Библиографический список

1. *Shisha O.* Monotone approximation // Pacific J. Math. 1965. V. 15, № 2. P. 667–671.
2. *Lorentz G., Zeller K.* Monotone approximation by algebraic polynomials // Trans. Amer. Soc. 1970. V. 149, № 1. P. 1–18.
3. *Шведов А.* Комонотонная полиномиальная аппроксимация функций // Докл. Акад. наук СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 39–42.
4. *Newman D.J.* Efficient comonotone approximation // J. Approx. Theory. 1979. V. 25. P. 189–192.
5. *Beatson R.K., Leviatan D.* On comonotone approximation // Canad. Math. Bull. 1983. V. 26. P. 220–224.
6. *Kolmogorov A.N.* Uber die besste annäherung von funktionen einer gegeben funktionklassen // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 107–110.
7. *Коновалов В.Н.* Оценки диаметров типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1984. V. 35. P. 369–380.
8. *Konovalov V.N., Leviatan D.* Shape-preserving widths of weighted Sobolev-type classes of positive, monotone and convex functions on finite interval // Constr. Approx. 2002. V. 19, № 1. P. 23–58.
9. *Тихомиров В.М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
10. *F.J. Muñoz Delgado V. Ramírez-González D. C.-M.* Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation // J. of Approx. Theory. 1998. V. 98. P. 23–58.
11. *Sidorov S.P.* On the order of approximation by linear shape preserving operators of finite rank // East J. on Approx. 2001. V. 7, № 1. P. 1–8.
12. *Виденский В.С.* Об одном точном неравенстве для линейных положительных операторов конечного ранга // Докл. АН ТаджССР. 1981. Т. 24, № 12. С. 715–717.
13. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.

УДК 517.51

УСЛОВИЯ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p[0,1]$

П.А. Терехин

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: terekhinpa@info.sgu.ru

Рассматривается система сжатий и сдвигов функции (или семейство функций-всплесков на отрезке) в пространствах Лебега. Указан явный вид биортогонально сопряженной системы. Установлена теорема равносходимости биортогонального ряда по системе всплесков и ряда Фурье–Хаара.

Basis Conditions for Systems of Translates and Dilates of Functions in L_p-Spaces

P.A. Terekhin

We consider a family of translates and dilates of function (or in other words family of wavelets on finite interval) in Lebesgue spaces. The explicit expressions for biorthogonal family are given. The theorem of equiconvergence for biorthogonal wavelets series and Fourier–Haar series is established.

Пусть $p \in [1,\infty)$ и функция $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям:

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [0,1], \quad \varphi \in L_p[0,1], \quad \int_0^1 \varphi(t)\,dt = 0.$$

Системой сжатий и сдвигов функции φ называется система функций

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = 2^{k/2}\varphi(2^k t - j),$$

где $n = 2^k + j$, $k \ge 0$, $0 \le j \le 2^k - 1$. Для функции

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1/2), \\ -1, & t \in [1/2,1), \end{cases}$$

система сжатий и сдвигов $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ является системой Хаара. Известно, что система Хаара образует базис пространства $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$. В данной работе решается следующая задача: *найти условия на порождающую функцию φ, при выполнении которых система сжатий и сдвигов $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ этой функции образует базис пространства $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$.*

Определим классы функций $\Phi_p(\psi,\Lambda)$, в терминах которых решается поставленная задача. Пусть $1 \le p < \infty$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел и $\psi \in L_p[0,1]$ — некоторая функция, система сжатий и сдвигов которой образует базис пространства $L_p[0,1]$ (например, функция

Хаара χ). Скажем, что функция $\varphi \in L_p[0,1]$ принадлежит классу $\Phi_p(\psi, \Lambda)$, если ее разложение по системе сжатий и сдвигов функции ψ имеет вид

$$\varphi = \psi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} \psi_{k,j}$$

и коэффициенты этого разложения удовлетворяют условию

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |c_{k,j}|^p \right)^{1/p} \le \lambda_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

При $\lambda_k = M 2^{-\alpha k}$, $M > 0$, $\alpha > 0$, класс $\Phi_p(\psi, \Lambda)$ будем обозначать $\Phi_p^{\alpha}(\psi, M)$.

Условимся о следующих обозначениях: $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ — множество из двух элементов 0 и 1; $\mathbb{D}^k = \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}$ — декартова k-я степень множества $\mathbb{D}$; $\mathbb{D}^\infty = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{D}^k$ — семейство всех конечных последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, состоящих из нулей и единиц (включая при $k = 0$ пустую последовательность); $|\alpha|$ — длина последовательности $\alpha \in \mathbb{D}^\infty$, т.е. $|\alpha| = k$, если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, длину пустой последовательности полагаем равной нулю; $\alpha\beta$ — конкатенация последовательностей $\alpha, \beta \in \mathbb{D}^\infty$, если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$, то $\alpha\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l)$.

Пусть $n = 2^k + j$, $k \ge 0$, $0 \le j \le 2^k - 1$ и $j = \sum\limits_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu 2^{k-\nu}$ — двоичное разложение. При указанном соответствии натурального числа n, упорядоченной пары (k, j) и набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{D}^\infty$ будем полагать $c_n = c_{k,j} = c(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = c_\alpha$.

Теперь, по семейству коэффициентов $c_{k,j}$ разложения функции φ по системе сжатий и сдвигов функции ψ определим другое числовое семейство $c^*_{k,j}$ посредством рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^{k} c(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

причем для пустой последовательности α полагаем $c_\alpha = c^*_\alpha = 1$.

Лемма 1. *Пусть $\{1, \psi^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$ — биортогонально сопряженная система к системе сжатий и сдвигов функции ψ. Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{D}^\infty$ положим*

$$\varphi^*_\alpha = \varphi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{\nu=0}^{k} c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu).$$

Тогда система $\{1, \varphi^*_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$ является биортогонально сопряженной к системе сжатий и сдвигов функции φ.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{D}^\infty$, $|\alpha| = k$, $|\beta| = l$. Вычислим

$$\langle \varphi^*_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \sum_{\nu=0}^{k} c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) \langle \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l) \rangle.$$

Заметим, что

$$\langle \psi^*(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu), \varphi(\beta_1, \dots, \beta_l) \rangle = \begin{cases} \langle \psi^*_\gamma, \varphi \rangle, & \text{если } (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Уравнение $(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) = \beta\gamma$ разрешимо относительно γ лишь в том случае, если $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_l = \beta_l$. При этом $l \le \nu$ и $\alpha_{l+1} = \gamma_1, \dots, \alpha_\nu = \gamma_{\nu-l}$. Так как $\langle \psi^*_\gamma, \varphi \rangle = c_\gamma$, то окончательно находим

$$\langle \varphi^*_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \sum_{\nu=l}^{k} c^*(\alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_k) c(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_\nu).$$

Применяя рекурентные соотношения (1) с заменой $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ на $(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_k)$, получаем, что $\langle \varphi^*_\alpha, \varphi_\beta \rangle = 0$ при $k \ne l$. Если же $k = l$, то $\langle \varphi^*_\alpha, \varphi_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$. Лемма доказана. $\square$

Обозначим $\lambda(z) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k z^k$, $\quad \mu(z) = \frac{1}{\lambda(z)} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k z^k$, где числовая последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ определяется рекуррентными соотношениями $\mu_k = \lambda_k + \sum\limits_{\nu=1}^{k-1} \lambda_{k-\nu}\mu_\nu, \quad k=1,2,\ldots$

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} |c^*_{k,j}|^p \right)^{1/p} \le \mu_k, \quad k=1,2,\ldots \tag{2}$$

Доказательство. Для $|\alpha| = k = 1$ имеем $c^*_\alpha = -c_\alpha$. Поэтому

$$2^{1/2-1/p} \left(\sum_{|\alpha|=1} |c^*_\alpha|^p \right)^{1/p} = 2^{1/2-1/p} \left(\sum_{|\alpha|=1} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} \le \lambda_1 = \mu_1.$$

Предположим, что (2) уже доказано для всех $\nu < k$. Для $|\alpha| = k$ имеем

$$-c^*_\alpha = c_\alpha + \sum_{\nu=1}^{k-1} c(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)c^*(\alpha_{\nu+1},\ldots,\alpha_k),$$

откуда, согласно свойствам нормы, находим

$$2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c^*_\alpha|^p \right)^{1/p} \le 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c_\alpha|^p \right)^{1/p} +$$

$$+2^{k(1/2-1/p)} \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\sum_{|\alpha|=k} |c(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)c^*(\alpha_{\nu+1},\ldots,\alpha_k)|^p \right)^{1/p} \le \lambda_k + \sum_{\nu=1}^{k-1} \lambda_\nu \mu_{k-\nu} = \mu_k.$$

Неравенство (2) установлено по индукции. Лемма доказана. □

Пусть $S_n^{(0)} f = \langle f,1\rangle 1 + \sum\limits_{|\alpha|<n} \langle f,\psi^*_\alpha\rangle \psi_\alpha$ — частная сумма порядка 2^n ряда Фурье функции f по базису $\{1,\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{D}^\infty}$ и $S_n f = \langle f,1\rangle 1 + \sum\limits_{|\alpha|<n} \langle f,\varphi^*_\alpha\rangle \varphi_\alpha$ — частная сумма порядка 2^n биортогонального разложения функции f по системе $\{1,\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{D}^\infty}$. Пусть, далее, $E_n = \|\psi - S_n\psi\|_p$ $(n=1,2,\ldots)$ — уклонение частных сумм биортогонального разложения от функции ψ в метрике пространства $L_p[0,1]$.

Теорема 1 (о равносходимости). *Если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n < \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p = 0$$

и, следовательно, система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *сжатий и сдвигов функции* φ *является базисом пространства* $L_p[0,1]$.

Доказательство. Сначала проверим равенство $S_n S_n^{(0)} f = S_n f$. Для этого вычислим при $|\alpha| < n$ величину

$$\langle f,\varphi^*_\alpha\rangle - \langle S_n^{(0)} f,\varphi^*_\alpha\rangle = \left\langle \sum_{|\beta|\ge n} \langle f,\psi^*_\beta\rangle\psi_\beta, \varphi^*_\alpha \right\rangle = \sum_{|\beta|\ge n} \langle f,\psi^*_\beta\rangle \sum_{\nu=0}^{k} c^*(\alpha_{\nu+1},\ldots,\alpha_k)\langle \psi_\beta, \psi^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)\rangle = 0.$$

Отсюда находим $S_n S_n^{(0)} f = \langle S_n^{(0)} f,1\rangle 1 + \sum\limits_{|\alpha|<n} \langle S_n^{(0)} f,\varphi^*_\alpha\rangle\varphi_\alpha = \langle f,1\rangle 1 + \sum\limits_{|\alpha|<n} \langle f,\varphi^*_\alpha\rangle\varphi_\alpha = S_n f.$

Равенство $S_n S_n^{(0)} f = S_n f$ проверено. Перейдем непосредственно к доказательству равносходимости частных сумм $S_n f$ и $S_n^{(0)} f$. Будем иметь

$$\|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p = \|S_n^{(0)} f - S_n S_n^{(0)} f\|_p = \left\| \sum_{|\alpha|<n} \langle f,\psi^*_\alpha\rangle\psi_\alpha - S_n \sum_{|\alpha|<n} \langle f,\psi^*_\alpha\rangle\psi_\alpha \right\|_p =$$

$$= \left\| \sum_{|\alpha|<n} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi_\alpha - S_n \psi_\alpha) \right\|_p \le \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi_\alpha - S_n \psi_\alpha) \right\|_p .$$

Пусть $|\alpha| = k < n$. Вычислим $S_n \psi_\alpha = \sum\limits_{|\beta|<n} \langle \psi_\alpha, \varphi_\beta^* \rangle \varphi_\beta$. Имеем

$$\langle \psi_\alpha, \varphi_\beta^* \rangle = \begin{cases} \langle \psi, \varphi_\gamma^* \rangle, & \text{если } \beta = \alpha\gamma, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $\beta = \alpha\gamma$, то $|\gamma| = |\beta| - |\alpha| < n - k$. Поэтому $S_n \psi_\alpha = \sum\limits_{|\gamma|<n-k} \langle \psi, \varphi_\gamma^* \rangle \varphi_{\alpha\gamma} = (S_{n-k}\psi)_\alpha$.

Таким образом, находим

$$\left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi_\alpha - S_n \psi_\alpha) \right\|_p = \left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle (\psi - S_{n-k} \psi)_\alpha \right\|_p =$$

$$= 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum_{|\alpha|=k} |\langle f, \psi_\alpha^* \rangle|^p \right)^{1/p} \|\psi - S_{n-k}\psi\|_p .$$

Обозначив $A_k(f) = 2^{k(1/2-1/p)} \left(\sum\limits_{|\alpha|=k} |\langle f, \psi_\alpha^* \rangle|^p \right)^{1/p}$, окончательно получим

$$\|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p \le \sum_{k=0}^{n-1} A_k(f) E_{n-k}.$$

Так как $\{1, \psi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$ — базис, то $f = \langle f, 1 \rangle 1 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle \psi_\alpha$.

В силу необходимого условия сходимости ряда

$$A_k(f) = \left\| \sum_{|\alpha|=k} \langle f, \psi_\alpha^* \rangle \psi_\alpha \right\|_p \cdot \frac{1}{\|\psi\|_p} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k(f) E_{n-k} = \sum_{k=0}^{[n/2]-1} A_k(f) E_{n-k} + \sum_{k=[n/2]}^{n-1} A_k(f) E_{n-k} \le$$

$$\le \sup_{k\ge 0} A_k(f) \cdot \sum_{k=[n/2]}^{\infty} E_k + \sup_{k \ge [n/2]} A_k(f) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} E_k \to 0$$

при $n \to \infty$. Это доказывает равносходимость частных сумм $S_n f$ и $S_n^{(0)} f$. Базисность системы функций $\{1, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$ вытекает из оценки

$$\|f - S_n f\|_p \le \|f - S_n^{(0)} f\|_p + \|S_n^{(0)} f - S_n f\|_p \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана. □

Лемма 3. *Справедливо неравенство* $E_n \le C \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mu_k, \quad n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k = \infty$, то доказывать нечего. Пусть поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty$. Рассмотрим разложение функции ψ по системе функций $\{1, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{D}^\infty}$: $\psi \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{|\alpha|=k} \langle \psi, \varphi_\alpha^* \rangle \varphi_\alpha$.

Имеем

$$\langle \psi, \varphi_\alpha^* \rangle = \sum_{\nu=0}^{k} c^*(\alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_k) \langle \psi, \psi^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu) \rangle = c_\alpha^* .$$

Поэтому $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{|\alpha|=k}\langle\psi,\varphi_\alpha^*\rangle\varphi_\alpha=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{|\alpha|=k}c_\alpha^*\varphi_\alpha$. С учетом неравенства (2) леммы 2 находим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha^*\varphi_\alpha\right\|_p=\|\varphi\|_p\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1/2-1/p)}\left(\sum_{j=0}^{2^k-1}|c_{k,j}^*|^p\right)^{1/p}\leq\|\varphi\|_p\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\right)<\infty.$$

Следовательно, биортогональное разложение функции ψ сходится к некоторой функции ψ_0:

$$\psi_0=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha^*\varphi_\alpha.$$

Видно, что $\langle\psi_0,\varphi_\alpha^*\rangle=\langle\psi,\varphi_\alpha^*\rangle$ для всех $\alpha\in\mathbb{D}^\infty$. Отсюда, в силу определения системы функций $\{1,\varphi_\alpha^*\}_{\alpha\in\mathbb{D}^\infty}$, вытекают равенства $\langle\psi_0,\psi_\alpha^*\rangle=\langle\psi,\psi_\alpha^*\rangle$ для всех $\alpha\in\mathbb{D}^\infty$. Поэтому

$$\psi_0=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\langle\psi_0,\psi_\alpha^*\rangle\psi_\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}\langle\psi,\psi_\alpha^*\rangle\psi_\alpha=\psi.$$

Таким образом, получаем $\psi=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{|\alpha|=k}c_\alpha^*\varphi_\alpha$, откуда, аналогично уже доказанному, находим

$$E_n=\|\psi-S_n\psi\|_p=\left\|\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha^*\varphi_\alpha\right\|_p\leq\sum_{k=n}^{\infty}\left\|\sum_{|\alpha|=k}c_\alpha^*\varphi_\alpha\right\|_p=$$

$$=\|\varphi\|_p\sum_{k=n}^{\infty}2^{k(1/2-1/p)}\left(\sum_{|\alpha|=k}|c_\alpha^*|^p\right)^{1/p}\leq\|\varphi\|_p\sum_{k=n}^{\infty}\mu_k$$

для любого $n=1,2,\ldots$ Лемма доказана. □

Лемма 4. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k<1$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\lambda_k<\infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\mu_k<\infty$.

Доказательство. В силу условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k<1$ функция $\lambda(z)$ не имеет нулей в круге ($|z|\leq 1$). По теореме Винера функция $\mu(z)=\frac{1}{\lambda(z)}$ имеет абсолютно сходящийся ряд Тейлора. Согласно условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\lambda_k<\infty$ функция $\lambda'(z)=-\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\lambda_k z^{k-1}$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Тейлора. Следовательно, такова же функция $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\mu_k z^{k-1}=\mu'(z)=-\mu^2(z)\lambda'(z)$. Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k<1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\lambda_k<\infty$, *и система* $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *сжатий и сдвигов функции* ψ *образует базис пространства* $L_p[0,1]$, $1\leq p<\infty$. *Тогда для любой функции* $\varphi\in\Phi_p(\psi,\Lambda)$ *система* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ее сжатий и сдвигов является базисом пространства* $L_p[0,1]$.

Доказательство. Согласно леммам 3 и 4 имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n\leq C\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\mu_k=C\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\mu_k<\infty$. Осталось применить теорему 1. Теорема доказана. □

Лемма 5. *Если для любой функции* $\varphi\in\Phi_p(\psi,\Lambda)$ *система* $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ее сжатий и сдвигов является базисом пространства* $L_p[0,1]$, $1\leq p<\infty$, *то выполняется соотношение* $\lim_{k\to\infty}\mu_k=0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi=\psi-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k 2^{-k/2}\sum\limits_{j=0}^{2^k-1}\psi_{k,j}$. Очевидно, что функция φ принадлежит классу $\Phi_p(\psi,\Lambda)$. По условию леммы система сжатий и сдвигов функции φ является базисом. Разложим по этому базису функцию ψ. Получим $\psi=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{2^k-1}\langle\psi,\varphi_{k,j}^*\rangle\varphi_{k,j}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{2^k-1}c_{k,j}^*\varphi_{k,j}$. Поскольку $c_{k,j}=-\lambda_k 2^{-k/2}$, то на основании рекуррентных соотношений (1) заключаем, что

$c^*_{k,j} = \mu_k 2^{-k/2}$. Таким образом, имеем $\psi = \varphi + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k 2^{-k/2} \sum\limits_{j=0}^{2^k-1} \varphi_{k,j}$. В силу необходимого условия сходимости ряда и с учетом равенства $\left\| 2^{-k/2} \sum\limits_{j=0}^{2^k-1} \varphi_{k,j} \right\|_p = \|\varphi\|_p, \quad k = 1, 2, \ldots$, находим, что $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$. Лемма доказана. □

Итак, между полученными необходимыми и достаточными условиями базисности систем сжатий и сдвигов функций $\varphi \in \Phi_p(\psi, \Lambda)$ имеется следующий «зазор»: от необходимого условия $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$ до достаточного условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mu_k < \infty$. Следующая теорема называет такие условия на последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, при выполнении которых этот «зазор» исчезает.

Теорема 3. *Пусть система $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ сжатий и сдвигов функции ψ образует базис пространства $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, и последовательность Λ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \le C\lambda_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Тогда условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $\varphi \in \Phi_p(\psi, \Lambda)$ система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ее сжатий и сдвигов была базисом пространства $L_p[0,1]$.

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 2, поскольку в силу условия (3) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \le C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < C.$$

Необходимость. Предположим противное, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \ge 1$. Установим индукцией по n неравенство

$$\mu_n \ge \frac{1}{C}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

При $n = 1$ имеем $\mu_1 = \lambda_1 \ge \frac{1}{C} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \ge \frac{1}{C}$. Предположим, что при некотором $n > 1$ неравенство $\mu_k \ge \frac{1}{C}$ доказано для всех $k < n$. Тогда $\mu_n = \lambda_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k}\mu_k \ge \frac{1}{C} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \lambda_k + \frac{1}{C} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_{n-k} \ge \frac{1}{C}$. Неравенство (4) установлено. Получили противоречие с необходимым условием $\mu_k \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема доказана. □

Следует отметить, что условие (3) известно как *условие Бари* и равносильно тому, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ является объединением конечного набора лакунарных последовательностей. Например, условию Бари (3) удовлетворяет последовательность $\lambda_k = M2^{-\alpha k}$, $M > 0$, $\alpha > 0$.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть система $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ сжатий и сдвигов функции ψ образует базис пространства $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$.*

Тогда условие $M < 2^{\alpha} - 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $\varphi \in \Phi_p^{\alpha}(\psi, M)$ система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ее сжатий и сдвигов была базисом пространства $L_p[0,1]$.

В заключение заметим, что базисность систем сжатий и сдвигов функций (точнее, систем типа Фабера–Шаудера) в пространстве $C[0,1]$ изучалась в работах З.А.Чантурия [1] и Т.Н.Сабуровой [2]. Условия базисности по Риссу систем сжатий и сдвигов в пространстве $L_2[0,1]$ получены в работе автора [3].

Библиографический список

1. *Чантурия З.А.* О базисах пространства непрерывных функций // Мат. сборник. 1972. Т. 88, № 4. С. 589–608.

2. *Сабурова Т.Н.* О базисах в $C[0,1]$ типа Фабера – Шаудера // Теория функций и приближений: Тр. третьей Сарат. зимней школы (Саратов, 1986). Саратов, 1988. Ч. 3. С. 44–46.

3. *Терехин П.А.* Базисы Рисса, порожденные сжатиями и сдвигами функции на отрезке // Мат. заметки. 2002. Т. 72, вып. 4. С. 547–560.