Обозначим $g(x) = f(x) - f(0)$, $\lim\limits_{\alpha\to-1} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) = x m_{k-1}^1(x-1)\sum\limits_{j=0}^{\infty}\eta^1(j)m_{k-1}^1(j)\hat{g}(j)$, где $\hat{g}(x) = g(x+1)/(x+1)$. Тогда

$$\lim_{\alpha\to-1} f_k^\alpha m_k^\alpha(x) = x m_{k-1}^1(x-1)\hat{g}_{k-1}^1$$

и рассматриваемый ряд принимает следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{-1,q} m_k^{-1,q}(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} x m_{k-1}^{1,q}(x-1)\hat{g}_{k-1}^1 =$$
$$= f(0) + x\sum_{k=0}^{\infty} m_k^1(x-1)\hat{g}_k^1 = f(0) + x\hat{g}(x-1) = f(0) + x\left(\frac{g(x)}{x}\right) = f(x).$$

Ряд (3) назовем предельным по полиномам Мейкснера. Обозначим его частичную сумму следующим образом:

$$S_n^{-1}(f;x) = f(0) + x\sum_{k=0}^{n-1} m_k^1(x-1,q)g_k. \tag{4}$$

Отсюда видно, что для любого $n \geq 1$ $S_n^{-1}(f;0) = f(0)$. Можно показать, что частичные суммы (4) предельного ряда (3) обладают в определенном смысле лучшими аппроксимативными свойствами по сравнению с частичными суммами $S_n^\alpha(f;x)$ $(\alpha > -1)$ ряда Фурье–Мейкснера (1), но мы на этом здесь не останавливаемся.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а).

Библиографический список

1. *Meixner J.* Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Function // J. of the London Math. Soc. 1934. Vol. 9. P. 6–13.
2. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения. Махачкала : Дагестан. науч. центр РАН, 2004. 276 с. [*Sharapudinov I. I.* Mixed series of orthogonal polynomials. Theory and applications. Makhachkala : Dagestan Scientific Center of RAS, 2004. 276 p.]

УДК 517.51+517.98

АФФИННЫЕ КВАНТОВЫЕ ФРЕЙМЫ И ИХ СПЕКТР

П. А. Терехин

Саратовский государственный университет
E-mail: TerekhinPA@info.sgu.ru

Задача квантования коэффициентов приближающих полиномов решается для аффинных фреймов. Рассматривается также задача о квантовании коэффициентов разложения по фрейму. Вводится понятие спектра квантового фрейма. Оценивается спектр семейства аффинных фреймов.

Ключевые слова: фрейм, аффинный фрейм, квантовый фрейм, спектр квантового фрейма.

Affine Quantum Frames and Their Spectrum

P. A. Terekhin

The problem of coefficients quantization for polynomials is solved for affine frames. The problem about coefficients quantization for frame decomposition is considered also. The notion of a spectrum of the quantum frame is introduced. The spectrum of family of affine frames is estimated.

Key words: frame, affine frame, quantun frame, spectrum of quantum frame.

1. ЗАДАЧА КВАНТОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть X — банахово пространство, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ образует базис пространства X. Напомним, что $e_i = \{\delta_{ij}\}_{j=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Будем называть X *модельным пространством*.

Пусть, далее, $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — система элементов банахова пространства F. Следуя [1], будем говорить, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является *квантовой* (ε, δ, C)*-сетью* в пространстве F относительно модельного

© Терехин П. А., 2013

пространства X, если существуют постоянные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $C \geq 1$ такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется конечный набор целых чисел $\{m_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{Z}$ такой, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} m_k \delta \varphi_k \right\|_F < \varepsilon, \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} m_k \delta e_k \right\|_X \leq C \|f\|_F.$$

Заметим, что определение квантовой сети однородно по паре параметров (ε, δ), т.е. для любого $\lambda > 0$ квантовая (ε, δ, C)-сеть будет квантовой $(\lambda\varepsilon, \lambda\delta, C)$-сетью. В силу этого обстоятельства существует ε-аппроксимация любого вектора f для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ с линейной зависимостью $\delta = \delta(\varepsilon)$.

В работе [1] приведен ряд отрицательных результатов о невозможности построения квантовых сетей, во-первых, на основе базисов или полных минимальных систем в банаховых пространствах, не содержащих c_0, и, во-вторых, на основе банаховых фреймов с рефлексивным модельным пространством.

В этом пункте настоящей работы строятся квантовые сети на основе аффинных фреймов. Необходимо отметить, что мы используем другое определение понятия фрейма в банаховом пространстве, отличное от работы [1]. Мотивация принятого нами определения и история вопроса имеется в работе автора [2].

Определение 1. Скажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует *фрейм* в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X, если существуют постоянные $0 < A \leq B \leq \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in F^*$ числовая последовательность его коэффициентов Фурье $\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_{F^*} \leq \|\{(g, \varphi_n)\}_{n=1}^\infty\|_{X^*} \leq B\|g\|_{F^*}.$$

Теперь перейдем к определению аффинного фрейма. Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, 1]$. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ по *стандартному представлению* $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \ldots$ и $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, положим:

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = \varphi(2^k t - j).$$

Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ называется *аффинной системой функций*, или *системой сжатий и сдвигов*, порожденной функцией φ.

Предположим, что $\varphi \in L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, и $\int_0^1 \varphi(t)\, dt \neq 0$. Тогда выполняются фреймовые неравенства для всех $g \in L^q[0, 1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см. [3]):

$$A\|g\|_q \leq \sup_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^{2^k - 1} |(g, \varphi_{k,j})|^q \right)^{1/q} \leq B\|g\|_q$$

с постоянными $A = |\int_0^1 \varphi(t)\, dt|$ и $B = (\int_0^1 |\varphi(t)|^p\, dt)^{1/p}$. По определению 1 это означает, что аффинная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ образует фрейм в пространстве $L^p[0, 1]$ относительно модельного пространства $X = \ell^{1,p}$, состоящего из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty = \{x_{k,j}\}_{k=0}^\infty{}_{j=0}^{2^k-1}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{1,p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k - 1} |x_{k,j}|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Такую аффинную систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ назовем аффинным фреймом.

Теорема 1. *Всякий аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является квантовой сетью в пространстве $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, относительно модельного пространства $\ell^{1,p}$.*

Доказательство. Обозначим:

$$E_k(f) = \inf_{\{c_j\}_{j=0}^{2^k-1}} \left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} c_j \varphi_{k,j} \right\|_p, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

как величину наилучшего приближения функции $f \in L^p[0,1]$ линейными комбинациями элементов k-й пачки аффинной системы. Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} E_k(f) = q_\varphi \|f\|_p$$

с положительной постоянной $q_\varphi < 1$ (см. [4, теорема 1.21] для $p = 2$, общий случай доказывается аналогично). Пусть $q_\varphi < q < q_0 < 1$ и $\|f\|_p \le 1$. Тогда существует номер k и числа $\{c_j\}_{j=1}^{2^k-1}$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} c_j \varphi_{k,j} \right\|_p \le q.$$

Положим $m_j = [c_j/\delta]$, $\delta > 0$. Будем иметь

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} m_j \delta \varphi_{k,j} \right\|_p \le q + \delta \|\varphi\|_p, \qquad \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |m_j \delta|^p \right)^{1/p} \le \frac{1+q}{\|\varphi\|_p} + \delta.$$

Выберем $\delta = \delta_0 = \dfrac{q_0 - q}{\|\varphi\|_p}$ и $C_0 = \dfrac{1+q_0}{\|\varphi\|_p}$. При $\|f\|_p \le 1$ получим:

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{2^k-1} m_j \delta_0 \varphi_{k,j} \right\|_p \le q_0, \qquad \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |m_j \delta_0|^p \right)^{1/p} \le C_0.$$

Отсюда следует (см. [1, предл. 4.2]), что найдутся $C_1 < \infty$ и $\delta_1 > 0$, зависящие только от C_0, δ_0, q_0 и такие, что для всех $f \in L^p[0,1]$ существует конечный набор целых чисел $\{m_{k,j}\}_{k=0}^{K}\,{}_{j=0}^{2^k-1}$, для которого

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{K} \sum_{j=0}^{2^k-1} m_j \delta_1 \varphi_{k,j} \right\|_p < 1, \qquad \sum_{k=0}^{K} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} |m_j \delta_1|^p \right)^{1/p} \le C_1 \|f\|_p.$$

Последнее означает, что аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является квантовой $(1, \delta_1, C_1)$-сетью. □

2. КВАНТОВЫЕ ФРЕЙМЫ

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — фрейм в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X в смысле определения 1.

Определение 2. Скажем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — *квантовый фрейм*, если существуют $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется последовательность целых чисел $\{m_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Z}$, для которой $\{\lambda_n m_n\}_{n=1}^\infty \in X$ и справедливо представление

$$f = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n m_n \varphi_n.$$

Множество всех таких последовательностей $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ назовем *спектром* квантового фрейма и будем обозначать $Sp(\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty)$. Наконец, если $\Phi = (\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty)$ — некоторое семейство фреймов, то его спектр $Sp(\Phi)$ определим как пересечение всех спектров фреймов $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Понятно, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — квантовый фрейм в том и только том случае, когда $\{\lambda_n \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — система представления с целыми коэффициентами. Однако нам удобнее считать систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ фиксированной.

В данном параграфе, не останавливаясь на общих свойствах квантовых фреймов и их спектров, оценим спектр семейства аффинных фреймов.

Обозначим через Φ_{aff}^p, $1 \le p < \infty$, семейство всех аффинных фреймов $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ в пространстве $L^p[0,1]$ относительно модельного пространства $\ell^{1,p}$.

Теорема 2. *Справедливо включение*

$$\left\{ \{\lambda_{k,j} > 0\}_{k=0}^{\infty}\,{}_{j=0}^{2^k-1} : \inf_{k \ge 0} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} \lambda_{k,j}^p \right)^{1/p} = 0 \right\} \subset Sp(\Phi_{aff}^p).$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{1}{2^k}\sum\limits_{j=0}^{2^k-1}\lambda_{k,j}^p)^{1/p}=0$, что не ограничивает общности рассуждений ввиду возможности перехода к подпоследовательности $\{k_i\}_{i=1}^\infty$. Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 1. Пусть $q_\varphi<q<q_0<1$ и $f\in L^p[0,1]$. Тогда найдутся $\{c_{k,j}\}$ такие, что

$$\Big\|f-\sum_{j=0}^{2^k-1}c_{k,j}\varphi_{k,j}\Big\|_p\le q\|f\|_p,\qquad k\ge k_0.$$

Положим $m_{k,j}=[c_{k,j}/\lambda_{k,j}]$. При достаточно большом k получим:

$$\Big\|f-\sum_{j=0}^{2^k-1}\lambda_{k,j}m_{k,j}\varphi_{k,j}\Big\|_p\le q\|f\|_p+\|\varphi\|_p\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}\lambda_{k,j}^p\right)^{1/p}\le q_0\|f\|_p.$$

При этом

$$\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}|\lambda_{k,j}m_{k,j}|^p\right)^{1/p}\le\frac{1+q_0}{\|\varphi\|_p}\|f\|_p=C_0\|f\|_p.$$

Используя полученные оценки, выполним процедуру итераций. Пусть $p_0=0$ и $r_0=f$. Если p_{i-1} и r_{i-1} уже построены, то находим $p_i=\sum\limits_{j=0}^{2^{k_i}-1}\lambda_{k_i,j}m_{k_i,j}\varphi_{k_i,j}$ так, чтобы $\|r_{i-1}-p_i\|_p\le q_0\|r_{i-1}\|_p$, что возможно при достаточно большом k_i. Положим $r_i=r_{i-1}-p_i$. Обозначим $s_n=\sum\limits_{i=1}^n p_i$. Имеем:

$$f=r_0=p_1+r_1=p_1+p_2+r_2=\ldots=p_1+\ldots+p_n+r_n=s_n+r_n.$$

По построению $\|r_i\|_p\le q_0\|r_{i-1}\|_p$, откуда $\|r_n\|_p\le q_0^n\|f\|_p\to0$ при $n\to\infty$. Поэтому

$$f=\lim_{n\to\infty}s_n=\sum_{i=1}^\infty p_i=\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=0}^{2^{k_i}-1}\lambda_{k_i,j}m_{k_i,j}\varphi_{k_i,j}.$$

При этом

$$\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}|\lambda_{k_i,j}m_{k_i,j}|^p\right)^{1/p}\le C_0\|r_{i-1}\|_p\le C_0q_0^{i-1}\|f\|_p,$$

так что

$$\sum_{i=1}^\infty\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}|\lambda_{k_i,j}m_{k_i,j}|^p\right)^{1/p}\le\frac{C_0}{1-q_0}\|f\|_p<\infty.$$

После доопределения $m_{k,j}=0$ при $k\ne k_i$ видим, что для последовательности целых чисел $\{m_n\}_{n=1}^\infty=\{m_{k,j}\}_{k=0}^\infty{}_{j=0}^{2^k-1}\subset\mathbb{Z}$ имеет место принадлежность $\{\lambda_n m_n\}_{n=1}^\infty\in\ell^{1,p}$ и справедливо представление

$$f=\sum_{k=0}^\infty\sum_{j=0}^{2^k-1}\lambda_{k,j}m_{k,j}\varphi_{k,j}=\sum_{n=1}^\infty\lambda_n m_n\varphi_n,$$

причем последний ряд также сходится (надо учесть, что функции внутри каждой пачки аффинной системы имеют непересекающиеся носители). □

Теорема 2 показывает, что всякий аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является квантовым фреймом, а также дает достаточное условие принадлежности последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ его спектру. Нам неизвестно, является ли условие

$$\inf_{k\ge0}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}\lambda_{k,j}^p\right)^{1/p}=0$$

необходимым и можно ли вместо включения в утверждении теоремы 2 поставить знак равенства. Однако вообще отказаться от этого условия нельзя. Действительно, пусть $\lambda_{k,j} = \lambda$ для всех k и j. Тогда для порождающей аффинный фрейм функции $\varphi = \chi_{[0,1]}$ все частные суммы ряда

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} m_n \varphi_n$$

представляют собой ступенчатые функции, принимающие значения целых кратных чисел λ, которые не могут приблизить функцию $f(x) = \lambda/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (*проект* МД-1354.2013.1) *и РФФИ* (*проект* 10-01-00097).

Библиографический список

1. *Casazza P. G., Dilworth S. J., Odell E., Schlumprecht Th., Zsak A.* Coefficient quantization for frames in Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 348. P. 66–86.
2. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62. [*Terekhin P. A.* Frames in Banach spaces // Funct. Anal. Appl. 2010. Vol. 44, № 3. P. 199–208.]
3. *Терехин П. А.* Неравенства для компонентов суммируемых функций и их представления по элементам системы сжатий и сдвигов // Изв. вузов. Математика. 1999. № 8. С. 74–81. [*Terekhin P. A.* Inequalities for the components of summable functions and their representations by elements of a system of contractions and shifts // Russian Math. (Izv. VUZ. Matematika). 1999. Vol. 43, № 8. P. 70—77.]
4. *Терехин П. А.* Аффинные системы функций и фреймы в банаховом пространстве : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Саратов, 2010. 230 с. [*Terekhin P. A.* Affine systems of functions and frames in Banach space : Dissertation. Saratov, 2010. 230 p.]

УДК 517.518

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

Р. Н. Фадеев

Саратовский государственный университет
E-mail: belal_templier@mail.ru

Доказаны две теоремы о равномерной сходимости и ограниченности частных сумм рядов по мультипликативным системам с обобщенно-монотонными коэффициентами.

Ключевые слова: мультипликативная система, равномерная сходимость.

Uniform Convergence of the Series with Respect to Multiplicative Systems

R. N. Fadeev

Two theorems on uniform convergence and boundedness of partial sums for the series with generalized monotone coefficients with respect to multiplicative systems are proved.

Key words: multiplicative system, uniform convergence.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел таких, что $2 \le p_n \le N$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда каждое $x \in [0,1)$ имеет разложение вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \qquad x_n \in \mathbb{Z}_+, \qquad 0 \le x_n < p_n. \tag{1}$$

Разложение (1) будет единственным, если для $x = k/m_n$ брать разложение с конечным числом $x_n \ne 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \qquad k_i \in \mathbb{Z}_+, \qquad 0 \le k_i < p_i. \tag{2}$$

Для $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ вида (2) по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j / m_j\right)$. Известно, что система $\{\chi_k\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормированна и полна в $L^1[0,1)$. Кроме того, при $k < m_n$ функция

© Фадеев Р. Н., 2013