УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ РЕКОНСТРУКЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

А.О. Ватульян, В.В. Дударев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону,
кафедра теории упругости
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru, dudarev_vv@mail.ru

Представлен общий подход к проблеме реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругом теле по амплитудно-частотным характеристикам, измеренным на части его границы. На основе сформулированного ранее обобщенного соотношения взаимности построена последовательность линейных некорректных задач, позволяющих осуществлять процедуру уточнения компонент тензора предварительных напряжений. В качестве примера представлены операторные уравнения и серия вычислительных экспериментов по восстановлению монотонных функций распределения предварительного напряженного состояния в задаче об изгибных колебаниях стержня.

Ключевые слова: неоднородное предварительно напряженное состояние, обобщенное соотношение взаимности, операторные уравнения, изгибные колебания, стержень, некорректная обратная задача.

On Some Problems of Reconstruction of Inhomogeneous Pre-Stressed State in Elastic Solids

A.O. Vatulyan, V.V. Dudarev

South Federal University, Rostov-on-Don,
Chair of Elasticity Theory
E-mail: vatulyan@math.rsu.ru, dudarev_vv@mail.ru

Presents a general approach to the problem of reconstruction of the inhomogeneous pre-stressed state in an elastic body on its amplitude-frequency response, measured in part of its border. Based on the previously defined generalized reciprocity is the ratio of the sequence of linear ill-posed problems, allowing for refinement of the procedure for pre-stress tensor component. As an example, presented a series of computational experiments on the restoration of monotone functions of the distribution of pre-stressed state the problem of bending vibrations of a rod.

Key words: heterogeneous pre-stressed state, generalized reciprocity correlation, bending vibrations, rod, incorrect problem

ВВЕДЕНИЕ

Предварительно напряженное состояние представляет один из важнейших факторов, который необходимо учитывать в расчетах на прочность, устойчивость и колебания элементов конструкций. Обычно оно возникает в результате различных технологических процессов, таких как литье, ковка, сварка, термообработка, а также при жестком соединении материалов с различными физико-механическими свойствами. Отметим также, что в различных искусственных и природных конструкциях существуют остаточные напряжения; без них невозможна работа многих конструкций в природе. Учет этих напряжений играет важную роль в задачах изучения деформирования и при идентификации биологических тканей и органов. Определение уровня предварительных напряжений является основополагающим фактором в задачах оценки прочности сооружений на различных стадиях эксплуатации и имеет приложения в совершенствовании методик неразрушающего контроля в геофизике и горной механике, идентификации сложных композиционных материалов и медицинской диагностике мягких тканей [1–3]. При этом отметим, что простейшие модели учета предварительно напряженного состояния приводят к решению краевых задач с измененными, но постоянными коэффициентами. Учет этого фактора в рамках такого подхода весьма распространен в литературе; на основе изменения скоростей в упругом теле развиты методы акустоупругости [4–5], позволяющие определять уровень однородного предварительно напряженного состояния. В то же время отметим, что предварительно напряженное состояние часто является неоднородным, например при наличии дефектов типа трещин, полостей, включений. Также существенно неоднородным является поле остаточных напряжений после выполнения технологических процессов. В этих случаях влияние предварительно напряженного состояния выражается в зависимости коэффициентов дифференциальных операторов, описывающих колебания, от компонент тензора предварительно напряженного состояния и, в конечном счете, от координат. Определение этих зависимостей, по некоторым косвенным данным (обычно граничным полям смещений или ускорений), приводит к необходимости решения коэффициентных обратных задач для дифференциальных операторов [6–7], для исследования которых используются современные вычислительные технологии (метод конечного элемента, метод конечных разностей, методы регуляризации и итерационные схемы). К коэффициентным обратным задачам теории упругости, в которых требуется определить коэффициенты дифференциальных операторов по информации о граничных полях смещений, обычно относят три типа задач [2]. Один из них — об определении структуры существенно неоднородного предварительно напряженного состояния — исследован весьма мало, однако в последние годы развиты некоторые общие подходы к решению задач такого типа.

Отметим, что основной проблемой в решении коэффициентных обратных задач, которые являются нелинейными и некорректными, является нахождение общего способа построения операторных соотношений, связывающих искомые функции, характеризующие законы изменения неоднородности для компонент тензора предварительного напряжения, и измеряемые функции — амплитудно-частотные зависимости граничных точек тела. Переменность коэффициентов дифференциальных операторов не дает возможности построения в явном виде общих представлений решений в таких ситуациях. В этом случае решения прямых задач опираются либо на аппарат интегральных уравнений Фредгольма второго рода (для стержневых и пластиночных конструкций), либо на конечно-элементные или конечно-разностные технологии в более общих ситуациях. При этом для построения решений в обратных задачах формулируются итерационные процессы, основанные на методе линеаризации в окрестности некоторого напряженного состояния. Можно в значительной степени формализовать процедуру построения линейных операторных соотношений, если опираться на некоторые обобщения теоремы взаимности [2, 6].

В настоящей работе представлены общий способ построения операторных соотношений в обратных задачах и его реализация при анализе колебаний простейшей балочной конструкции. При этом рассмотрена как прямая задача о поперечных колебаниях предварительно напряженного консольного стержня (на основе анализа интегрального уравнения Фредгольма второго рода), так и обратная — о восстановлении закона распределения предварительно напряженного состояния по данным об амплитудно-частотной характеристике его торца.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ И ЕЕ ВАРИАЦИОННАЯ ТРАКТОВКА

Рассмотрим установившиеся с частотой ω колебания упругого тела объема V ограниченное поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$, характеризующееся тензором упругих модулей C_{ijkl} и плотностью ρ. Будем считать, что в нем имеется неоднородное предварительно напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений σ_{ij}^0. Колебания вызываются нагрузкой с компонентами p_i, приложенной на части S_σ; часть S_u закреплена.

Линеаризованные уравнения колебаний после отделения временного множителя имеют следующий вид [2–3]:

$$T_{ij} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{1}$$

$$T_{ij} = \sigma_{ij} + u_{i,m}\sigma_{mj}^0, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}, \tag{3}$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad T_{ij}n_j|_{S_\sigma} = p_i, \tag{4}$$

где T_{ij} — компоненты несимметричного тензора, определяемого согласно (2).

Изменение амплитудно-частотных характеристик точек тела V может быть положено в основу процедуры идентификации предварительных напряжений. В обратной задаче формулируется дополнительное условие на части границы S_σ: $u_i|_{S_\sigma} = f_i$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Требуется определить компоненты предварительно напряженного состояния σ_{ij}^0. Сформулированная задача относится к классу нелинейных некорректных задач [6–8], которые требуют специальной процедуры построения решения, основанной на теории регуляризованных итерационных процессов. Заметим, что помимо постановки краевой задачи (1)–(4) более удобна вариационная трактовка, позволяющая более просто формулировать операторные соотношения в обратных задачах.

Для вывода вариационной постановки задачи о колебаниях предварительно напряженного тела используем слабые постановки, характерные для вариационных подходов [9].

Осуществим следующие преобразования над уравнениями движения и граничными условиями:

- выберем некоторые гладкие функции δu_i (кинематически возможное поле смещений) таким образом, чтобы они удовлетворяли граничному условию на части поверхности $S_u : \delta u_i = 0$;
- умножим уравнения движения и граничные условия на выбранные функции δu_i и проинтегрируем соответственно по объему V и поверхности S_σ;
- вычтем из первого равенства второе, тогда получим

$$\int\limits_{S_\sigma} T_{ij} n_j \delta u_i dS - \int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int\limits_V T_{ij,j} \delta u_i dV - \int\limits_V \rho\omega^2 u_i \delta u_i dV = 0. \tag{5}$$

Упростим уравнение (5), используя формулу Гаусса – Остроградского, приводя подобные и подставляя выражения для компонент тензоров T_{ij}, σ_{ij} согласно (2)–(3):

$$\int\limits_V (C_{ijkl} u_{k,l} + u_{i,m}\sigma_{mj}^0)\delta u_{i,j} dV - \int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int\limits_V \rho\omega^2 u_i \delta u_i dV = 0.$$

Последнему равенству, учитывая симметрию тензоров C_{ijkl} и σ_{ij}^0, можно дать вариационную трактовку и сформулировать постановку задачи о колебаниях предварительно напряженного тела в виде условия стационарности некоторого функционала:

$$\delta(\Pi - K + \Pi_\sigma) = 0, \tag{6}$$

где введены следующие стандартные обозначения функционалов:

$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} dV - \int\limits_{S_\sigma} p_i u_i dS$ — потенциальная энергия тела, $\Pi_\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{mj}^0 u_{i,m} u_{i,j} dV$ — функционал, характеризующий предварительно напряженное состояние в теле, $K = \frac{1}{2}\omega^2 \int\limits_V \rho u_i^2 dV$ — кинетическая энергия тела.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И ПРОБЛЕМА ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Представленная ранее обратная задача по определению структуры и уровня предварительно напряженного состояния является нелинейной проблемой. Сформулировать операторные уравнения, связывающие заданные и искомые функции, невозможно в явном виде. Обычно для исследования таких задач используют процедуру линеаризации, причем для формулировки операторного соотношения в обратной задаче на каждом шаге требуется решать некоторую линейную некорректную задачу. На нулевом этапе решается задача без учета предварительно напряженного состояния под действием заданных нагрузок. Задача первого приближения является неоднородной, и построить обратный оператор для нее и сформулировать операторное уравнение для поправки, характеризующей предварительно напряженное состояние, совсем непросто. Для того чтобы избежать утомительной и непростой процедуры решения задачи первого приближения, можно использовать обобщенное соотношение взаимности, построенное в работах [2, 6]. Приведем кратко основные результаты. Пусть имеется два решения обратной задачи (1)–(4), отвечающие различным предварительно напряженным состояниям. Основные характеристики задачи снабдим соответственно индексами 1 и 2: $u_i^{(1)}$, $\sigma_{ij}^{(01)}$, $T_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(02)}$, $T_{ij}^{(2)}$. В соответствии с работой [2] имеем следующее соотношение:

$$0=\int\limits_{S_\sigma} p_i(u_i^{(2)}-u_i^{(1)})dS-\int\limits_V(\sigma_{mj}^{(01)}u_{i,m}^{(1)}u_{i,j}^{(2)}-\sigma_{mj}^{(02)}u_{i,m}^{(2)}u_{i,j}^{(1)})dV, \qquad \omega\in[\omega_1,\omega_2]. \tag{7}$$

Соотношение (7) позволяет построить итерационный процесс [10], и сформулировать последовательность линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с суммируемым ядром, если положить $\sigma_{mj}^{(01)}=t_{mj}^{(n-1)}$, $\sigma_{mj}^{(02)}=t_{mj}^{(n-1)}+t_{mj}^{(n)}$, $u_i^{(1)}=u_i^{(n-1)}$, $u_i^{(2)}=u_i^{(n-1)}+u_i^{(n)}$. Тогда, сохраняя в (7) линейные относительно возмущений слагаемые, получим операторное соотношение [2]:

$$\int\limits_{S_\sigma} p_i(f_i-u_i^{(n-1)})dS+\int\limits_V(t_{mj}^{(n)}u_{i,m}^{(n-1)}u_{i,j}^{(n-1)})dV=0, \qquad \omega\in[\omega_1,\omega_2]. \tag{8}$$

Заметим, что уравнение (8) есть интегральное уравнение Фредгольма первого рода с суммируемыми ядрами; для его решения необходимо использовать регуляризующие алгоритмы [10–12]. На основе уравнения (8) можно организовать итерационный процесс для определения поправок компонент тензора предварительных напряжений $t_{mj}^{(n)}$ по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию, которое обычно выбирается в классе простейших тензорных функций, например постоянных или линейных. Также отметим, что из одного операторного уравнения (8) невозможно однозначно определить сразу все компоненты тензора предварительных напряжений; обычно составляется несколько таких соотношений, соответствующих различным видам приложенной нагрузки и области ее приложения; при этом изменяются ядра интегральных операторов и правые части.

3. ПРИМЕР. ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

Одним из важных примеров поставленной проблемы является задача об установившихся изгибных колебаниях прямолинейного упругого изотропного стержня длины l под действием периодической во времени силы $Pe^{i\omega t}$ с одноосным предварительно напряженным состоянием, которая приводит к одномерной обратной задаче.

Рассмотрим задачу (1)–(4) считая, что из компонент тензора предварительных напряжений отлична от нуля лишь компонента $\sigma_{11}^0\neq 0$, причем ось Ox_1 направлена вдоль оси стержня. Введем следующие обозначения в соответствии с гипотезами стержней Бернулли и положим $u_1=-x_3w'(x_1)$, $u_2=0$, $u_3=w(x_1)$ — компоненты вектора смещений в стержне, F — площадь поперечного сечения, $V=[0;l]\times F$ — объем стержня, $J=\int\limits_F x_3^2dS$ — осевой момент инерции, E — модуль Юнга. Тогда ненулевые компоненты несимметричного тензора T_{ij} представимы в виде

$$T_{11}=\sigma_{11}+u_{1,1}\sigma_{11}^0, \qquad T_{13}=\sigma_{13}, \tag{9}$$

$$T_{31}=\sigma_{31}+u_{3,1}\sigma_{11}^0, \qquad T_{33}=\sigma_{33}, \tag{10}$$

где $\sigma_{11}=Eu_{1,1}=-Ex_3w''(x_1)$, а функция $w(x_1)$, характеризующая смещение нейтральной оси, удовлетворяет условию консольного закрепления на левом конце: $w'(0)=0$, $w(0)=0$.

Подставляя выражения (9)–(10) в каждое из представлений Π, Π_σ, K и производя интегрирование по площади поперечного сечения, получим следующее вариационное уравнение:

$$\delta(\Pi-K+\Pi_\sigma)=\int\limits_0^l\{(J(E+\sigma_{11}^0)w'')''-(F\sigma_{11}^0w')'-\rho F\omega^2w+\omega^2(J\rho w')'\}\delta w\,dx_1+$$

$$+\{(F\sigma_{11}^0w')(l)-(J(E+\sigma_{11}^0)w'')'(l)+P-\omega^2(J\rho w')(l)\}\delta w(l)+(J(E+\sigma_{11}^0)w'')(l)\delta w'(l)=0.$$

откуда,приравняв к нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим уравнение движения и граничные условия в следующем виде [13]:

$$J(E+\sigma_{11}^0)w'')''-(F\sigma_{11}^0w')'-\rho F\omega^2w=0, \tag{11}$$

$$w(0) = 0,\ w'(0) = 0,\ (J(E+\sigma_{11}^0)w'')(l) = 0,\ (J(E+\sigma_{11}^0)w'')' - F\sigma_{11}^0 w')(l) = P. \qquad (12)$$

В предлагаемой постановке осуществлено пренебрежение составляющей инерции вращения $\omega^2 J\rho w'$, часто используемое в прикладных теориях [14].

Полученные уточненные граничные условия соответствуют действию сосредоточенной поперечной силы на конце консольно закрепленного стержня. Обычно в литературе при формулировке граничных условий и уравнения движения предварительно напряженных стержней пренебрегают величиной $\sigma_{11}^0 \neq 0$ по сравнению с величиной модуля Юнга, однако получающееся при этом интегральное уравнение первого рода имеет ядро, обращающееся в ноль в начале координат; при этом оказывается невозможно однозначное восстановление искомой функции в окрестности начала координат. Сохранение упомянутых слагаемых позволяет избежать этой неприятности.

Попутно заметим, что в приведенных соотношениях параметры системы J, E, σ_{11}^0, F, ρ могут быть заданы как функции по переменной $x = x_1$. Краевая задача (11)–(12) есть задача для уравнения 4 порядка с переменными коэффициентами; ее решение получим, используя предварительное сведение к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

4. ФОРМУЛИРОВКА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Рассмотрим один из наиболее точных и эффективных способов решения прямой задачи о расчете амплитудно-частотных характеристик стержня переменного сечения с неоднородным одноосным начальным напряженным состоянием. Осуществим предварительное обезразмеривание задачи. Введем в рассмотрение безразмерные параметры и функции следующим образом: $\tau = \frac{max\sigma_{11}^0}{E_0}$, $\kappa_1^2 = \frac{F_0 l^2}{J_0}$, $\kappa_2^4 = \frac{\rho_0 F_0 l^4}{J_0 E_0}\omega^2$, $P_0 = \frac{Pl^2}{J_0 E_0}$, $\varphi(\xi) = \frac{\sigma_{11}^0}{max\sigma_{11}^0}$, $J = J_0 f_1(\xi)$, $E = E_0 f_2(\xi)$, $F = F_0 f_3(\xi)$, $\rho = \rho_0 f_4(\xi)$, $g_1(\xi) = f_1(\xi)f_2(\xi)$, $g_2(\xi) = f_3(\xi)f_4(\xi)$, где $\xi = \frac{x}{l} \in [0;1]$. Отметим, что безразмерный параметр κ_1 характеризует величину максимального значения компоненты предварительного напряжения σ_{11}^0, а κ_2 — частоту колебаний ω.

Решение обезразмеренной задачи сведено к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода относительно функции $y(\zeta)$ [13]:

$$y(\zeta) = -\int_0^1 K(\zeta,s)y(s)ds + f(\zeta), \qquad (13)$$

где $K(\xi,s) = \frac{1}{a(s)} \int\limits_{max(\xi,s)} (\kappa_1^2 f_3(\eta)\varphi(\eta) + \kappa_2^4(\xi-\eta)(\eta-s)g_2(\eta))d\eta$, $\quad a(s) = g_1(s)\left(1 + \tau\frac{\varphi(s)}{f_2(s)}\right)$, $f(\xi) = (\xi - 1)P_0$.

Численная реализация определения функции $w(\xi)$ (прямая задача) при заданном виде функции, характеризующей предварительно напряженное состояние, осуществлена на основе простейшего варианта метода коллокаций следующим образом:

1) для аппроксимации интегрального оператора в уравнении (13) использована составная квадратурная формула Симпсона с соответствующими коэффициентами B_j и шагом $h = l/(N-1)$, где N — нечетное количество узлов. Значения функции $y(\xi)$ в выбранных узлах $s_i = (i-1)h$ находим из решения следующей линейной алгебраической системы: $y(s_i) + \sum\limits_{j=1}^{N} B_j K(s_i,s_j)y(s_j) = f(s_i)$, $i = 1,\ldots,N$;

2) вычисление значений искомой функции $w(\xi)$ в тех же узлах s_i, $i = 1,\ldots,N-1$ осуществлено с помощью квадратурной формулы трапеций, а для повышения точности на нагруженном конце стержня — по составной квадратурной формуле Симпсона. Тестирование программы, реализующей представленный подход нахождения амплитудно-частотных характеристик балки на основе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, осуществлено путем сравнения с частным случаем постоянных параметров, где имеется точное решение. Серия тестовых экспериментов показала,

что при постоянных параметрах системы для частот колебаний, находящихся ниже второго резонанса, относительная погрешность приближенного, найденного согласно построенного ранее численного решения и аналитического решения, приведенного в [14], в концевой точке $\xi = 1$ для $N = 41$ не превосходит 0.002%. Были проведены также вычислительные эксперименты, связанные с увеличением размерности конечномерного оператора N, показавшие устойчивость и сходимость к точному решению. Отметим, что анализ влияния величины однородного предварительного напряжения на частотные характеристики [13] показал, что это влияние заметно для значений $\tau \geq 10^{-4}$. Исходя из этого анализа был сделан вывод о том, что процедуру реконструкции следует проводить в частотном диапазоне, расположенном ниже первой резонансной частоты стержня. При таком выборе это влияние оказывается наиболее значительным и соответственно процедура реконструкции наиболее эффективна.

5. ОДНОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

В качестве конкретной реализации сформулированного ранее общего подхода к решению поставленной обратной задачи представлено решение задачи об отыскании предварительного одноосного напряженного состояния ($\sigma_{11}^0 \neq 0$). Тогда интегральное уравнение, соответствующее (8), примет вид

$$\int_0^1 t_{11}^{(n)} (J(w^{(n-1)})^2 + F(w^{(n-1)'})^2)dx - P(f - w^{(n-1)}) = 0, \qquad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \tag{14}$$

или, переходя к безразмерным параметрам и вводя обозначение $f_0 = f/l$, имеем

$$\int_0^1 \varphi^{(n)}(\xi)(\tau f_2(\xi)(w^{(n-1)''})^2 + \kappa_1^2 f_3(\xi)(w^{(n-1)'})^2)d\xi - P_0(f_0 - w^{(n-1)}(1)) = 0, \quad \kappa_2 \in [\kappa_2^{(1)}, \kappa_2^{(2)}]. \tag{15}$$

Уравнение (15) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с вполне непрерывным оператором относительно функции $\varphi^{(n)}$. Особенностью ядра этого оператора является его положительность, что для монотонных искомых функций может гарантировать единственность реконструкции. При обращении этого оператора необходимо использовать регуляризующую процедуру [10–11]; при численной реализации использован метод регуляризации А.Н. Тихонова с автоматическим выбором параметра регуляризации. Отметим также, что вопрос о выборе отрезка изменения частоты колебаний (или набора частот, в которых осуществляется зондирование) является весьма важным с точки зрения практической реализации процедуры реконструкции. Как правило, этот отрезок (или частоты) необходимо выбирать в нерезонансном диапазоне. Обычно частотный диапазон выбирался до первой резонансной частоты, как это было рекомендовано ранее. Начальное приближение определялось из условия минимума функционала невязки $J_1 = \int_{\kappa_2^{(1)}}^{\kappa_2^{(2)}} (w(1,\kappa_2) - f_0(\kappa_2))^2 d\kappa_2$ в классе линейных функций на некотором компакте, построенном исходя из априорной информации об ограниченности восстанавливаемой функции. Заметим также, что для этого класса обратных задач отсутствуют ограничения типа положительности искомых функций, как это имеет место для других классов коэффициентных обратных задач [2]. Результаты вычислительных экспериментов показали, что наиболее точно восстанавливаются монотонные функции, немонотонные зависимости восстанавливаются значительно хуже. На рис. 1–2 в качестве иллюстрации представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению безразмерных функций (как положительных, так и отрицательных) $\varphi(\xi)$, характеризующих изменение величины σ_{11}^0 для степенных законов. В вычислительных экспериментах рассматривался отрезок измерения амплитудно-частотной характеристики $w(1,\kappa_2)$, расположенный в нерезонансной области. В серии расчетов было принято $\kappa_1 = 0.2$, $\kappa_2 \in [0.9; 1.8]$, что соответствует частотному диапазону, расположенному до 1-й резонансной частоты, измерения (задание входной информации) производились для пяти – семи частот внутри выбранного диапазона. Здесь сплошной линией показан график исходной функции, прерывистой — начального приближения, точками — восстановленной функции. Результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность при реконструкции монотонных законов неоднородности (погрешность восстановления не превышает 3–5 %).

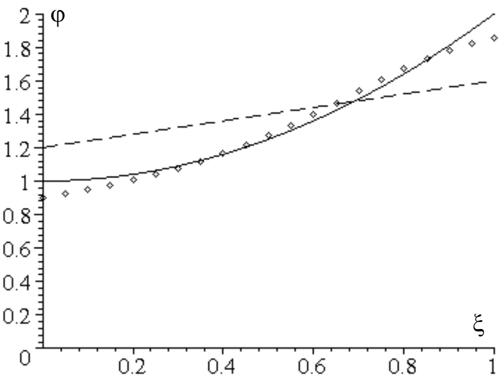

Рис. 1. Семь итераций, степенной закон, положительная функция

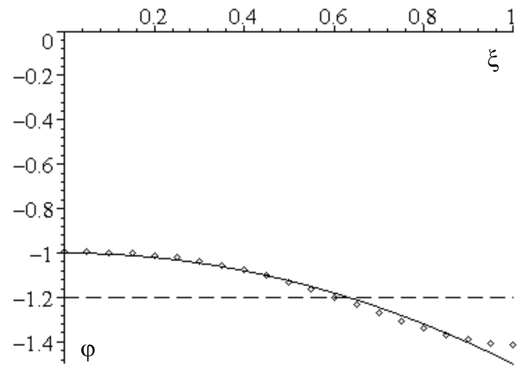

Рис. 2. Четыре итерации, степенной закон, отрицательная функция

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен способ реконструкции неоднородного напряженного состояния в упругих телах на основе частотного зондирования, основанный на анализе коэффициентной обратной задачи для дифференциального оператора теории упругости, построен итерационный процесс, приводящий к уточнению начального приближения. В качестве примера приведены операторные уравнения и результаты вычислительных экспериментов в задаче для изгибных колебаний предварительно напряженного стержня; представлены результаты вычислительных экспериментов реконструкции одноосного напряженного состояния по амплитудно-частотной зависимости; даны рекомендации по выбору частотного диапазона.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ЮМИ (ВНЦ РАН, г. Владикавказ).

Библиографический список

1. *Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И.* Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Наука, 1996. 240 с.

2. *Ватульян А.О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Самар. ун-та. 2007. Вып. 54, № 4. С. 93–103.

3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухслойных остаточных напряжений // Прикладная механика. 1994. Т. 30, № 1. С. 3–17.

4. *Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И.* Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.

5. *Никитина Н.Е.* Акустоупругость. Опыт практического применения. Н. Новгород.: ТАЛАМ, 2005. 208 с.

6. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.

7. *Isakov V.* Inverse problems for PDE. N.Y.: Springer-Verlag, 2005. 284 p.

8. *Ватульян А.О.* К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительно напряженного состояния // Экологический вестн. научных центров ЧЭС. 2006. № 2. С. 23–25.

9. *Ватульян А.О.* О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 2. С. 182–184.

10. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.

11. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

12. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.

13. *Дударев В.В.* Об уточненной модели изгибных колебаний предварительно напряженной балки // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XII Междунар. конф. 2008. Т. 2. С. 56–59.
14. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.

УДК 539.3

О КОСОМ УДАРЕ ЖЕСТКИМ ТЕЛОМ, ИМЕЮЩИМ ПЛОСКУЮ ГРАНИЦУ, ПО НЕЛИНЕЙНОМУ УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

О.В. Дудко, Д.А. Потянихин

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
Владивосток,
лаборатория механики деформируемого твердого тела
E-mail: dudko@iacp.dvo.ru, potyanikhin@mail.ru

Исследуется процесс ударного взаимодействия абсолютно твердого тела с нелинейно-упругим, имеющим плоскую границу. Полагаем, что твердое тело движется с постоянной скоростью, что приводит к автомодельной задаче соударения. Обсуждаются возможные совокупности волновых фронтов, которые могут возникать при таком взаимодействии. В качестве критериев выбора возникающей волновой картины приняты условие существования эволюционных ударных волн и термодинамическое условие совместности сильных разрывов. Схема решения автомодельной краевой задачи включает проверку существования эволюционной ударной волны непосредственно во время численного счета.

Ключевые слова: теория упругости, ударные волны, контактное взаимодействие.

About Oblique Impact by Perfectly Rigid Body with Plane Boundary on the Nonlinear Elastic Half-Space

O.V. Dudko, D.A. Potyanikhin

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS,
Vladivostok,
Laboratory of a Deformable Solid Mechanics
E-mail: dudko@iacp.dvo.ru, potyanikhin@mail.ru

In this paper the impact interaction of perfectly rigid body and nonlinear elastic solid, which have plane boundaries, are investigated. Suppose that the moving rigid body has constant velocity, resulting in self-similar formulation of the problem. Possible variants of wave combinations, arising from such interaction, are discussed. The existence condition for evolutionary shock waves and the thermodynamic discontinuities compatibility condition serve as criterions for choosing the wave pattern. The scheme for the solution of a self-similar boundary-value problem includes checking for the mentioned criterion during computations.

Key words: theory of elasticity, shock wave, shock interaction.

ВВЕДЕНИЕ

Плоские автомодельные задачи нелинейной динамической теории упругости были рассмотрены в работах [1–5]. Автомодельное динамическое деформирование упругопластических твердых тел достаточно подробно изучено в [6–8]. Постановка задачи, представленной в настоящей работе, близка к [1]. Но в отличие от статьи [1], где рассматривается ударное взаимодействие двух нелинейно-упругих тел, здесь одно из тел полагается абсолютно твердым.

Допущения, положенные в основу модели адиабатического деформирования нелинейной упругой среды, приводят к тому, что с математической точки зрения можно построить несколько решений краевой задачи. В представленном исследовании свяжем выбор единственного реализуемого варианта распространения деформаций из множества допустимых с законами термодинамики и с условием эволюционности сильных разрывов. Проверка критериев производилась в процессе численных расчетов на примере серии вычислительных экспериментов.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Система модельных уравнений динамического деформирования нелинейной упругой среды в прямоугольной декартовой системе координат в переменных Эйлера представляется соотношениями:

$$\begin{gathered} v_i = \dot{u}_i + v_j u_{i,j}\,, \qquad w_i = \dot{v}_i + v_j v_{i,j}\,, \qquad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}\, u_{k,j}\,, \\ \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha_{kj}}\left(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}\right), \qquad \sigma_{ij,j} = \rho w_i, \end{gathered} \tag{1.1}$$