concerning Artin's L-functions of number fields. *Izv. Sarat. Univ. N. S. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 4, pp. 31–34 (in Russian).
5. Kargapolov M. I., Merzliakov Iu. I. *Osnovy teorii grupp* [**Перевод названия на англ. яз.**]. Moscow, Nauka, 1972 (in Russian).
6. Leng S. *Algebra*. Moscow, Mir, 1968 (in Russian).

УДК 517.518

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ $P$-ВАРИАЦИИ ОБОБЩЕННЫМИ СРЕДНИМИ АБЕЛЯ–ПУАССОНА И ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ СРЕДНИМИ

**А. А. Тюленева**

Ассистент кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aatuleneva@km.ru

В работе доказывается асимптотическая оценка приближения обобщенными средними Абеля–Пуассона и логарифмическими средними $p$-вариационной метрике на классе функций с заданной мажорантой $p$-вариационных наилучших приближений. Получен ряд других количественных результатов о приближении этими средними.

*Ключевые слова:* функции ограниченной $p$-вариации, обобщенные средние Абеля–Пуассона, наилучшее приближение, $p$-вариационный модуль непрерывности.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая, ограниченная, $2\pi$-периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем $p$-вариационную сумму:

$$\varkappa_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$$

и $p$-вариационные модули непрерывности (см. [1]):

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta) = \sup_{|\xi|\leqslant\delta} \varkappa_\xi^p(f), \qquad |\xi| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}),$$

$$\omega_{k-1/p}(f,\delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), h), \qquad k\in\mathbb{N}, \qquad k\geqslant 2.$$

Здесь $\Delta_h^k f(x) = \sum\limits_{i=0}^k (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(x+ih)$, $k\in\mathbb{N}$. Пространство $C_p$ функций $f$, удовлетворяющих равенству $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_{1-1/p}(f,\delta) = 0$, является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f,2\pi))$, где $\|f\|_\infty = \sup_{x\in R}|f(x)|$. Можно рассматривать также обычный модуль непрерывности целого порядка $\omega_k(f,\delta)_{C_p} = \sup\limits_{0<h\leqslant\delta}\|\Delta_h^k f\|_{C_p}$. Известно, что $\omega_k(f,\delta)_{C_p} \le 2\omega_{k-1/p}(f,\delta)$ (см. [1]).

Пусть $T_n = \{\alpha_0 + \sum\limits_{i=1}^n(\alpha_i\cos ix + \beta_i \sin ix),\ \alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}\}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда $E_n(f)_{C_p} := \inf\limits_{t_n\in T_n}\|f - t_n\|_{C_p}$. Пространство интегрируемых на $[0,2\pi]$ в $p$-й степени $2\pi$-периодических функций $L_{2\pi}^p$ снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $1\leqslant p<\infty$. Для убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ определим $E_{C_p}(\varepsilon) = \{f\in C_p : E_n(f)_{C_p}\leqslant\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$.

Пусть $\omega(\delta)$ возрастает, непрерывна на $[0,2\pi]$ и $\omega(0)=0$ ($\omega\in\Omega$). Тогда будем писать $\omega\in N^\alpha$, $\alpha>0$, если для $0<\delta<\eta\leqslant 2\pi$ имеем $\omega(\eta)\leqslant C(\eta/\delta)^\alpha\omega(\delta)$, соответственно $\omega\in B$, если $\sum\limits_{i=n}^\infty i^{-1}\omega(i^{-1}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n\in\mathbb{N}$, и $\omega\in S^\alpha$, $\alpha>0$, если $\sum\limits_{i=1}^n i^{\alpha-1}\omega(i^{-1}) = O(\omega(n^\alpha\omega(n^{-1})))$, $n\in\mathbb{N}$. По поводу этих определений см. статью [2]. Для $\omega\in\Omega$ через $H_{1-1/p}^\omega$ обозначим пространство $\{f\in C_p : \omega_{1-1/p}(f,\delta)\le C\omega(\delta), \delta\in[0,2\pi]\}$ с нормой $\|f\|_{\omega,1-1/p} = \|f\|_{C_p} + \sup\limits_{0<t\le 2\pi}\omega_{1-1/p}(f,t)/\omega(t)$. Условие Бари для последовательностей см. в лемме 3.

Напомним, что для $f\in L_{2\pi}^1$ сопряженной функцией $\tilde f(x)$ называется интеграл

$$-\pi^{-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^\pi (f(x+t) - f(x-t))/(2\operatorname{tg} t/2)\,dt,$$

который существует п. в. на $\mathbb{R}$ (см. [3, гл. 4, § 3]). Если $f, \tilde{f} \in L^1_{2\pi}$ и $f$ имеет ряд Фурье $a_0/2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, то $\tilde{f}$ обладает рядом Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx)$.

Для $\lambda > -1$ и $f \in L^1_{2\pi}$ положим

$$A^{\lambda}(r, f)(x) = (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n S_n(f)(x),$$

где $S_n(f) = a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — сумма Фурье $n$-го порядка. При $\lambda = 0$ верно равенство

$$A^0(r, f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

т.е. получаются классические средние Абеля–Пуассона. Для дальнейшего нам понадобятся понятия свертки $f * g(x) := \int\limits_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt$ функций $f, g \in L^1_{2\pi}$ и ядра Дирихле $D_n(t) = 1/2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt = \sin(n+1/2)t/2\sin t/2$, $t \neq 2\pi k$. Легко видеть, что $S_n(f) = \pi^{-1} f * D_n$ и что $|D_n(t)| \leq \pi/2t$, $t \in (0, \pi)$.

Обобщенные средние Абеля–Пуассона $A^{\lambda}(r, f)$, по-видимому, были введены Х. Ханом (H. Khan) [4], который дал критерий сходимости этих средних в точке при $r \to 1-0$. Им же [5] получены поточечные оценки обобщенного ядра Абеля–Пуассона (см. лемму 1), которые будут активно нами использоваться. Другие подходы к обобщению средних Абеля–Пуассона см. в [6, гл. 4]. Интересные оценки приближений классическими средними Абеля–Пуассона в $L^p_{2\pi}$ и $C_{2\pi}$ можно найти в работе М. Ф. Тимана [7]. Логарифмические средние произвольного ряда были определены Д. Борвейном (D. Borwein) [8]. Сходимость в точке логарифмических средних ряда Фурье была исследована Ф. Хсиангом (F. C. Hsiang) [9]. Они задаются равенством

$$L(r, f) = |\ln(1-r)|^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} r^{n+1} S_n(f) = f * J_r, \qquad r \in (0, 1),$$

где $J_r = |\ln(1-r)|^{-1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} r^{n+1} D_n$.

Будем писать $A(r) \asymp B(r)$, $r \in D$, если $C_1 A(r) \leq B(r) \leq C_2 A(r)$, где $C_2 > C_1 > 0$ не зависят от $r \in D$.

Целью нашей работы является получение точной по порядку двусторонней оценки приближения обобщенными средними Абеля–Пуассона $A^{\lambda}(r, f)$ и логарифмическими средними $L(r, f)$ на классе $E_{C_p}(\varepsilon)$ при $1/2 \leq r < 1$. Кроме того, установлен ряд количественных оценок приближения данными средними в $p$-вариационной метрике и связанной с ней метрике Гельдера. Данные результаты во многом аналогичны полученным Т. С. Чикиной (T. S. Chikina) [10] для средних Зигмунда–Рисса.

## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

**Лемма 1 ([5]).** *Пусть* $K_{r,\lambda}(t) = (1-r)^{\lambda+1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n D_n(t)$, *где* $D_n(t) = \sin(n+1/2)t/2\sin t/2$. *Тогда*

$$|K_{r,\lambda}(t)| = \begin{cases} O((1-r)^{-1}), & 0 \leqslant t \leqslant \pi(1-r), \quad 0 \leqslant r < 1, \\ O((1-r)^{\lambda+1}/t^{\lambda+2}), & t \geqslant \pi(1-r), \quad 0 \leqslant r < 1. \end{cases}$$

Доказательство леммы 2 повторяет доказательство аналогичной теоремы в $L^p_{2\pi}$ и $C_{2\pi}$ (см. [11, гл. 6]).

**Лемма 2.** *Пусть* $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда справедлива обратная теорема приближения:*

$$\omega_k(f, 1/n)_{C_p} \leq C n^{-k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} E_{i-1}(f)_{C_p}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 3.** *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *убывает к нулю и удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i/i = O(a_n)$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx/n$. *Тогда* $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, *и* $E_n(f)_{C_p} \leq C a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Аналогичное утверждение верно в* $C_{2\pi}$.

**Доказательство.** В работе Б. И. Голубова [12] аналогичная оценка установлена в лемме 5 для функции $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx/n$ без дополнительного условия Бари. С другой стороны, в той же работе в теореме 4 показано, что если $g \in C_p$, $E_n(g)_{C_p} \le C_1\varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \downarrow 0$ удовлетворяет условию Бари (считаем выполненным неравенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n/n \le \varphi_0$), то для сопряженной функции $\tilde{g} = f$ также справедлива оценка $E_n(f)_{C_p} \le C_2\varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Утверждение для $C_{2\pi}$ принадлежит Н. К. Бари [13]. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $g \in L^1_{2\pi}$. *Тогда* $f * g \in C_p$ *и* $\omega_{1-1/p}(f * g) \le \|g\|_1 \omega_{1-1/p}(f, \delta)$.

Лемма 4 получена в статье [12] для $\delta = 2\pi$. Анализ доказательства показывает, что неравенство верно для произвольного $\delta$.

**Лемма 5.** *Пусть* $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\omega_{k-1/p}(f, \delta)$ *принадлежит классу* $N^{k-1/p}$ *и класс* $N^{\alpha}$, $\alpha > 0$, *содержится в любом классе* $S^{\beta}$ *при* $\beta > \alpha$.

Первое утверждение леммы 5 приведено с доказательством в статье [14], тогда как второе легко следует из леммы 2 известной статьи Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [2].

Основные идеи доказательства следующей леммы можно найти в статье [9].

**Лемма 6.** *Для ядра* $J_r$, $r \in (0, 1)$, *имеем оценку*

$$J_r(t) = \begin{cases} O(r(1-r)^{-1}|\ln(1-r)|^{-1}), & 0 \le t \le 1-r, \\ O(t^{-1}|\ln(1-r)|^{-1}), & 1-r \le t \le \pi. \end{cases}$$

*В частности,* $\|J_r\|_1$ *ограничены.*

**Доказательство.** Поскольку

$$D_n(t) = t^{-1}\sin(n+1)t + \sin(n+1)t(1/2\operatorname{tg} t/2 - 1/t) - \cos(n+1)t = t^{-1}\sin(n+1)t + O(1),$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}r^{n+1}D_n(t) = O\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}r^{n+1}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}r^{n+1}t^{-1}\sin(n+1)t =$$

$$= O(|\ln(1-r)|) + t^{-1}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} n^{-1} = O(|\ln(1-r)|) + t^{-1}\operatorname{Im}\ln[(1-re^{it})^{-1}] =$$

$$= O(|\ln(1-r)|) + t^{-1}\operatorname{arctg}[r\sin t/(1-r\cos t)].$$

Здесь рассматривается ветвь $\ln z$ со свойством $\ln(1) = 0$. При $0 < t \le 1-r$ в силу неравенств $\operatorname{arctg} t < t$ и $\sin t < t$ имеем:

$$t^{-1}\operatorname{arctg}[r\sin t/(1-r\cos t)] < t^{-1}r\sin t/(1-r\cos t) < r/(1-r),$$

откуда следует при $t \in (0, 1-r]$

$$J_r(t) = O(|\ln(1-r)|^{-1}r(1-r)^{-1} + |\ln(1-r)|^{-1}|\ln(1-r)|) = O(r(1-r)^{-1}|\ln(1-r)|^{-1}).$$

Докажем теперь, что сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^{n+1}(n+1)^{-1}\sin(n+1/2)t$ ограничена. Пусть $t \in (\pi/(N+1), \pi/N]$. Тогда

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1}(n+1)^{-1}\sin(n+1/2)t\right| \le \left|\sum_{n=0}^{N}\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\right| = I_1 + I_2$$

и

$$I_1 \le \sum_{n=0}^{N} r^{n+1}(n+1)^{-1}(n+1/2)t \le (N+1)rt \le (N+1)r2\pi/(N+1) \le 2\pi.$$

Для оценки $I_2$ используем преобразование Абеля и формулу

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k+1/2)t = (1-\cos(n+1)t)/2\sin t/2, \qquad t \ne 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Имеем в силу неравенств $\sin(t/2) \ge t/\pi$ на $[0, \pi]$ и $t^{-1} \le \pi^{-1}(N+1)$

$$I_2 \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right)\left|\sum_{k=0}^{n}\sin(k+1/2)t\right| + \frac{r^{N+2}}{N+2}\left|\sum_{k=0}^{N}\sin(k+1/2)t\right| \le$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{r^{n+1}}{n+1}-\frac{r^{n+2}}{n+2}\right)\pi t^{-1}+\frac{r^{N+2}}{N+2}\pi t^{-1}\leq 2\pi(N+1)^{-1}t^{-1}r^{N+1}\leq 2.$$

Из оценок для $I_1$ и $I_2$ получаем:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1}(n+1)^{-1}D_n(t)\right|\leq 2(\pi+1)/2\sin t/2\leq C_1t^{-1},\qquad t\in(0,\pi),$$

и $J_r(t)\leq C_1t^{-1}|\ln(1-r)|^{-1}$ при $1-r\leq t\leq\pi$. Последнее утверждение леммы выводится следующим образом:

$$\|J_r\|_1=2\left(\int\limits_0^{1-r}+\int\limits_{1-r}^{\pi}\right)|J_r(t)|\,dt\leq 2|\ln(1-r)|^{-1}\left(\int\limits_0^{1-r}C_2r(1-r)^{-1}\,dt+\int\limits_{1-r}^{\pi}C_1t^{-1}\,dt\right)\leq$$
$$\leq C_3|\ln(1-r)|^{-1}(r+|\ln(1-r)|)\leq C_4<\infty.$$

Лемма доказана.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

**Теорема 1**. *Пусть $-1<\lambda<1$, $1<p<\infty$, $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}\downarrow 0$ удовлетворяет условию Бари B. Тогда*

$$\sup\{\|A^{\lambda}(r,f)-f\|_{C_p}: f\in E_{C_p}(\varepsilon)\}\asymp(1-r)^{\lambda+1}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{\lambda}r^i\varepsilon_i,\qquad 1/2\leq r<1. \tag{1}$$

**Доказательство.** Так как $(1-r)^{-\lambda-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}r^n$, то для $g\equiv 1$ имеем $A^{\lambda}(r,g)(x)=g(x)=1$. Стандартным образом получаем:

$$A^{\lambda}(r,f)(x)-f(x)=(1-r)^{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}r^n\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))D_n(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-r)^{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}r^n(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))D_n(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))K_{r,\lambda}(t)\,dt,$$

где $K_{r,\lambda}(t)$ — то же, что в лемме 1. По лемме 1 находим, что

$$\|A^{\lambda}(r,f)-f\|_{C_p}\leq C_1\left(\int\limits_0^{\pi(1-r)}\frac{\|\Delta_t^2f(x)\|_{C_p}}{1-r}\,dt+(1-r)^{\lambda+1}\int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi}\frac{\|\Delta_t^2f(x)\|_{C_p}}{t^{\lambda+2}}\,dt\right)\leq$$
$$\leq C_2\left(\omega_2(f,\pi(1-r))_{C_p}+(1-r)^{\lambda+1}\int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi}\frac{\omega_2(f,t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}}\,dt\right)=C_2(I_1+I_2). \tag{2}$$

Пусть $n=[1/(1-r)]$, т. е. $n+1>1/(1-r)\geqslant n$ и $\pi/(n+1)<\pi(1-r)\leqslant\pi/n$. Тогда

$$\int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi}\frac{\omega_2(f,t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}}\,dt\leqslant\int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi/n}\frac{\omega_2(f,t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}}\,dt+\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\pi/(k+1)}^{\pi/k}\frac{\omega_2(f,t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C_3\left((n+1)^{-2}\omega_2(f,\pi/n)_{C_p}(1-r)^{-2-\lambda}+\sum_{k=1}^{n-1}\omega_2(f,\pi/k)_{C_p}(k+1)^{\lambda+2}k^{-2}\right).$$

Отсюда выводим оценку

$$I_2 = (1-r)^{\lambda+1} \int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi} \frac{\omega_2(f,t)_{C_p}}{t^{\lambda+2}}\,dt \le C_4 \left((1-r)\omega_2(f,\pi/n)_{C_p} + \right.$$

$$\left. +(1-r)^{\lambda+1}\sum_{k=1}^{n-1}\omega_2(f,\pi/k)_{C_p}k^{\lambda}\right) \le C_5\left((1-r)^{\lambda+1}\sum_{k=1}^{n}\omega_2(f,1/k)_{C_p}k^{\lambda}\right), \qquad (3)$$

так как $(1-r) \leqslant \max(2^{\lambda},1)(1-r)^{\lambda+1}n^{\lambda}$ при $\lambda > -1$.

Применяя лемму 2, получаем в силу неравенства $\lambda < 1$:

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_2(f,1/k)_{C_p}k^{\lambda} \le C_6\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}k^{-2}iE_{i-1}(f)_{C_p}(k+1)^{\lambda} =$$

$$= C_6\sum_{i=1}^{n}iE_{i-1}(f)_{C_p}\sum_{k=i}^{n}k^{-2+\lambda} \le C_7\sum_{i=1}^{n}i^{\lambda}E_{i-1}(f)_{C_p}. \qquad (4)$$

Так как $r^i \geqslant r^n \geqslant (1-1/n)^n \geqslant 1/4$ при $1 \leqslant i \leqslant n = [1/(1-r)]$, находим, что

$$\sum_{i=1}^{n}i^{\lambda}E_{i-1}(f)_{C_p} \leqslant C_8\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{\lambda}r^iE_i(f)_{C_p} \leqslant C_8\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{\lambda}r^iE_i(f)_{C_p}. \qquad (5)$$

Наконец, $I_1$ из правой части (2) оценивается следующим образом при $\lambda > -1$:

$$I_1 \leqslant \omega_2(f,\pi/n)_{C_p} \le C_9n^{-\lambda-1}\sum_{k=1}^{n}k^{\lambda}\omega_2(f,\pi/n)_{C_p} \le C_{10}(1-r)^{\lambda+1}\sum_{k=1}^{n}k^{\lambda}\omega_2(f,1/k)_{C_p}.$$

Другими словами, $I_1 = \omega_2(f,\pi(1-r))_{C_p}$ оценивается через правую часть (3). Из (3)–(5) окончательно имеем:

$$\|A^{\lambda}(r,f) - f\|_{C_p} = O\left((1-r)^{\lambda+1}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{\lambda}r^iE_i(f)_{C_p}\right),$$

откуда следует верхняя оценка в (1).

Докажем оценку снизу в (1). Пусть $f_0(x) = (\varepsilon_0+\varepsilon_1)\cos x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\varepsilon_n\cos nx/n$. Тогда по лемме 3 имеем $E_n(f)_{C_p} \le C_{11}\varepsilon_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $E_0(f_0)_{C_p} \le C_{11}\varepsilon_0$. С другой стороны, используя обозначения $\varepsilon_0' = \varepsilon_0+\varepsilon_1$, $\varepsilon_n' = \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем:

$$\|f_0 - A^{\lambda}(r,f_1)\|_{C_p} \geqslant |f_0(0) - A^{\lambda}(r,f_0)(0)| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n'}{n} - (1-r)^{\lambda+1}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}r^n\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_k'}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k'}{k}(1-r)^{\lambda+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}r^n - \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n+\lambda}{n}r^n\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k'}{k}(1-r)^{\lambda+1}\sum_{n=0}^{k-1}\binom{n+\lambda}{n}r^n. \qquad (6)$$

Так как при $n \ge 1$ справедливо неравенство $\binom{n+\lambda}{n} \ge C_{12}n^{\lambda}$ (см. [15, Добавления, §9]), а $\binom{0+\lambda}{0} = 1$, то

$$\sum_{n=0}^{k-1}\binom{n+\lambda}{n}r^n \geqslant C_{12}\sum_{n=0}^{k-1}n^{\lambda}r^k \geqslant C_{13}k^{\lambda+1}r^k, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad k \ge 2, \qquad (7)$$

и аналогичное неравенство верно при $k = 1$. Поэтому из (6) и (7) следует при $1/2 \le r < 1$ неравенство

$$\|f_0 - A^{\lambda}(r,f_0)\|_{C_p} \ge C_{13}(1-r)^{\lambda+1}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k'k^{\lambda}r^k \le C_{14}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{\lambda}r^i\varepsilon_i.$$

Из последней оценки вытекает оценка снизу в (1). Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть* $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, $\lambda > -1$. *Тогда*

$$\omega_{1-1/p}(A^{\lambda}(r,f),\delta) \leqslant C(\lambda)\omega_{1-1/p}(f,\delta), \qquad \delta \in [0,2\pi].$$

**Доказательство.** По лемме 4 имеем $\omega_{1-1/p}(f*K_{r,\lambda},\delta)\leqslant\|K_{r,\lambda}\|_1\omega_{1-1/p}(f,\delta)$. Согласно лемме 1 получаем:

$$\|K_{r,\lambda}\|_1\le\int\limits_0^{\pi(1-r)}|K_{r,\lambda}(x)|\,dx+\int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi}|K_{r,\lambda}(x)|\,dx\le C_1\left(\pi(1-r)/(1-r)+\right.$$

$$\left.+(1-r)^{\lambda+1}\int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi}t^{-\lambda-2}\,dt\right)\le C_2\left(1+\frac{(1-r)^{\lambda+1}}{(\pi(1-r))^{1+\lambda}(\lambda+1)}\right)<C_2\frac{\lambda+2}{\lambda+1}<\infty.$$

Из этих оценок вытекает утверждение теоремы.

**Теорема 3**. *Пусть $f\in C_p$, $1<p<\infty$, $\lambda>-1/p$. Тогда*

$$\|A^\lambda(r,f)-f\|_{C_p}=O(\omega_{1-1/p}(f,1-r)),\qquad r\in(0,1).$$

Если же $\lambda>1-1/p$, то

$$\|A^\lambda(r,f)-f\|_{C_p}=O(\omega_{2-1/p}(f,1-r)),\qquad r\in(0,1).$$

**Доказательство.** Согласно оценке (2), в которой нет ограничения $\lambda<1$, и в силу неравенства $\omega_k(f,\delta)_{C_p}\le2\omega_{k-1/p}(f,\delta)$ (см. [1]) имеем:

$$\|A^\lambda(r,f)-f\|_{C_p}\le C_1\left(\omega_{2-1/p}(f,1-r)+(1-r)^{\lambda+1}\int\limits_{\pi(1-r)}^{\pi}t^{-\lambda-2}\omega_{2-1/p}(f,t)\,dt\right).\qquad(8)$$

По лемме 2 из [2] условие $\omega\in S^\alpha$ равносильно условию $\delta^\alpha\int\limits_\delta^\pi t^{-\alpha-1}\omega(t)\,dt=O(\omega(\delta))$, $\delta\in(0,\pi)$. Поэтому правая часть (8) есть $O(\omega_{2-1/p}(f,1-r))$ в том случае, когда $\omega_{2-1/p}(f,t)\in S^{\lambda+1}$. По лемме 5 это справедливо при $\lambda+1>2-1/p$, т.е. при $\lambda>1-1/p$. В силу очевидного неравенства $\omega_{2-1/p}(f,\delta)\le2\omega_{1-1/p}(f,\delta)$ первое утверждение теоремы доказывается аналогично. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *Пусть $\omega(\delta)$, $\varphi(\delta)$ положительны на $(0,2\pi]$, возрастают на $[0,2\pi]$, $\omega(0)=\varphi(0)=0$ и $\omega,\varphi\in C[0,2\pi]$ причем $\eta(\delta):=\omega(\delta)/\varphi(\delta)$ возрастает на $(0,2\pi]$. Тогда для $1<p<\infty$, $\lambda>-1/p$ и $f\in H^\omega_{1-1/p}$ имеем:*

$$\|A^\lambda(r,f)-f\|_{\varphi,1-1/p}=O(\eta(1-r)),\qquad r\in(0,1).$$

**Доказательство.** Пусть $\delta\geqslant1-r$. Тогда по теореме 3 получаем:

$$\frac{\omega_{1-1/p}(f-A^\lambda(r,f),\delta)}{\varphi(\delta)}\leqslant\frac{\|A^\lambda(r,f)-f\|_{C_p}}{\varphi(\delta)}\leqslant\frac{C_1\omega(1-r)}{\varphi(1-r)}=C_1\eta(1-r).$$

При $0<\delta<1-r$ находим по теореме 2:

$$\frac{\omega_{1-1/p}(f-A^\lambda(r,f),\delta)}{\varphi(\delta)}\leqslant\frac{\omega_{1-1/p}(f,\delta)+\omega_{1-1/p}(A^\lambda(r,f),\delta)}{\varphi(\delta)}\leqslant\frac{C_2\omega(\delta)}{\varphi(\delta)}=C_2\eta(\delta)\leqslant C_2\eta(1-r).$$

Таким образом, $\sup\limits_{0<\delta\leqslant2\pi}\omega_{1-1/p}((f-A_r(f),\delta)/\varphi(\delta))=O(\lambda(1-r))$. Так как по теореме 3

$$\|A^\lambda(r,f)-f\|_{C_p}=O(\omega(1-r))=O(\varphi(1-r)\lambda(1-r))=O(\lambda(1-r)),$$

то утверждение теоремы 4 доказано.

**Теорема 5.** *Пусть $1<p<\infty$, последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$, убывающая к нулю, удовлетворяет двустороннему условию Бари $\sum\limits_{k=n+1}^\infty\varepsilon_k/(k+1)\asymp\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$\sup\{\|L(r,f)-f\|_{C_p}:f\in E_{C_p}(\varepsilon)\}\asymp|\ln(1-r)|^{-1}\sum_{n=0}^\infty(n+1)^{-1}r^n\varepsilon_n,\qquad1/2\le r<1.$$

**Доказательство**. Аналогично доказательству теоремы 1 имеем:

$$L(r,f)(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))J_r(t)\,dt.$$

Полагая $n=[\pi/(1-r)]$ и используя лемму 6, получаем:

$$\|L(r,f)-f\|_{C_p}\le C_1|\ln(1-r)|^{-1}\left((1-r)^{-1}\int\limits_0^{1-r}\|\Delta_t^2 f(\cdot)\|_{C_p}\,dt+\int\limits_{1-r}^{\pi}t^{-1}\|\Delta_t^2 f(\cdot)\|_{C_p\,dt}\right)\le$$

$$\le C_2|\ln(1-r)|^{-1}\left(\omega_2(f,1-r)_{C_p}+\int\limits_{1-r}^{\pi/n}t^{-1}\omega_2(f,t)_{C_p}\,dt+\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\pi/(k+1)}^{\pi/k}t^{-1}\omega_2(f,t)_{C_p}\,dt\right)\le$$

$$\le C_3|\ln(1-r)|^{-1}\left(\omega_2(f,1-r)_{C_p}+\sum_{k=1}^{n}k^{-1}\omega_2(f,1/k)_{C_p}\right)=\frac{C_3(I_1+I_2)}{|\ln(1-r)|}. \tag{9}$$

Применяя лемму 2, получаем аналогично (4)

$$\sum_{k=1}^{n}k^{-1}\omega_2(f,1/k)_{C_p}\le C_4\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}k^{-1}k^{-2}iE_{i-1}(f)_{C_p}=C_4\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}k^{-3}iE_{i-1}(f)_{C_p}\le C_5\sum_{i=1}^{n}i^{-1}E_{i-1}(f)_{C_p}.$$

Так как $r^i\ge r^n\ge(1-\pi/n)^n\ge(1-\pi/4)^4$ при $0\le i\le n$, $n\ge 4$, то имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}i^{-1}E_{i-1}(f)_{C_p}\le C_6\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{-1}r^iE_i(f)_{C_p}\le C_6\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{-1}r^iE_i(f)_{C_p}$$

при $n\ge 4$ и аналогичное неравенство при $n\le 3$ и $1/2\le r<1$. Легко видеть, что $I_1\le I_2$. Поэтому

$$\|L(r,f)-f\|_{C_p}\le C_7|\ln(1-r)|^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{-1}r^iE_i(f)_{C_p}$$

и оценка сверху доказана. Пусть $f_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon'_n\cos nx/n$, где $\varepsilon'_1=\varepsilon_0+\varepsilon_1$, $\varepsilon'_n=\varepsilon_n$ при $n\ge 2$. Тогда по лемме 3 $E_0(f_0)_{C_p}\le C_8\varepsilon_0$, $E_n(f_0)_{C_p}\le C_8\varepsilon_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, и мы находим, что

$$\|f_0-L(r,f_0)\|_{C_p}\ge|f_0(0)-L(r,f_0)(0)|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon'_n}{n}-|\ln(1-r)|^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon'_k}{k}=$$

$$=|\ln(1-r)|^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon'_k}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{n+1}}{n+1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon'_k}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{r^{n+1}}{n+1}\right)=|\ln(1-r)|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}r^{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon'_k}{k}\ge$$

$$\ge C_9|\ln(1-r)|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}r^{n+1}\varepsilon'_n\ge C_{10}|\ln(1-r)|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}r^n\varepsilon_n$$

при условии $1/2\le r<1$. Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 с помощью леммы 6 доказывается

**Теорема 6.** *Пусть $f\in C_p$, $1<p<\infty$. Тогда $\omega_{1-1/p}(L(r,f),\delta)\le C\omega_{1-1/p}(f,\delta)$, $\delta\in[0,2\pi]$.*

Из неравенства (9) вытекает

**Теорема 7.** *Если $f\in C_p$, $1<p<\infty$ и $\int\limits_0^{\pi}t^{-1}\omega_{1-1/p}(f,t)\,dt<\infty$, то*

$$\|f-L(r,f)\|_{C_p}=O(|\ln(1-r)|^{-1}),\qquad 1/2\le r<1.$$

**Замечание.** Теоремы 1 и 5 верны в $C_{2\pi}$, поскольку лемма 3 справедлива в этом случае. Теоремы 6 и 7 дают возможность получить аналог теоремы 4 для логарифмических средних, но скорость сходимости в гельдеровых пространствах будет еще ниже, чем $O(|\ln(1-r)|^{-1}$.

### Библиографический список


1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной $p$-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в **??** т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с.
4. *Khan H.* On some aspects of summability // Indian J. Pure Appl. Math. 1975. Vol. 6, № 6. P. 1468–1472.
5. *Khan H.* On the degree of approximation // Math. Chronicle. 1981. Vol. 10, № 1. P. 63–72.
6. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
7. *Тиман М. Ф.* Наилучшее приближение функций и линейные методы суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 29, № 3. С. 587–604.
8. *Borwein D.* A logarithmic method of summability // J. London Math. Soc. 1958. Vol. 33, № 2. P. 212–220.
9. *Hsiang F. C.* Summability of the Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 67, № 1. P. 150–153.
10. *Chikina T. S.* Approximation by Zygmund-Riesz means in the $p$-variation metrics // Analysis Math. 2013. Vol. 39, № 1. P. 29–44.
11. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.
12. *Голубов Б. И.* О наилучшем приближении $p$-абсолютно непрерывных функций // Некоторые вопросы теории функций и функционального анализа. Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1988. Т. 4. С. 85–99.
13. *Бари Н. К.* О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1955. Т. 19, № 5. С. 284–302.
14. *Volosivets S. S.* Convergence of series of Fourier coefficients of $p$-absolutely continuous functions // Analysis Math. 2000. Vol. 26, № 1. P. 63–80.
15. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.


## Approximation of Bounded $p$-variation Periodic Functions by Generalized Abel–Poisson and Logarithmic Means

**A. A. Tyuleneva**

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, aatuleneva@km.ru

An asymptotic estimate of approximation by generalized Abel–Poisson means in $p$-variation metric on the class of functions with given majorant of $p$-variational best approximation is proved. Several other quantity results on approximation by these means are obtained.

*Key words:* functions of bounded $p$-variation, generalized Abel–Poisson means, best approximation, $p$-variational modulus of continuity.

### References


1. Terekhin A. P. The approximation of functions of bounded $p$-variation. *Izv. vysch. ucheb. zaved. Matematika*, 1965, no. 2. p. 171–187. (in Russian).
2. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties two conjugate functions. *Trudy Mosk. matem. obch.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522. (in Russian).
3. Zygmund A. *Trigonometricheskie riady* [Trigonometric series], vol. 1. Moscow, Mir, 1965, 616 p. (in Russian).
4. Khan H. On some aspects of summability. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 1975, vol. 6, no. 6, pp. 1468–1472.
5. Khan H. On the degree of approximation. *Math. Chronicle*, 1981, vol. 10, no. 1, pp. 63–72.
6. Hardi G. *Raskhodiashchiesia riady* [Divergent series]. Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1951, 504 p. (in Russian).
7. Timan M. F. Best approximation of functions and linear methods of summation of Fourier series. *Izvestiya AN SSSR. Ser. matem.*, 1965, vol. 29, no. 3, pp. 587–604 (in Russian).
8. Borwein D. A logarithmic method of summability. *J. London Math. Soc.*, 1958, vol. 33, no. 2, pp. 212–220.
9. Hsiang F. C. Summability of the Fourier series. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1961, vol. 67, no. 1, pp. 150–153.
10. Chikina T. S. Approximation by Zygmund–Riesz means in the $p$-variation metrics. *Analysis Math.*, 2013, vol. 39, no. 1, pp. 29–44.
11. Timan A. F. *Teoriia priblizheniia funktsii deistvitel'nogo peremennogo* [Approximation theory of real variable functions]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 624 p. (in Russian).
12. Golubov B. I. On the best approximation $p$-absolutely continnons functions. Several questions of function theory and functional analisis, vol. 4. Tbilisi, Izd-vo Tbil. Univ., 1988, pp. 85–99 (in Russian).
13. Bari N. K. On the best approximations of two conjugate functions by trigonometric polinomials. *Izvestiya AN SSSR. Ser. matem.*, 1955, vol. 19, no. 5, pp. 284–302 (in Russian).
14. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of $p$-absolutely continuous functions. Analysis Math. 2000, vol. 26, no. 1, pp. 63–80.
15. Bari N. K. Trigonometricheskie riady [Trigonometric series]. Moscow, Fizmatgiz, 1961. 936 p. (in Russian).