УДК 517.544

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Я. А. Васильев

Смоленский государственный университет
E-mail: Vasiliev.Yaroslav.A@yandex.ru

В данной статье исследуется обобщенная краевая задача типа Римана в классе кусочно-бианалитических функций в случае произвольных односвязных областей. Рассмотрен общий метод решения рассматриваемой задачи и построена картина ее разрешимости.

Ключевые слова: кусочно-бианалитическая функция; обобщенная краевая задача типа Римана.

About Solution the Generalized Boundary Value Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in Case of Any Simply Connected Domains

Ya. A. Vasiliev

On this we investigate generalized boundary value problem of Riemann type in the class of sectionally bianalytic functions in case of any simply connected domains. The methods for solving the considered problem was developed and its decidability picture was constructed.

Key words: sectionally bianalytic function; generalized boundary problem of Riemann type.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким контуром $L \in C^2_\mu$, а T^- — область, дополняющая $T^+ \cup L$ до расширенной комплексной плоскости. Для определенности будем считать, что начало координат находится в T^+.

Рассматривается следующая краевая задача. *Требуется найти все кусочно-бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, $F^+(0) = 0$, $F^-(\infty) = 0$ и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} - G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int_L A_1(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x}d\tau + \int_L B_1(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x}d\tau = g_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} - G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int_L A_2(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y}d\tau + \int_L B_2(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y}d\tau = ig_2(t), \tag{2}$$

где i — мнимая единица, $G_k(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1,2)$ — заданные на L функции, причем $G_k(t) \in H^{(3-k)}(L)$, $g_k(t) \in H^{(2)}(L)$, $G_k(t) \neq 0$ на L; $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)$ — заданные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(3-k)}(L \times L)$.

Сформулированную задачу ради краткости назовем *задачей* $\mathbf{GR_{1,2}}$, а соответствующую однородную задачу $(g_1(t) \equiv g_2(t) \equiv 0)$ — *задачей* $\mathbf{GR^0_{1,2}}$.

Сразу отметим, что при $A_1(t,\tau) \equiv A_2(t,\tau) \equiv B_1(t,\tau) \equiv B_2(t,\tau) \equiv 0$ задача $\mathbf{GR_{1,2}}$ подробно исследована в монографии [1].

Кроме того, в случае, когда $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, задача $\mathbf{GR_{1,2}}$ была исследована в статьях [2, 3]. Но поскольку бианалитические функции не инвариантны относительно конформных отображений (см., например, [1]), то методы, разработанные в случае $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, не переносятся на случай произвольной области. Поэтому основной целью настоящей статьи является разработка конструктивного метода решения задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$ в случае произвольных односвязных областей с гладкими границами.

2. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ $\mathbf{GR_{1,2}}$

Как известно (см., например, [1, с. 26, 27]), исчезающую на бесконечности кусочно-бианалитическую функцию $F(z)$ с линией скачков L можно представить в виде

$$F(z) = \begin{cases} F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-, \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_k^+(z) \in A(T^+)$, $\varphi_k^-(z) \in A(T^-)$, $k = 0, 1$, причем

$$\prod\{\varphi_k^-, \infty\} \geq k + 1, \qquad k = 0, 1 \tag{4}$$

(здесь $\prod\{\varphi_k^-, \infty\}$ означает порядок функции $\varphi_k^-(z)$ в точке $z = \infty$).

В силу представления (3) и соотношений $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ (см. [4, с. 304]) краевые условия (1) и (2) можно переписать соответственно в виде

$$\begin{gathered}
\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} + \varphi_1^+(t) - G_1(t)\left[\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + \varphi_1^-(t)\right] + \\
+ \int_L A_1(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^+(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^+(\tau)\right] d\tau + \\
+ \int_L B_1(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^-(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^-(\tau)\right] d\tau = g_1(t),
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
\frac{d\varphi_0^+(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) - G_2(t)\left[\frac{d\varphi_0^-(t)}{dt} + \bar{t} \cdot \frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \varphi_1^-(t)\right] + \\
+ \int_L A_2(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^+(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} - \varphi_1^+(\tau)\right] d\tau + \\
+ \int_L B_2(t,\tau)\left[\frac{d\varphi_0^-(\tau)}{d\tau} + \bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} - \varphi_1^-(\tau)\right] d\tau = g_2(t),
\end{gathered} \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_0^+(z) = \frac{d\varphi_0^+(z)}{dz}, \qquad \Phi_0^-(z) = \frac{d\varphi_0^-(z)}{dz}, \qquad \tilde{\Phi}_0^-(z) = z\frac{d\varphi_0^-(z)}{dz}, \tag{7}$$

$$\tilde{G}_1(t) = \frac{G_1(t)}{t}, \qquad \tilde{B}_1(t,\tau) = \frac{B_1(t,\tau)}{\tau}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
Q_0(t) = \bar{t}G_1(t)\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} + G_1(t)\varphi_1^-(t) - \bar{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) - \int_L A_1(t,\tau)\left[\bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^+(\tau)\right] d\tau - \\
- \int_L B_1(t,\tau)\left[\bar{\tau} \cdot \frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau} + \varphi_1^-(\tau)\right] d\tau + g_1(t).
\end{gathered} \tag{9}$$

С учетом обозначений (7)–(9) краевое условие (5) можно записать так:

$$\Phi_0^+(t) - \tilde{G}_1(t) \cdot \tilde{\Phi}_0^-(t) + \int_L A_1(t,\tau)\Phi_0^+(\tau)d\tau + \int_L \tilde{B}_1(t,\tau)\tilde{\Phi}_0^-(\tau)d\tau = Q_0(t). \tag{10}$$

Поскольку $\varphi_0^+(z) \in A(T^+)$, $\varphi_0^-(z) \in A(T^-)$, то из равенств (7) следует, что $\Phi_0^+(z) \in A(T^+)$, $\tilde{\Phi}_0^-(z) \in A(T^-)$, причем в силу (4) $\prod\{\tilde{\Phi}_0^-, \infty\} \geq 1$. Кроме того, так как $G_1(t) \in H^{(2)}(L)$, $B_1(t,\tau) \in$ $\in H_*^{(2)}(L \times L)$, то из равенств (8) будем иметь: $\tilde{G}_1(t) \in H^{(2)}(L)$, $\tilde{B}_1(t,\tau) \in H_*^{(2)}(L \times L)$. А значит, учитывая, что $L \in C_\mu^2$, $g_1(t) \in H^{(1)}(L)$, $A_1(t,\tau) \in H_*^{(2)}(L \times L)$ и $F^\pm(z) \in A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, приходим к выводу, что $Q_0(t) \in H(L)$.

Предположим временно, что $Q_0(t)$ — известная функция. Тогда равенство (10) представляет собой краевое условие хорошо изученной (см., например, [1, 4]) *обобщенной скалярной краевой задачи Римана* относительно исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z),\ \tilde{\Phi}_0^-(z)\}$.

Обобщенную задачу Римана (10) будем решать методом, изложенным в монографии [1].

Пусть $\chi_1 = \operatorname{Ind} G_1(t)$ и $\tilde{\chi}_1 = \operatorname{Ind} \tilde{G}_1(t) = \chi_1 - 1$. Тогда, как известно, общее решение задачи (10) (в случае ее разрешимости) задается следующими формулами (см. [1, с. 48, 51]):

$$\Phi_0^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau - z}d\tau + \int_L R_0^+(z,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0} \beta_{0j}d_{0j}^+(z), \quad z \in T^+, \tag{11}$$

$$\tilde{\Phi}_0^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tilde{G}_1(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_0^-(z,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0} \beta_{0j}d_{0j}^-(z), \qquad z \in T^-, \tag{12}$$

где $R_0^{\pm}(z,\tau)$, $d_{0j}^{\pm}(z)$ — вполне определенные функции, выражаемые через $G_1(t)$, $g_1(t)$; β_{0j} ($j = 1, \ldots, l_0$) — произвольные комплексные постоянные;

$$l_0 = \begin{cases} \tilde{\chi}_1 + \nu_0 - r_0, & \tilde{\chi}_1 \geq 0, \\ \max(0, \nu_0 - |\tilde{\chi}_1|), & \tilde{\chi}_1 < 0, \end{cases}$$

а ν_0 — число линейно независимых решений определенного однородного уравнения Фредгольма второго рода (см., например, [1, с. 47]), r_0 — ранг определенной матрицы (см., например, [1, с. 50–51]), причем $\nu_0 \geq r_0$ и $\beta_{01} = \beta_{02} = \ldots = \beta_{0l_0} = 0$ при $l_0 = 0$.

Поскольку $[\varphi_1^+(t)]^{(k)}$ и $[\varphi_1^-(t)]^{(k)}$, $k = 0,\ 1,$ — граничные значения аналитических соответственно в T^+ и T^- функций $[\varphi_1^+(z)]^{(k)}$, $[\varphi_1^-(z)]^{(k)}$ (причем $[\varphi_1^-(z)]^{(k)}|_{z=\infty} = 0$), то, как известно (см., например, [1, с. 40]), на L выполняются следующие равенства

$$[\varphi_1^{\pm}(t)]^{(k)} = \pm\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{[\varphi_1^{\pm}(\tau)]^{(k)}}{\tau - t}d\tau, \qquad t \in L \quad (k = 0, 1). \tag{13}$$

Из (11) и (12), устремив z к $t \in L$, с учетом обозначений (7)–(9), формул Сохоцкого–Племеля и формул перестановки Пуанкаре–Бертрана (см., например, [1, с. 28]) будем иметь:

$$\begin{gathered} \Phi_0^+(t) = \frac{1}{2}Q_0(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L R_0^+(t,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^+(t) = \\ = -\bar{t}\frac{d\varphi_1^+(t)}{dt} - \varphi_1^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\bar{\tau}\,G_1(\tau) - \bar{t}G_1(t)}{\tau - t} - B_{02}^+(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau}d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{G_1(\tau) - G_1(t)}{\tau - t} - B_{01}^+(t,\tau)\right]\varphi_1^-(\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t} + A_{02}^+(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau}d\tau - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_L A_{01}^+(t,\tau)\varphi_1^+(\tau)d\tau + \frac{1}{2}g_1(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g_1(\tau)}{\tau - t}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_L R_0^+(t,\tau)g_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^+(t), \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \tilde{\Phi}_0^-(t) = -\frac{1}{2}\frac{Q_0(t)}{\tilde{G}_1(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_0(\tau)}{\tilde{G}_1(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L R_0^-(t,\tau)Q_0(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^-(t) = -t\bar{t}\frac{d\varphi_1^-(t)}{dt} - \\ -t\varphi_1^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\tau\bar{\tau} - t\bar{t}}{\tau - t} - B_{02}^-(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^-(\tau)}{d\tau}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L B_{02}^-(t,\tau)\varphi_1^-(\tau)d\tau - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\left(\frac{\bar{\tau}}{\tilde{G}_1(\tau)} - \frac{\bar{t}}{\tilde{G}_1(t)}\right)\frac{1}{\tau - t} + A_{02}^-(t,\tau)\right]\frac{d\varphi_1^+(\tau)}{d\tau}d\tau - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\left(\frac{1}{\tilde{G}_1(\tau)} - \frac{1}{\tilde{G}_1(t)}\right)\frac{1}{\tau - t} + A_{01}^-(t,\tau)\right]\varphi_1^+(\tau)d\tau - \\ -\frac{1}{2}\frac{g_1(t)}{\tilde{G}_1(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g_1(\tau)}{\tilde{G}_1(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \int_L R_0^-(t,\tau)g_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_0}\beta_{0j}d_{0j}^-(t), \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} A_{0k}^+(t,\tau) = \bar{\tau}^{k-1}\left\{\left[1 + R_{01}^+(t,\tau)\right]\int_L \frac{A_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 + \pi i\left[A_1(t,\tau) + 2R_0^+(t,\tau)\right]\right\}, \\ B_{0k}^+(t,\tau) = \bar{\tau}^{k-1}\left\{\left[1 - R_{01}^+(t,\tau)\right]\int_L \frac{B_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 + \pi i\left[B_1(t,\tau) - 2G_1(\tau)R_0^+(t,\tau)\right]\right\}, \\ A_{0k}^-(t,\tau) = \bar{\tau}^{k-1}\left\{\left[\frac{1}{\tilde{G}_1(\tau)} - R_{01}^-(t,\tau)\right]\int_L \frac{A_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 - \pi i\left[\frac{A_1(t,\tau)}{\tilde{G}_1(t)} - 2R_0^-(t,\tau)\right]\right\}, \\ B_{0k}^-(t,\tau) = \bar{\tau}^{k-1}\left\{\left[\frac{1}{\tilde{G}_1(\tau)} - R_{01}^-(t,\tau)\right]\int_L \frac{B_1(\tau_1,\tau)}{\tau_1 - t}d\tau_1 - \pi i\left[\frac{B_1(t,\tau)}{\tilde{G}_1(t)} + 2G_1(\tau)R_0^-(t,\tau)\right]\right\}, \\ R_{01}^{\pm}(t,\tau) = 2\pi i(\tau - t)R_0^{\pm}(t,\tau), \qquad k = 1, 2. \end{gathered}$$

Ясно, что

$$\Phi_0^-(t) = t^{-1}\tilde{\Phi}_0^-(t). \tag{16}$$

Подставляя в (6) вместо $\dfrac{d\varphi_0^{\pm}(t)}{dt}$ найденные по формулам (14), (15) и (16) граничные значения кусочно-аналитической функции $\Phi_0^{\pm}(z) = \dfrac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}$, с учетом $\tilde{G}_1(t) \neq 0$ и после некоторых преобразований получаем краевое условие еще одной обобщенной задачи Римана нормального типа для определения исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \tilde{\varphi}_1^-(z)\}$:

$$\varphi_1^+(t) - \tilde{G}_2(t) \cdot \tilde{\varphi}_1^-(t) + \int_L A_{11}(t,\tau)\varphi_0^+(\tau)d\tau + \int_L B_{11}(t,\tau)\tilde{\varphi}_1^-(\tau)d\tau = Q_1(t), \tag{17}$$

где $\tilde{G}_2(t) = t^{-1}G_2(t)$, $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$; $A_{11}(t,\tau)$, $B_{11}(t,\tau)$ — определенные фредгольмовы ядра, принадлежащие классу $H_*^{(1)}(L \times L)$, $Q_1(t)$ — вполне определенная функция из класса $H^{(1)}(L)$.

Пусть $\chi_2 = \operatorname{Ind} G_2(t)$ и $\tilde{\chi}_2 = \operatorname{Ind} \tilde{G}_2(t) = \chi_2 - 1$. Далее, решая краевую задачу (17), например, методом, изложенным в монографии [1], получаем ее общее решение в виде

$$\varphi_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tau - z}d\tau + \int_L R_{11}^+(z,\tau)Q_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_1}\beta_{1j}d_{1j}^+(z), z \in T^+, \tag{18}$$

$$\tilde{\varphi}_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tilde{G}_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_{11}^-(z,\tau)Q_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_1}\beta_{1j}d_{1j}^-(z), z \in T^-, \tag{19}$$

где $R_{11}^{+}(z,\tau)$, $d_{1j}^{+}(z)$ — вполне определенные функции, выражаемые через $G_k(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1,2)$; β_{1j} $(j = 1,\ldots,l_1)$ — произвольные комплексные постоянные;

$$l_1 = \begin{cases} \tilde{\chi}_2 + \nu_1 - r_1, & \tilde{\chi}_2 \geq 0, \\ \max(0, \nu_1 - |\tilde{\chi}_2|, & \tilde{\chi}_2 < 0, \end{cases}$$

а ν_1 — число линейно независимых решений определенного однородного уравнения Фредгольма второго рода (см., например, [1, с. 47]), r_1 — ранг определенной матрицы (см., например, [1, с. 50–51]), причем $\nu_1 \geq r_1$ и $\beta_{11} = \beta_{12} = \ldots = \beta_{1l_1} = 0$ при $l_1 = 0$.

А так как $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$, то из (19), в свою очередь, получаем:

$$\varphi_1^-(z) = \frac{1}{z}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q_1(\tau)}{\tilde{G}_2(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + \int_L R_{11}^-(z,\tau)Q_1(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{l_1}\beta_{1j}d_{1j}^-(z)\right\}, z \in T^-, \tag{20}$$

Подставив в свободный член $Q_0(t)$ краевого условия (10) вместо $\varphi_1^{\pm}(t)$ и $\dfrac{d\varphi_1^{\pm}(t)}{dt}$ граничные значения функций $\varphi_1^+(z)$, $\varphi_1^-(z)$, определенных по формулам (18), (20), и их производных $\dfrac{d\varphi_1^{\pm}(z)}{dz}$, а затем, решив обобщенную скалярную задачу Римана (10), найдем функции $\dfrac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}$. Отсюда сами функции $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_0^-(z)$ определим так:

$$\varphi_0^+(z) = \int_{L^+} \Phi_0^+(\xi)d\xi, \qquad z \in T^+, \qquad \varphi_0^-(z) = \int_{L^-} \Phi_0^-(\xi)d\xi, \qquad z \in T^-,$$

где L^+ — произвольная гладкая кривая, принадлежащая односвязной области T^+ и соединяющая точки 0 и z; L^- — произвольная гладкая кривая, принадлежащая односвязной области T^- и соединяющая точки ∞ и z.

Наконец, по найденным функциям $\varphi_0^{\pm}(z)$ и $\varphi_1^{\pm}(z)$ искомые решения задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$ определим по формуле

$$F(z) = \begin{cases} \int_{L^+} \Phi_0^+(\xi)d\xi + \bar{z}\varphi_1^+(z), & z \in T^+, \\ \int_{L^-} \Phi_0^-(\xi)d\xi + \bar{z}\varphi_1^-(z), & z \in T^-. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2.1. *Задача* $\mathbf{GR_{1,2}}$ *равносильна системе из двух обобщенных задач Римана* (17) *и* (10) *относительно неизвестных кусочно-аналитических функций* $\varphi_1(z) = \{\varphi_1^+(z), \tilde{\varphi}_1^-(z)\}$ *и*

$\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z), \tilde{\Phi}_0^-(z)\}$ соответственно, где $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$, $\Phi_0^\pm(z) = \dfrac{d\varphi_0^\pm(z)}{dz}$, $\tilde{\Phi}_0^-(z) = z\Phi_0^-(z)$. При этом обобщенная задача Римана (17) не зависит от $\Phi_0^\pm(z)$, а в свободный член $Q_0(t)$ краевого условия обобщенной задачи Римана (10) входят граничные значения функций $\varphi_1^\pm(z)$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ КАРТИНЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ $\mathbf{GR_{1,2}}$

Обозначим через l число линейно независимых (над полем $\mathbf{C}$) решений соответствующей однородной задачи $\mathbf{GR^0_{1,2}}$, а через p — число условий разрешимости неоднородной задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$. Также пусть p_0 (p_1) — число условий разрешимости неоднородной задачи (10) (неоднородной задачи (17)), а через l_0 (l_1) — число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи (10) (однородной задачи (17)).

Хорошо известно (см., например, [1, 4]), что обобщенные скалярные задачи типа Римана (10) и (17) с фредгольмовыми ядрами являются нетеровыми, т. е. они нормально разрешимы (по Хаусдорфу), и числа l_k, p_k ($k = 0,\ 1$) являются *конечными*.

Но согласно теореме 2.1 необходимые условия разрешимости задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$ являются и достаточными (т. е. она нормально разрешима), а в силу формул (21) будем иметь: $l = l_0 + l_1$ и $p = p_0 + p_1$, т. е. l и p — конечные числа. Значит, задача $\mathbf{GR_{1,2}}$ также является нетеровой.

Библиографический список

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : СГПУ, 1998. 343 с. [*Rasulov K. M.* The Boundary Problems for Polyanalytic Functions and Some of Their Applications. Smolensk : SGPU, 1998. 343 p.]

2. *Васильев Я. А.* О решении обобщенной краевой задачи типа Римана для бианалических функций в круге // Современные проблемы науки. Смоленск : Принт-Экспресс, 2011. С. 26–32. [*Vasiliev Y. A.* About Solution the Generalized Boundary Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in the Unit Disc. Smolensk : Print-Express, 2011. P. 26–32.]

3. *Васильев Я. А., Расулов К.М.* Первая обобщенная краевая задача типа Римана для бианалических функций в круге // Изв. Смоленск. гос. ун-та. 2011. № 2. С. 119–129. [*Vasiliev Y. A., Rasulov K. M.* The Generalized Boundary Value Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in the Unit Disc // Izv. Smolensk. Gos. Un-ta. 2011. № 2. P. 119–129.]

4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с. [*Gahov F. D.* The Boundary Problems. Moscow : Nauka, 1977. 640 p.]

УДК 517.51

ТОЖДЕСТВА ТИПА ТИТЧМАРША ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ И ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

В работе доказывается теорема типа Титчмарша о преобразованиях Фурье обобщенных операторов Харди и Харди–Литтлвуда, зависящих от параметра $\alpha \in (1/2, 1]$.

Ключевые слова: оператор Харди, оператор Харди–Литтлвуда, теорема Титчмарша.

Identities of Titchmarsh Type for Generalized Hardy and Hardy–Littlewood Operators

S. S. Volosivets

A Titchmarsh-type theorem on Fourier transforms of Hardy and Hardy-Littlewood operators depending on parameter $\alpha \in (1/2, 1]$ is proved.

Key words: Hardy operator, Hardy–Littlewood operator, Titchmarsh theorem.

ВВЕДЕНИЕ

В теории функций хорошо известны операторы Харди:

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^\infty f(t)/t\,dt, \qquad x > 0, \tag{1}$$

и Харди–Литтлвуда:

$$\mathcal{B}(f)(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)\,dt, \qquad x > 0. \tag{2}$$