Библиографический список

1. *Kerekjarto B. V.* Vorlesungen über Topologie. Berlin : J. Springer, 1923. 270 p.
2.*Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М. : Наука, 1964. 228 с. [*Stoilov S.* Lectures on topological principles in the theory of analytic functions. Moscow : Nauka, 1964. 228 p.]
3. *Старков В. В.* Локально биголоморфные конечнолистные отображения ограниченных областей. // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 177–186. [*Starkov V. V.* Finitely valent locally biholomorphic mappings of bounded domains // Siberian Math. J. 2011. Vol. 52, № 1. P. 139–146.]
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М. : Наука, 1966. 628 с. [*Goluzin G. M.* Geometric theory of Functions of a complex variable. Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 1969.]
5. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М. : Наука, 1977. 368 с. [*Alexandrov P. C.* Introduction to set theory and general topology. Moscow : Nauka, 1977. 368 p.]

УДК 517.518.82

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ МЕЙКСНЕРА И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

Э. Ш. Султанов

Дагестанский научный центр РАН, Махачкала
E-mail: emir.sultanov@gmail.com

В работе исследуется задача о приближении функций дискретными рядами по полиномам Мейкснера, ортогональным на равномерной сетке $\{0, 1, \ldots\}$. Сконструированы новые ряды по этим полиномам, для которых в точке $x = 0$ частичные суммы совпадают с приближаемой функцией $f(x)$. Новые ряды образованы с помощью предельного перехода при $\alpha \to -1$ рядов Фурье $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_k^\alpha(x)$ по полиномам Мейкснера.

Ключевые слова: полиномы Мейкснера, ряды Фурье, предельные ряды.

Limit Discrete Meixner Series and Their Approximative Properties

E. Sh. Sultanov

In this article the problem of function approximation by discrete series by Meixner polynomials orthogonal on uniform net $\{0, 1, \ldots\}$ is investigated. We constructed new series by these polynomials for which partial sums coincide with input function $f(x)$ in $x = 0$. These new series were constructed by the passage to the limit of Fourier series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_k^\alpha(x)$ by Meixner polynomials when $\alpha \to -1$.

Key words: Meixner polynomials, Fourier series, limit series.

В задачах обработки сигналов часто встречается ситуация, когда требуется аппроксимировать дискретный сигнал, который с определенного момента является затухающим. При этом видится целесообразным осуществить его покусочную аппроксимацию с сохранением непрерывности восстановленного сигнала, а для этого необходимо, чтобы приближение в точке стыка совпадало с восстанавливаемой функцией. Для приближения затухающих сигналов наиболее подходящим является оператор частичных сумм Фурье по полиномам Мейкснера, однако он не обладает указанным свойством совпадения в точке стыка. Решая эту задачу, мы сконструировали оператор, основанный на новых так называемых предельных рядах по полиномам Мейкснера.

Для $0 < q < 1$, $\alpha > -1$ классические многочлены Мейкснера (J. Meixner) [1] можно определить следующим образом:

$$M_n^\alpha(x) = M_n^\alpha(x, q) = \binom{n+\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(-x)_k}{(\alpha+1)_k k!} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^k,$$

где $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$. Они нормируются условием $M_n^\alpha(0, q) = \binom{n+\alpha}{n}$ и образуют ортогональную систему на сетке $\Omega = \{0, 1, \ldots\}$ с весом

$$\eta^\alpha(x) = \eta^\alpha(x, q) = (1-q)^{\alpha+1} q^x \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)},$$

т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_k^\alpha(j, q) M_l^\alpha(j, q) \eta^\alpha(j) = \delta_{kl} h_k^{\alpha,q},$$

где $h_k^{\alpha,q} = \binom{k+\alpha}{k} q^{-k} \Gamma(\alpha+1)$.

Соответствующие ортонормированные полиномы имеют вид

$$m_n^\alpha(x) = m_n^\alpha(x,q) = \{h_n^{\alpha,q}\}^{-1/2} M_n^\alpha(x,q), \qquad n = 0,1,\dots,$$

и тем самым

$$\sum_{j=0}^{\infty} m_k^\alpha(j) m_l^\alpha(j) \eta^\alpha(j) = \delta_{kl}.$$

Пусть на сетке Ω дана функция $f(x)$, для которой существуют следующие моменты:

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) j^k \eta^\alpha(j) < \infty, \qquad k = 0,1,\dots .$$

Тогда для этой функции существуют коэффициенты Фурье–Мейкснера

$$f_k^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} f(j) m_k^\alpha(j) \eta^\alpha(j), \qquad k = 0,1,\dots .$$

Поэтому мы можем функции $f(x)$ сопоставить ее ряд Фурье–Мейкснера:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) \tag{1}$$

и частичные суммы Фурье–Мейкснера:

$$S_n^\alpha(f;x) = S_n^\alpha(f;x,q) = \sum_{k=0}^{n} f_k^\alpha m_k^\alpha(x). \tag{2}$$

В работах ряда авторов исследована задача о приближении функции $f(x)$ ее частичными суммами (2). При этом было замечено, что аппроксимативные свойства сумм $S_n^\alpha(f;x)$ в точке $x=0$ улучшаются при приближении параметра α к -1. Другими словами, было замечено, что $S_n^\alpha(f;0) \to f(0)$ при $\alpha \to -1$, т. е. $S_n^{-1}(f;0) = f(0)$. Что же представляют собой суммы $S_n^{-1}(f;x)$? Нам удалось доказать следующее.

Теорема 1. *Предельное положение ряда Фурье по полиномам Мейкснера* (1) *при* $\alpha \to -1$ *имеет вид*

$$f(x) = f(0) + x \sum_{k=0}^{\infty} m_k^1(x-1,q) g_k, \tag{3}$$

где $g_k = (1-q)^2 \sum\limits_{j=0}^{\infty} q^j m_k^1(j,q) g(j+1)$, *а* $g(x) = f(x) - f(0)$.

Доказательство. Исследуем общий член ряда (1) $f_k^\alpha m_k^\alpha(x)$ при $\alpha \to -1$. Рассмотрим сначала первый член этого ряда $f_0^\alpha m_0^\alpha(x)$. Так как $M_0^\alpha(x) = 1$, а $h_0^{\alpha,q} = \Gamma(\alpha+1)$, то

$$m_0^\alpha(x) = \{h_0^\alpha\}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}}.$$

Тогда

$$m_0^\alpha(x) f_0^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) \frac{(1-q)^{\alpha+1} q^j}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)}} \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} = \frac{(1-q)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} =$$

$$= (\alpha+1) \frac{(1-q)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^{\infty} f(j) q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)},$$

или

$$m_0^\alpha(x) f_0^\alpha = f(0) + A^{\alpha,q} (\alpha+1) \sum_{j=1}^{\infty} f(j) q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)},$$

где $A^{\alpha,q} = \dfrac{(1-q)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}$. При $\alpha \to -1$ второе слагаемое будет стремиться к нулю (в силу того, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f(j)\eta^{\alpha}(j) < \infty$), следовательно, $f_0^{-1}m_0^{-1}(x) = \lim_{\alpha\to -1} f_0^{\alpha} m_0^{\alpha}(x) = f(0)$.

Теперь рассмотрим $m_k^{\alpha}(x) f_k^{\alpha}$ при $k \geq 1$. Имеем:

$$m_k^{\alpha}(x) f_k^{\alpha} = m_k^{\alpha}(x)\sum_{j=0}^{\infty} f(j) m_k^{\alpha}(j)\eta(j) = (1-q)^{\alpha+1} m_k^{\alpha}(x)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} m_k^{\alpha}(j) f(j) =$$

$$= (1-q)^{\alpha+1}\left(h_k^{\alpha}\right)^{-1} M_k^{\alpha}(x)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} M_k^{\alpha}(j) f(j),$$

$$M_k^{\alpha}(j) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\sum_{l=0}^{k} \frac{(-k)_l(-x)_l}{\Gamma(l+\alpha+1)l!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^l =$$

$$= \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{l=1}^{k} \frac{(-k)_l(-x)_l}{\Gamma(l+\alpha+1)l!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^l\right],$$

где $1/\Gamma(\alpha+1) \to 0$ при $\alpha \to -1$. Так как $m_k^{\alpha}(j)$ ортогонален ко всем многочленам $P_n(j)$, $n < k$, то

$$f_k^{\alpha} m_k^{\alpha}(x) = (1-q)^{\alpha+1}\frac{M_k^{\alpha}(x)}{h_k^{\alpha,q}}\sum_{j=1}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)} M_k^{\alpha}(j)[f(j)-f(0)] =$$

$$= (1-q)^{\alpha+1}\frac{M_k^{\alpha}(x)}{h_k^{\alpha,q}}\sum_{j=1}^{\infty} q^j \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+1)}[f(j)-f(0)]\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}\sum_{l=1}^{k} \frac{(-k)_l(-x)_l}{\Gamma(l+\alpha+1)l!}\left(1-\frac{1}{q}\right)^l.$$

Заметим, что при $\alpha \to -1$

$$h_k^{\alpha,q} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1)q^{-k} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{k!}q^{-k} \to \frac{q^{-k}}{k}.$$

Переходя к пределу при $\alpha \to -1$ для общего члена ряда (1), получим следующее:

$$\lim_{\alpha\to -1} f_k^{\alpha} m_k^{\alpha}(x) = kq^k M_k^{-1}(x)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^j}{j} M_k^{-1}(j)[f(j)-f(0)].$$

Отсюда и из равенства [2, гл. 4, § 5]

$$M_k^{-1}(x) = \frac{(k-1)!}{k!}\left(\frac{1}{q}-1\right)(-x)M_{k-1}^{1}(x-1) = \frac{q-1}{kq} x M_{k-1}^{1}(x-1)$$

получим:

$$\lim_{\alpha\to -1} f_k^{\alpha} m_k^{\alpha}(x) = \frac{(q-1)^2}{k} q^{k-1} x M_{k-1}^{1}(x-1)\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1} M_{k-1}^{1}(j-1)[f(j)-f(0)] =$$

$$= \frac{(q-1)^2}{k} q^{k-1} x M_{k-1}^{1}(x-1)\sum_{j=0}^{\infty} q^{j} M_{k-1}^{1}(j)[f(j+1)-f(0)].$$

Для $\alpha = 1$ весовая функция будет иметь вид $\eta^1(x) = (1-q)^2 q^x (x+1)$. По определению $h_k^{1,q} = (k+1)q^{-k}$, следовательно, $M_{k-1}^{1}(x) = \dfrac{k}{q^{k-1}} m_{k-1}^{1}(x)$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to -1} f_k^{\alpha} m_k^{\alpha}(x) = x m_{k-1}^{1}(x-1)\sum_{j=0}^{\infty}(1-q)^2 q^j m_{k-1}^{1}(j)\left[f(j+1)-f(0)\right] =$$

$$= x m_{k-1}^{1}(x-1)\sum_{j=0}^{\infty} \eta^1(j) m_{k-1}^{1}(j)\frac{g(j+1)}{j+1}.$$

Обозначим $g(x) = f(x) - f(0)$, $\lim\limits_{\alpha\to-1} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) = xm_{k-1}^1(x-1)\sum\limits_{j=0}^\infty \eta^1(j)m_{k-1}^1(j)\hat g(j)$, где $\hat g(x) = g(x+1)/(x+1)$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to-1} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) = xm_{k-1}^1(x-1)\hat g_{k-1}^1$$

и рассматриваемый ряд принимает следующий вид:

$$\sum_{k=0}^\infty f_k^{-1,q}m_k^{-1,q}(x) = f(0) + \sum_{k=1}^\infty xm_{k-1}^{1,q}(x-1)\hat g_{k-1}^1 =$$

$$= f(0) + x\sum_{k=0}^\infty m_k^1(x-1)\hat g_k^1 = f(0) + x\hat g(x-1) = f(0) + x\left(\frac{g(x)}{x}\right) = f(x).$$

Ряд (3) назовем предельным по полиномам Мейкснера. Обозначим его частичную сумму следующим образом:

$$S_n^{-1}(f;x) = f(0) + x\sum_{k=0}^{n-1} m_k^1(x-1,q)g_k. \tag{4}$$

Отсюда видно, что для любого $n \geq 1$ $S_n^{-1}(f;0) = f(0)$. Можно показать, что частичные суммы (4) предельного ряда (3) обладают в определенном смысле лучшими аппроксимативными свойствами по сравнению с частичными суммами $S_n^\alpha(f;x)$ $(\alpha > -1)$ ряда Фурье–Мейкснера (1), но мы на этом здесь не останавливаемся.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. *Meixner J.* Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Function // J. of the London Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 6–13.
2. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с. [*Sharapudinov I. I.* Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications. Makhachkala : Dagestan Scientific Center of RAS, 2004. 276 p.]

УДК 517.51+517.98

АФФИННЫЕ КВАНТОВЫЕ ФРЕЙМЫ И ИХ СПЕКТР

П. А. Терехин

Саратовский государственный университет
E-mail: TerekhinPA@info.sgu.ru

Задача квантования коэффициентов приближающих полиномов решается для аффинных фреймов. Рассматривается также задача о квантовании коэффициентов разложения по фрейму. Вводится понятие спектра квантового фрейма. Оценивается спектр семейства аффинных фреймов.

Ключевые слова: фрейм, аффинный фрейм, квантовый фрейм, спектр квантового фрейма.

Affine Quantum Frames and Their Spectrum

P. A. Terekhin

The problem of coefficients quantization for polynomials is solved for affine frames. The problem about coefficients quantization for frame decomposition is considered also. The notion of a spectrum of the quantum frame is introduced. The spectrum of family of affine frames is estimated.

Key words: frame, affine frame, quantun frame, spectrum of quantum frame.

1. ЗАДАЧА КВАНТОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть X — банахово пространство, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ образует базис пространства X. Напомним, что $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Будем называть X *модельным пространством*.

Пусть, далее, $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — система элементов банахова пространства F. Следуя [1], будем говорить, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является *квантовой* (ε, δ, C)-*сетью* в пространстве F относительно модельного