УДК 517.518.4

О СВОЙСТВАХ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ЧЛЕНОВ РЯДА $\sum \frac{1}{k}\sin kx$

С. А. Теляковский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
Email: sergeyAltel@yandex.ru

Получено необходимое и достаточное условие интегрируемости со степенным весом суммы модулей блоков исследуемого ряда.

Ключевые слова: блоки членов ряда, степенной вес.

On Properties of the Moduli of Blocks of the Terms of the Series $\sum \frac{1}{k}\sin kx$

S. A. Telyakovskii

A necessary and sufficient condition is obtained ensuring the integrability with the power weight of the sum of the moduli of blocks of the terms of series under investigation.

Key words: blocks of the terms a series, power weight.

Доклад автора на 16 Саратовской зимней школе, прочитанный в январе 2012 года, был посвящён свойствам рядов из абсолютных величин блоков членов ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx, \tag{1}$$

играющего важную роль при изучении функций ограниченной вариации.

Пусть Λ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел $1 = n_1 < n_2 < \dots$, для которой сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_j}.$$

С помощью последовательности Λ строится ряд из модулей блоков членов ряда (1)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Bigl|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{k}\sin kx\Bigr|. \tag{2}$$

Ряд (2) сходится при всех x и его сумма, которую обозначим $g_\Lambda(x)$, непрерывна на $(0,\pi]$.

В настоящей статье приводится доказательство одного результата, представленного в докладе. Остальные утверждения доклада обоснованы в [1].

Теорема. *При $\gamma\in(0,1)$ интеграл*

$$\int_0^{\pi} g_\Lambda(x)\,\frac{dx}{x^\gamma} \tag{3}$$

сходится в том и только том случае, когда сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n_{j+1}}\bigl(n_{j+1}-n_j\bigr)^\gamma. \tag{4}$$

Доказательство теоремы по схеме рассуждений из работы Р. М. Тригуб [2] опирается на следующее предложение.

Лемма. *Если $1\leqslant\alpha\leqslant\beta$ и $\gamma\in(0,1)$, то для интеграла*

$$I = I(\alpha,\beta;\gamma) := \int_0^{\pi}|\sin\alpha x|\cdot|\sin\beta x|\,\frac{dx}{x^{1+\gamma}}$$

справедливы оценки

$$c_1(\gamma)\alpha^\gamma \leqslant I(\alpha,\beta;\gamma) \leqslant c_2(\gamma)\alpha^\gamma, \tag{5}$$

где положительные величины $c_1(\gamma)$ и $c_2(\gamma)$ зависят только от γ.

Доказательство леммы Удобно записать интеграл I следующим образом:

$$I = \alpha^\gamma \int\limits_0^{\alpha\pi} |\sin x| \cdot \left|\sin \frac{\beta}{\alpha}x\right| \frac{dx}{x^{1+\gamma}}.$$

Правая оценка (5) устанавливается легко:

$$I < \alpha^\gamma \int\limits_0^{\infty} |\sin x| \frac{dx}{x^{1+\gamma}} < \alpha^\gamma \biggl(\int\limits_0^{1} \sin x \frac{dx}{x^{1+\gamma}} + \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1+\gamma}}\biggr) < \alpha^\gamma \biggl(\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma}\biggr) = \alpha^\gamma \Bigl(\frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{\gamma}\Bigr).$$

Для оценки интеграла I снизу уменьшим промежуток интегрирования и воспользуемся тем, что

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \qquad 0 < x \leqslant 1.$$

Тогда получим:

$$I > \alpha^\gamma \int\limits_{\pi\alpha/(4\beta)}^{1} |\sin x| \cdot \left|\sin \frac{\beta}{\alpha}x\right| \frac{dx}{x^{1+\gamma}} > \frac{2}{\pi}\alpha^\gamma \int\limits_{\pi\alpha/(4\beta)}^{1} \left|\sin \frac{\beta}{\alpha}x\right| \frac{dx}{x^{\gamma}} = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\beta^{1-\gamma}} \int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} |\sin x| \frac{dx}{x^{\gamma}}.$$

Далее,

$$\int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} |\sin x| \frac{dx}{x^{\gamma}} > \int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} \sin^2 x \frac{dx}{x^{\gamma}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} (1-\cos 2x) \frac{dx}{x^{\gamma}} = \frac{1}{2^{2-\gamma}} \int\limits_{\pi/2}^{2\beta/\alpha} (1-\cos x) \frac{dx}{x^{\gamma}}.$$

Покажем, что значение интеграла

$$\int\limits_{\pi/2}^{2\beta/\alpha} (-\cos x) \frac{dx}{x^{\gamma}} \tag{6}$$

положительно. Для этого разобьём промежуток $[\pi/2, 2\beta/\alpha]$ на отрезки длины 2π

$$\Bigl[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi\Bigr], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Длина последнего отрезка при этом будет, вообще говоря, меньше 2π.

На интервалах

$$\Bigl(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\Bigr)$$

значения косинуса отрицательны. Поэтому

$$-\int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+2(k+1)\pi} \cos x \frac{dx}{x^{\gamma}} = -\int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+(2k+1)\pi} \cos x \frac{dx}{x^{\gamma}} - \int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+(2k+1)\pi} \cos(x+\pi) \frac{dx}{(x+\pi)^{\gamma}} =$$

$$= -\int\limits_{(\pi/2)+2k\pi}^{(\pi/2)+(2k+1)\pi} \cos x \left(\frac{1}{x^{\gamma}} - \frac{1}{(x+\pi)^{\gamma}}\right) dx > 0.$$

Таким образом оцениваются части интеграла (6) по всем отрезкам указанного разбиения промежутка интегрирования, в том числе и по последнему отрезку.

Значит,

$$\int\limits_{\pi/4}^{\beta/\alpha} |\sin x| \frac{dx}{x^{\gamma}} > \frac{1}{2^{2-\gamma}} \int\limits_{\pi/2}^{2\beta/\alpha} \frac{dx}{x^{\gamma}} = \frac{1}{2^{2-\gamma}(1-\gamma)} \biggl[\Bigl(\frac{2\beta}{\alpha}\Bigr)^{1-\gamma} - \Bigl(\frac{\pi}{2}\Bigr)^{1-\gamma}\biggr] = \frac{1}{2(1-\gamma)} \biggl[\Bigl(\frac{\beta}{\alpha}\Bigr)^{1-\gamma} - \Bigl(\frac{\pi}{4}\Bigr)^{1-\gamma}\biggr].$$

Так как $\beta \geqslant \alpha$, имеем

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\gamma} \geqslant \left[1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\gamma}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma}.$$

Из приведенных оценок получаем

$$I > \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\beta^{1-\gamma}}\frac{1}{1-\gamma}\left[1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-\gamma}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1-\gamma}$$

и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Проведя преобразование Абеля, находим:

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{k}\sin kx = \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left[\left(\overline{D}_k(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right) + \frac{1}{n_{j+1}}\left(\overline{D}_{n_{j+1}-1}(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right)\right], \qquad (7)$$

где $\overline{D}_k(x)$ – сопряжённое ядро Дирихле порядка k.

Так как

$$\overline{D}_k(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x) = \frac{1}{\sin(x/2)}\sin\frac{k-n_j+1}{2}x \cdot \sin\frac{k+n_j}{2}x,$$

то с помощью правой оценки (5) получаем

$$\int_0^\pi \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\overline{D}_k(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right)\right|\frac{dx}{x^\gamma} \leqslant$$
$$\leqslant c_3(\gamma)\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(k - n_j + 1\right)^\gamma < c_3(\gamma)\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{(k+1)^{2-\gamma}}.$$

где $c_3(\gamma)$ зависит только от γ.

Поэтому используя (7), видим, что для каждого N

$$\left|\int_0^\pi \sum_{j=1}^N \left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}\frac{1}{k}\sin kx\right|\frac{dx}{x^\gamma} - \int_0^\pi \sum_{j=1}^N \frac{1}{n_{j+1}}\left|\overline{D}_{n_{j+1}-1}(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right|\frac{dx}{x^\gamma}\right| <$$
$$< c_3(\gamma)\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(k+1)^{2-\gamma}} < \infty. \qquad (8)$$

Из (8) вытекает утверждение теоремы, так как согласно (5) интеграл

$$\int_0^\pi \left|\overline{D}_{n_{j+1}-1}(x) - \overline{D}_{n_j-1}(x)\right|\frac{dx}{x^\gamma}$$

имеет точный порядок $\left(n_{j+1} - n_j\right)^\gamma$.

Заметим, наконец, что если положить $m_j = \min\left(n_j, n_{j+1} - n_j\right)$, то приведенное в конце работы [2] рассуждение О. И. Кузнецовой показывает, что ряды (4) и

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} m_j^\gamma \qquad (9)$$

сходятся или расходятся одновременно.

В [1] доказано, что сходимость ряда (9) является достаточным условием сходимости интеграла (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 11-01-00417).

Библиографический список

1. *Теляковский С. А.* О свойствах блоков членов ряда $\sum \frac{1}{k} \sin kx$ // Украинский мат. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 713–718. [*Telyakovskii S. A.* On properties of blocks of the series $\sum \frac{1}{k} \sin kx$ // Ukrainian Math. J. 2012. Vol. 64. P. 713–718.]

2. *Trigub R. M.* A note on the paper of Telyakovskii «Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation» // East J. on Approx. 2007. Vol. 13, № 1. P. 1–6.

УДК 517.97

МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С УПРАВЛЯЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Е. А. Трушкова

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: katerinatr@mail.ru

Представлена новая модификация метода глобального улучшения управления на базе известного метода В. Ф. Кротова для задач управления гамильтоновыми системами одного класса. Проведены расчеты по управлению квантовой динамической системой, представляющей известную модель вращения плоской молекулы.

Ключевые слова: гамильтонова система, оптимальное управление, метод глобального улучшения.

Global Improvement Method for Hamiltonian Systems with Controllable Coefficients

E. A. Trushkova

The new modification of global improvement control method for one class of Hamiltonian systems that is based on the Krotov method is presented. The calculations for a quantum dynamical system representing the well studied example of the rotation of a planar molecule are given.

Key words: Hamiltonian system, optimal control, global improvement method.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Широкий и актуальный класс задач изменения квантового состояния атомов и молекул под действием управляемого внешнего поля сводится к задаче оптимального управления гамильтоновой системой с управляемыми коэффициентами (см., например, [1]). А именно уравнение Шрёдингера после разложения волновой функции и соответствующих операторов по полной системе собственных функций заменяется конечномерной аппроксимацией — динамической системой с управлением, в которой роль фазовых координат играют коэффициенты разложения волновой функции. Дальнейшее рассмотрение действительной и мнимой части фазовых координат приводит к задаче управления гамильтоновой системой.

Рассмотрим задачу управления гамильтоновой системой:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = A\left(u(t)\right)x(t), \qquad t \in [t_I, t_F],\\ x(t_I) = x_I, \qquad x \in R^{2n}, \qquad u : [t_I, t_F] \to R^p, \qquad u(\cdot) \in U(m, u_{low}, u_{up}),\\ J(x,u) = F\left(x(t_F)\right) = \left(x(t_F) - x^*\right)^T \left(x(t_F) - x^*\right) \to \min,\end{gathered} \tag{1}$$

где $x(t)$ — кусочно дифференцируема, $U(m, u_{low}, u_{up})$ — множество функций, принимающих постоянное значение на полуотрезках $[t_I + ih, t_I + (i+1)h)$, $i = \overline{0, m-1}$, $h = (t_F - t_I)/m$ и подчиняющихся ограничениям $u_{low} \le u(t) \le u_{up}$ (неравенства понимаются как покоординатные),

$$A\left(u(t)\right) = \begin{pmatrix} 0 & P(u(t)) \\ -P(u(t)) & 0 \end{pmatrix},$$

$P(u)$ — симметрическая матрица, непрерывная по u, $x^* \in R^{2n}$ — заданная точка. Нетрудно видеть, что данная задача является задачей наилучшего попадания в заданную точку.

Система имеет динамический инвариант $S = \sum\limits_{i=1}^{2n} x_i^2(t_I) = \sum\limits_{i=1}^{2n} x_i^2(t)$, следовательно, исходный квадратичный функционал качества перепишется в линейном виде $F(x(t_F)) = \left(x(t_F) - x^*\right)^T \times \times \left(x(t_F) - x^*\right) = S + x^{*T}x^* - 2x^{*T}x(t_F)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $x^{*T}x^* = S$,

