pade approximants. Extensions and applications : Encyclopedia Math. Appl. Vol. 13, 14. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1981. 540 p.]
3. *Mahler K.* Perfect systems // Compositio mathematica. 1968. Vol. 19, № 2. P. 95–166.
4. *Jager H. A.* A multidimensional generalization of the Pade table // Proc. Nederl. Acad. Wetensh. Ser. A. 1964. Vol. 67. P. 192–249.
5. *Никишин Е. Н.* О системе марковских функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. 1979. № 4. С. 60–63. [*Nikishin E. M.* A system of Markov functions // Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Math. Mech. 1979. № 4. P. 60–63.]
6. *Аптекарев А. И., Лысов В. Г.* Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде // Мат. сб. 2010. Т. 201, вып. 2. С. 29–78. [*Aptekarev A. I., Lysov V. G.* Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Pade // Sb. Math. 2010. Vol. 201, № 2. P. 183–234.]
7. *Аптекарев А. И., Буслаев В. И., Мартинес-Финкельштейн А., Суетин С. П.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены // УМН. 2011. Т. 66, № 6(402). С. 37–122. [*Aptekarev A. I., Buslaev V. I., Martinez-Finkelshtein A., Suetin S. P.* Pade approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials // Russ. Math. Surv. 2011. Vol. 66, № 6. P. 1049–1131.]
8. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Akad. Sci.(Paris). 1873. Vol. 77. P. 18–293.
9. *Pade H.* Memoire sur les developpement en fractions continues de la fonction exponential // Ann Sci. Ecole Normale Sup. (3). 1899. Vol. 16 P. 394–426.
10. *Perron O.* Lehre von den Kettenbruchen. Stuttgart : Teubner. 1957. 316 p.
11. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 40, № 4. P. 375–379.
12. *Petrusherv P. P., Popov V. A.* Rational approximation of real function. Cambridge : University Press, 1987. 401 p.
13. *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74. [*Aptekarev A. I.* Convergence of rational approximations to a set of exponents// Moscow Univ. Math. Bull. 1981. Vol. 36, № 1. P. 81–86.]
14. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. Т. I. Арифметика. Алгебра. Анализ. М. : Наука, 1987. 432 с. [*Klein F.* Elementary mathematics from the point of view of the highest. Vol. I. Arithmetic. Algebra. Analysis. Moscow : Nauka, 1987. 432 p.]
15. *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Мат. сб. 1979. Т. 110(152). С. 609–627. [*Kaljagin V. A.* On a class of polynomials defined by two orthogonality relations // Math. USSR Sb. 1981. Vol. 38, № 4. P. 563–580.]