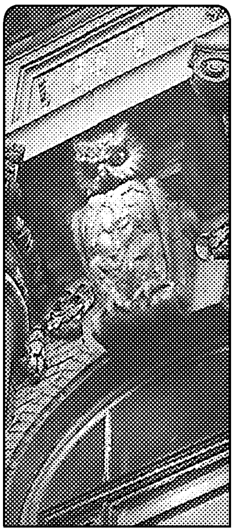
НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ



МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

О ВЫБОРЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТОВ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ НЕПРИВОДИМОГО ПОЛИНОМА ОТ АРГУМЕНТА pq С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА p И q

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова

Воронежский государственный университет
E-mail: algebraist@yandex.ru

В работе получена теорема об одном выборе приближения числа элементов в конечной последовательности специального вида.

Ключевые слова: приближение, число, последовательность, полином.

On the Choice of Approximation for Number of Elements in the Sequence of Values for Simple Polynomial of Argument pq with Constraints on p and q

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova

In this paper the theorem is obtained on one choice of the approximation for the element number in finite sequence of special kind.

Key words: approximation, number, sequence, polynomial.

ВВЕДЕНИЕ

При оценке количества элементов последовательности целых чисел

$$A = \{a_n \in \mathbf{Z} | a_n \le x\}$$

($n \in \mathbf{N}$, x — достаточно большое положительное число), которые не делятся ни на какое простое число из данного множества простых, как правило применяют метод решета, который сводит эту задачу к оценке числа элементов последовательности вида

$$A_d = \{a_n \in A,\ a_n \equiv 0 (\operatorname{mod} d)\}$$

для различных d, где $d \in \mathbf{N}$.

С целью оценки числа элементов последовательности A_d ищется достаточно точная аппроксимация числа элементов этого множества в виде

$$\frac{\omega(d)}{d} X,$$

где $\omega(d)$ — некоторая мультипликативная функция, а X — некоторая положительная функция, $X > 1$ (например, $X = li\, x/\varphi(d)$ для $|A_d| = \pi(x; d, l)$).

Выбор функций $\omega(d)$ и X определяется условием минимизации:

$$R(X, d) = \left| |A_d| - \frac{\omega(d)}{d} X \right|.$$

Отметим, что не всегда удается получить явную оценку величины $R(X; d)$ в классе предполагаемых функций X; и в этом случае подбирают функцию так, чтобы остаточный член был мал «в среднем» в смысле теоремы Бомбьери–Виноградова (см. [1, 2]).

Идеи метода решета лежат в основе постановки и решения задачи, которая рассматривается в данной работе.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Будем применять сведения по теории сравнений из [3] и [4] и функцию Мебиуса, которая определяется следующим равенством:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^s, & n = p_1 p_2 \dots p_s, \\ 0, & p^2 | n, \end{cases}$$

где $n, s \in \mathbf{N}$, $p_1, p_2, \dots, p_s$ — попарно различные простые числа.

Пусть $F(n)$ — неприводимый полином степени g с целыми коэффициентами ($g, n \in \mathbf{N}$) и $n = pq$, где p и q — положительные простые числа, $p \neq q$.

Обозначим через $\rho(d)$ число различных по модулю d решений сравнения $F(n) \equiv 0 (\bmod d)$, где $d \in \mathbf{N}$ и число d свободно от квадратов, т. е. $\mu(d) \neq 0$. Предположим, что $\rho(p) < p$ для всех простых чисел p, причем $\rho(p) < p - 1$, если $p \not| F(0)$.

Рассмотрим конечную последовательность A,

$$A = \{F(pq) |\ p \neq q,\ (pq, F(0)) = 1,\ p \leq x^{\alpha},\ q \leq x^{1-\alpha}\}, \tag{1}$$

где $\alpha, x \in \mathbf{R}$, $x > 1$, $0 < \alpha \leq 1/2$ и элементы из A не делятся ни на какое простое число $\leq x^{1/a}$, т. е. наименьший положительный простой делитель p_n числа $F(pq)$ удовлетворяет неравенству $p_n > x^{1/a}$, где a — параметр решета, x — достаточно большое положительное число.

Обозначим через A_d последовательность

$$A_d = \{F(pq) \in A | F(pq) \equiv 0 (\bmod d)\}$$

и через $|A_d|$ — число элементов в A_d, включая и одинаковые значения.

Пусть $\omega(d)$ — мультипликативная функция такая, что $\dfrac{\omega(d)}{d} X$ является приближением числа $|A_d|$, где $X = X(x)$.

Введем следующие условия на последовательность A.

1) Существует постоянная $C_1' \geq 1$ такая, что

$$1 \leq \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)^{-1} \leq C_1'$$

для любого простого числа p, где $\omega(p)$ — мультипликативная функция такая, что $(\omega(d)/d)X$ является приближением $|A_d|$ и $\mu(d) \neq 0$ ($\mu(n)$ — функция Мебиуса).

Выполнимость условия 1) дает возможность рассматривать

$$\prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right).$$

2) Существуют постоянная $C_2' \geq 1$ и параметр L такие, что

$$-L \leq \sum_{u \leq p < v} \frac{\omega(p)}{p} \ln p - \ln \frac{v}{u} \leq C_2',$$

где $L \geq 1$ и не зависит от u и v $(2 \leq u \leq v)$.

Условие 2) говорит о том, что $\omega(p)$, по крайней мере в среднем по p, равно 1. Иначе будем рассматривать только те последовательности A, при просеивании которых возникает задача одномерного решета.

3) Существуют постоянные α $(0 < \alpha \leq 1)$, $C_3' \geq 1$, $C_0 \geq 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leq C_3' \frac{X}{\ln^C X},$$

где $X \geq 2$, $C_3' = C_3'(C)$, $R(X,d) = |A_d| - \dfrac{\omega(d)}{d} X$.

Условие 3) позволяет говорить о достаточной малости остаточного члена $R(X,d)$.

Отметим, что если известна оценка суммы, содержащейся в остаточном члене, то можно выбрать в одномерном решете Сельберга (в неравенстве $d < \xi^2$) ξ^2 подходящим образом. Это обеспечивается условием 3), так как можно выбрать $\xi^2 = \dfrac{X^\alpha}{\ln^{C_0} X}$.

Усредненные оценки числа простых чисел в арифметических прогрессиях основаны на использовании идей большого решета Ю. В. Линника. Обычно пользуются оценкой при $d \leq X^C$, которую М. Б. Барбан доказал при $C = 3/8 - \varepsilon$, А. Бомбьери и А. И. Виноградов — при $C = 1/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная. Несколько более слабую форму этой оценки при $d \leq \dfrac{X^{1/2}}{\ln^C X}$ доказал А. И. Виноградов.

Поставим задачу: осуществить выбор приближения числа элементов в конечной последовательности A_d, состоящей из значений неприводимого полинома $F(pq)$ натуральной степени g с целыми коэффициентами с ограничениями на p и q, где $p \neq q$, и $F(pq)$ делится на свободное от квадратов натуральное число d.

Подобную задачу рассматривал Х. Рихерт для полинома $F(p)$, $p \leq x$.

В примере 1.2 работы [5] приближение $\dfrac{\rho_1(d)}{d} li\ x$ получено для

$$|A_d| = |\{F(p) | F(p) \equiv 0 (\operatorname{mod} d),\ p \leq x\}|$$

и остаточный член мал в среднем в смысле теоремы Бомбьери–Виноградова.

В работе [5, с. 10] указано (но не доказано) на то, что из теоремы Барбана–Давенпорта следует, что оценка А. И. Виноградова верна и для $n = pq$.

Авторами для остаточного члена

$$R(x,d) = \left| |A_d| - \frac{\rho_1(d)}{\varphi(d)} (li\ x^{1/2})^2 \right|,$$

где $\rho_1(d)$ — число решений сравнения $F(m) \equiv 0 (\operatorname{mod} d)$ при $(m,d) = 1$, показано, что он достаточно мал в том смысле, что выполнено условие на последовательность:

$$\sum_{d < \frac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(x,d)| \leq C_3' \frac{x}{\ln^4 x}.$$

Таким образом, функция $\dfrac{\rho_1(d)}{d} (li\ x^{1/2})^2$ является приближением для

$$|A_d| = \left| \{F(pq) | F(pq) \equiv 0 (\operatorname{mod} d),\ p \leq x^{1/2}\ q \leq x^{1/2}\} \right|.$$

Теорема. *Пусть* $d \in \mathbf{N}$, $d < \dfrac{x^{1/2}}{\ln^{C_0} x}$, d *не делится на квадрат простого числа, и пусть последовательность* A *определяется равенством* (1). *Тогда существует мультипликативная функция* $\omega(d)$ *такая, что* $\dfrac{\omega(d)}{d} X(x)$, *где* $X(x) = (li\ x^{1/2})^2$, *является приближением числа элементов в последовательности* A, *которые делятся на* d.

Доказательство. Для числа $|A_d|$ получим:

$$|A_d| = \sum_{\substack{p \leq x^\alpha,\ q \leq x^{1-\alpha} \\ F(pq) \equiv 0 (\operatorname{mod} d) \\ (pq, F(0)) = 1}} 1 = \sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ F(m) \equiv 0 (\operatorname{mod} d) \\ (m,d) = 1}} \sum_{\substack{p \leq x^\alpha,\ q \leq x^{1-\alpha} \\ pq \equiv m (\operatorname{mod} d)}} 1.$$

Обозначим через $\overline{\pi}(x;d,m)$ внутреннюю сумму при $(m,d)=1$:

$$\overline{\pi}(x;d,m)=\sum_{\substack{p\le x^{\alpha},\, q\le x^{1-\alpha}\\ pq\equiv m(\operatorname{mod} d)}}1,\qquad (m,d)=1.$$

Тогда получим, что

$$|A_d|=\sum_{\substack{1\le m\le d\\ F(m)\equiv 0(\operatorname{mod} d)\\ (m,d)=1}}\overline{\pi}(x;d,m).$$

Обозначим через $\rho_1(d)$ число решений сравнения $F(m)\equiv 0(\operatorname{mod} d)$ для $(m,d)=1$.

Сравним функции ρ_1 и ρ. Имеем $\rho_1(d)=\prod\limits_{p|d}\rho_1(p)$, $\mu(d)\ne 0$, а $\rho_1(p)$ — число решений сравнения $F(m)\equiv 0(\operatorname{mod} p)$ при $p\nmid m$.

Тогда если $m=0$ не является решением указанного сравнения, то $\rho_1(p)=\rho(p)$, если $m=0$ является решением, то в $\rho_1(p)$ оно не учитывается, поэтому $\rho_1(p)=\rho(p)-1$. Так как $m=0$ является решением тогда и только тогда, когда $p|F(0)$, то

$$\rho_1(p)=\begin{cases}\rho(p), & p\nmid F(0),\\ \rho(p)-1, & p\,|F(0).\end{cases}$$

Кроме того, известно [3, гл. 15, § 1, теорема 148, с. 128], что $\rho(p)\le g$, если $\rho(p)<p$, поэтому

$$\rho_1(d)\le\rho(d)\le g^{\nu(d)},\quad \mu(d)\ne 0,$$

если $\rho(p)<p$ для всех $p\,|d$ ($\nu(n)$ — число различных положительных простых делителей натурального числа n).

Таким образом, для числа $|A_d|$ получим:

$$|A_d|=\sum_{\substack{1\le m\le d\\ F(m)\equiv 0(\operatorname{mod} d)\\ (m,d)=1}}\left(\frac{li\ x^{\alpha}\cdot li\ x^{1-\alpha}}{\varphi(d)}+\overline{\pi}(x;d,m)-\frac{li\ x^{\alpha}\cdot li\ x^{1-\alpha}}{\varphi(d)}\right)=$$

$$=\sum_{\substack{1\le m\le d\\ F(m)\equiv 0(\operatorname{mod} d)\\ (m,d)=1}}\frac{li\ x^{\alpha}\cdot li\ x^{1-\alpha}}{\varphi(d)}+\sum_{\substack{1\le m\le d\\ F(m)\equiv 0(\operatorname{mod} d)\\ (m,d)=1}}\left(\overline{\pi}(x;d,m)-\frac{li\ x^{\alpha}\cdot li\ x^{1-\alpha}}{\varphi(d)}\right),$$

где интегральный логарифм определяется равенством

$$li\ x=\int_2^x\frac{du}{\ln u},$$

а $\varphi(n)$ — функция Эйлера (которая определяется как число натуральных чисел, не превосходящих натурального числа n, и взаимно простых с n).

Обозначим через $R(x,d)$ вторую сумму:

$$R(x,d)=\sum_{\substack{1\le m\le d\\ F(m)\equiv 0(\operatorname{mod} d)\\ (m,d)=1}}\left(\overline{\pi}(x;d,m)-\frac{li\ x^{\alpha}\cdot li\ x^{1-\alpha}}{\varphi(d)}\right).$$

Тогда число $|A_d|$ можно записать в виде

$$|A_d|=\frac{1}{\varphi(d)}\rho_1(d)\,li\ x^{\alpha}\cdot li\ x^{1-\alpha}+R(x,d).$$

Введем обозначение $\overline{E}(x,d)=\max\limits_{2\le d\le x}\max\limits_{\substack{1\le m\le d\\ (m,d)=1}}\left|\overline{\pi}(x;d,m)-\dfrac{li\ x^{\alpha}\cdot li\ x^{1-\alpha}}{\varphi(d)}\right|$. Тогда $|R(x,d)|\le$ $\le\rho(d)\overline{E}(x,d)$.

Так как $\rho(d) \le g^{\nu(d)}$, если $\mu(d) \ne 0$, то получим $|R(x,d)| \le g^{\nu(d)}) \overline{E}(x,d)$. Поэтому можно выбрать

$$X = li\ x^{\alpha} \cdot li\ x^{1-\alpha}, \quad \omega(d) = \frac{\rho_1(d)}{\varphi(d)} d, \tag{2}$$

так что функция $\omega(d)$ является мультипликативной и

$$\frac{\omega(d)}{d} X = \frac{li\ x^{\alpha} \cdot li\ x^{1-\alpha}}{\varphi(d)} \rho_1(d).$$

О достаточной малости остаточного члена $R(X,d)$ позволяет говорить выполнимость следующего условия на последовательность: существуют постоянные α $(0 < \alpha \le 1)$, $C_3' \ge 1$, $C_0 \ge 1$, такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \le C_3' \frac{X}{\ln^C X}, \tag{3}$$

где $X \ge 2$, $C_3' = C_3'(C)$, $R(X,d) = |A_d| - \dfrac{\omega(d)}{d} X$, $\nu(d)$ — число различных простых делителей числа d.

Проверим выполнимость условия (3).

Рассмотрим сумму из условия (3) с некоторыми постоянными α и C_0, которые выберем в дальнейшем. При достаточно большом X имеем:

$$\sum_{d < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \le \sum_{d < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} g^{\nu(d)} \overline{E}(X,d) = \sum_{d < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) (3g)^{\nu(d)} \overline{E}(X,d).$$

Так как $d \le X$, то $\overline{E}(X,d) \ll \dfrac{X}{d}$, поэтому, обозначая последнюю сумму через Y_1, получим:

$$Y_1 \ll \sum_{d < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \frac{\mu^2(d)}{d^{1/2}} (3g)^{\nu(d)} \overline{E}^{1/2}(X,d) \ll X^{1/2} \left(\sum_{d < X^{\alpha}} \frac{1}{d} \mu^2(d) (3g)^{2\nu(d)} \right)^{1/2} \left(\sum_{q < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \overline{E}(X,q) \right)^{1/2}.$$

Для первой из полученных сумм получим:

$$\left(\sum_{d < X^{\alpha}} \frac{1}{d} \mu^2(d) (3g)^{2\nu(d)} \right)^{1/2} = \left(\sum_{d_1 \dots d_{(3g)^2} < X^{\alpha}} \frac{\mu^2(d_1 \dots d_{(3g)^2})}{d_1 \dots d_{(3g)^2}} \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\left(\sum_{n < X^{\alpha}} \frac{1}{n} \right)^{(3g)^2} \right)^{1/2} \le (\alpha \ln X + 1)^{(3g)^2/2}.$$

Для оценки второй суммы применим результат Барбана [6, теорема 3.3] при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 1/2$, тогда получим оценку:

$$\sum_{q < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \max_{\substack{1 \le m \le q \\ (m,q)=1}} \left| \overline{\pi}(X;q,m) - \frac{li\, X^{\alpha}\ li\ X^{1-\alpha}}{\varphi(q)} \right| = O\left(\frac{X}{\ln^{\frac{C}{10}} X} \right),$$

где $C > 0$. Поэтому при $C_0/10 = 8 + (3g)^2$ получим:

$$\left(\sum_{q < \frac{X^{\alpha}}{\ln^{C_0} X}} \overline{E}(X,q) \right)^{1/2} = \left(O\left(\frac{X}{\ln^{\frac{C_0}{10}} X} \right) \right)^{1/2} = O\left(\frac{X^{1/2}}{\ln^{4 + \frac{1}{2}(3g)^2} X} \right).$$

Таким образом, для суммы Y_1 получим:

$$Y_1 \ll X^{1/2} (\alpha \ln X + 1)^{(3g)^2/2} \frac{X^{1/2}}{\ln^{4 + (3g)^2/2} X} \ll \frac{X}{\ln^4 X},$$

причем постоянная в символе $\ll$ может зависеть только от g.

Итак, при $\alpha = 1/2$ существуют постоянные $C_3' \geq 1$ и $C_0 \geq 1$ такие, что

$$\sum_{d < \frac{X^{1/2}}{\ln^{C_0} X}} \mu^2(d) 3^{\nu(d)} |R(X,d)| \leq C_3' \frac{X}{\ln^4 X},$$

следовательно, условие (3) выполнено с $\alpha = 1/2$.

Таким образом, учитывая (2), получим, что существует мультипликативная функция $\omega(d)$, такая, что $\dfrac{\omega(d)}{d} X(x)$, где $X(x) = (li\ x^{1/2})^2$, является приближением числа элементов в последовательности A, которые делятся на d. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Левин Б. В.* Распределение «почти простых» чисел в целозначных полиномиальных последовательностях // Докл. АН Узб. ССР. 1962. Т. 11. С. 7–9. [*Levin B. V.* Distribution «almost simple» number in all value polynomial sequence // Doklady Akademii Nauk Uzb. SSR. 1962. Vol. 11. P. 7–9.]
2. *Бухштаб А. А.* Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета // УМН. 1967. Т. 22, № 3(135). С. 199–226. [*Buchstab A. A.* A combinatorial strengthening of the Eratosthenes' sieve method // Russian Math. Surveys. 1967. Vol. 22, № 3. P. 205–233.]
3. *Рихерт Х.-Э.* Решето Сельберга // Проблемы аналитической теории чисел / пер. с англ. Б. В. Левина. М. : Мир, 1975. С. 7–42. [*Richert H.-E.* Selbergs sieve // Proc. of Symposia in Pure Mathematics (Stony Brook, 1969). Providence, R. I. : Amer. Math. Soc., 1971. Vol. 20. P. 287–310.]
4. *Бухштаб А.А.* Теория чисел. М. : Просвещение, 1966. 384 с. [*Buchstab A. A.* Number theory. Moscow : Prosveschenie, 1966. 384 p.]
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М. : Наука, 1981. 176 с. [*Vinogradov I. M.* Basic number theory. Moscow : Nauka, 1981. 176 p.]
6. *Барбан М.Б.* Метод «большого решета» и его применения в теории чисел // УМН. 1966. Т. 21, № 1(127). С. 51–102. [*Barban M. B.* The «large sieve» method and its applications in the theory of numbers // Russian Math. Surveys. 1966. Vol. 21, № 1. P. 49–103.]

УДК 501.1

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Н. С. Калужина

Воронежский государственный университет
E-mail: kaluzhina_n_s@mail.ru

В работе изучаются качественные свойства слабого решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Доказано, что каждое слабое решение задачи Коши является медленно меняющейся на бесконечности функцией. Полученный результат применяется для исследования решения задачи Неймана для уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: задача Коши, медленно меняющаяся на бесконечности функция, слабое решение задачи Коши, задача Неймана для уравнения теплопроводности.

Qualitative Properties of Mild Solutions of the Cauchy Problem

N. S. Kaluzhina

In this paper we study the qualitative properties of a mild solution of the problem Cauchy problem for the heat equation. We prove that every mild Cauchy problem is a slowly varying at infinity function. The result is applied to study solutions of the Neumann problem for the heat equation.

Key words: Cauchy problem, slowly varying at infinity function, a mild solution of the Cauchy problem, Neumann problem for the heat equation.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — комплексное гильбертово пространство [1], $\operatorname{End} H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H. Через $L^1(\mathbb{R}_+, H)$ обозначается пространство суммируемых на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ со значениями в H функций со сверткой функций в качестве умножения (см. [2])

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s) g(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad f, g \in L^1(\mathbb{R}_+, H).$$

Через $C_b(\mathbb{R}_+, H)$ обозначается банахово пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_+$ функций со значениями в H с supremum-нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} \|x(t)\|$. Подпространство функций из $C_b(\mathbb{R}_+, H)$,