$\Phi_0(z) = \{\Phi_0^+(z), \tilde{\Phi}_0^-(z)\}$ соответственно, где $\tilde{\varphi}_1^-(z) = z\varphi_1^-(z)$, $\Phi_0^{\pm}(z) = \dfrac{d\varphi_0^{\pm}(z)}{dz}$, $\tilde{\Phi}_0^-(z) = z\Phi_0^-(z)$. При этом обобщенная задача Римана (17) *не зависит от $\Phi_0^{\pm}(z)$, а в свободный член $Q_0(t)$ краевого условия обобщенной задачи Римана* (10) *входят граничные значения функций $\varphi_1^{\pm}(z)$.*

3. ИССЛЕДОВАНИЕ КАРТИНЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ $\mathbf{GR_{1,2}}$

Обозначим через l число линейно независимых (над полем $\mathbf{C}$) решений соответствующей однородной задачи $\mathbf{GR^0_{1,2}}$, а через p — число условий разрешимости неоднородной задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$. Также пусть p_0 (p_1) — число условий разрешимости неоднородной задачи (10) (неоднородной задачи (17)), а через l_0 (l_1) — число линейно независимых решений соответствующей однородной задачи (10) (однородной задачи (17)).

Хорошо известно (см., например, [1, 4]), что обобщенные скалярные задачи типа Римана (10) и (17) с фредгольмовыми ядрами являются нетеровыми, т. е. они нормально разрешимы (по Хаусдорфу), и числа l_k, p_k ($k = 0, 1$) являются *конечными*.

Но согласно теореме 2.1 необходимые условия разрешимости задачи $\mathbf{GR_{1,2}}$ являются и достаточными (т. е. она нормально разрешима), а в силу формул (21) будем иметь: $l = l_0 + l_1$ и $p = p_0 + p_1$, т. е. l и p — конечные числа. Значит, задача $\mathbf{GR_{1,2}}$ также является нетеровой.

Библиографический список

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : СГПУ, 1998. 343 с. [*Rasulov K. M.* The Boundary Problems for Polyanalytic Functions and Some of Their Applications. Smolensk : SGPU, 1998. 343 p.]

2. *Васильев Я. А.* О решении обобщенной краевой задачи типа Римана для бианалических функций в круге // Современные проблемы науки. Смоленск : Принт-Экспресс, 2011. С. 26–32. [*Vasiliev Y. A.* About Solution the Generalized Boundary Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in the Unit Disc. Smolensk : Print-Express, 2011. P. 26–32.]

3. *Васильев Я. А., Расулов К.М.* Первая обобщенная краевая задача типа Римана для бианалических функций в круге // Изв. Смоленск. гос. ун-та. 2011. № 2. С. 119–129. [*Vasiliev Y. A., Rasulov K. M.* The Generalized Boundary Value Problem of Riemann Type for Bianalytic Functions in the Unit Disc // Izv. Smolensk. Gos. Un-ta. 2011. № 2. P. 119–129.]

4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с. [*Gahov F. D.* The Boundary Problems. Moscow : Nauka, 1977. 640 p.]

УДК 517.51

ТОЖДЕСТВА ТИПА ТИТЧМАРША ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ И ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

В работе доказывается теорема типа Титчмарша о преобразованиях Фурье обобщенных операторов Харди и Харди–Литтлвуда, зависящих от параметра $\alpha \in (1/2, 1]$.

Ключевые слова: оператор Харди, оператор Харди–Литтлвуда, теорема Титчмарша.

Identities of Titchmarsh Type for Generalized Hardy and Hardy–Littlewood Operators

S. S. Volosivets

A Titchmarsh-type theorem on Fourier transforms of Hardy and Hardy-Littlewood operators depending on parameter $\alpha \in (1/2, 1]$ is proved.

Key words: Hardy operator, Hardy–Littlewood operator, Titchmarsh theorem.

ВВЕДЕНИЕ

В теории функций хорошо известны операторы Харди:

$$\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^{\infty} f(t)/t\,dt, \qquad x > 0, \tag{1}$$

и Харди–Литтлвуда:

$$\mathcal{B}(f)(x) = x^{-1} \int_0^x f(t)\,dt, \qquad x > 0. \tag{2}$$

© Волосивец С. С., 2013

Первый из них ограничен в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, а второй — в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le \infty$ (см. [1, теоремы 327 и 328]). В [2, гл. 2, §6] даны критерии ограниченности этих операторов в симметричных пространствах. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $F_c(f)(t) = (L^2) - \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a f(x)\cos xt\,dx$. Тогда, как показал Е.Титчмарш [3, гл. 3, теорема 69], справедливы равенства

$$\mathcal{B}(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{H}(f))(t); \qquad \mathcal{H}(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{B}(f))(t). \tag{3}$$

п. в. на $\mathbb{R}_+$. Б. И. Голубов [4] доказал первое из равенств (0.3) для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le 2$, а второе — для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$. F. Moricz [5] уточнил доказательства из [4] и доказал аналоги (3) для обычного преобразования Фурье и функций, определенных на $\mathbb{R}$.

В нашей работе вводятся аналоги операторов (1) и (2):

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(x) = x^{\alpha-1}\int_x^\infty t^{-\alpha} f(t)\,dt, \qquad x > 0, \qquad \alpha \in (0,1], \tag{4}$$

$$\mathcal{B}_\alpha(f)(x) = x^{-\alpha}\int_0^x t^{\alpha-1} f(t)\,dt, \qquad x > 0, \qquad \alpha \in (0,1]. \tag{5}$$

Они являются сопряженными друг к другу, $\mathcal{H}_\alpha$ действует в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 \le p < 1/(1-\alpha)$ (для $\alpha = 1$ полагаем $1/(1-\alpha) = \infty$), а $\mathcal{B}_\alpha$ действует в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $p > 1/\alpha$ (см. лемму 2). Их можно определять для функций, заданных на $\mathbb{R}$, при $x < 0$ формулами

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(x) = |x|^{\alpha-1}\int_{-\infty}^x |t|^{-\alpha} f(t)\,dt, \qquad \mathcal{B}_\alpha(f)(x) = |x|^{-\alpha}\int_x^0 |t|^{\alpha-1} f(t)\,dt. \tag{6}$$

При таком определении из четности f следует четность $\mathcal{H}_\alpha(f)$ и $\mathcal{B}_\alpha(f)$, из нечетности f следует нечетность $\mathcal{H}_\alpha(f)$ и $\mathcal{B}_\alpha(f)$.

Целью данной работы является доказательство аналогов равенств (3) для операторов (4) и (5) в случае $1/2 < \alpha \le 1$. В теоремах 1 и 2, соответствующих равенствам из теоремы Титчмарша, рассматриваются функции, заданные на $\mathbb{R}_+$, что позволяет сделать доказательства короче. Затем формулируется аналогичная теорема 3 для функций, заданных на $\mathbb{R}$.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, состоящие из измеримых функций $f(x)$, таких что $|f(x)|^p$ интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}_+$, рассматриваются с обычной нормой $\|f\|_p = (\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx)^{1/p}$. Если $f \in L^p[0,a]$ для всех $a > 0$, то $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ ее косинус-преобразование Фурье задается формулой $F_c(f)(t) = \int_0^\infty f(x)\cos xt\,dx$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \le 2$, то $F_c(f)(t)$ определяется как предел $\int_0^a f(x)\cos xt\,dx$ в $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ при $a \to \infty$, где $1/p + 1/p' = 1$. При этом

$$\|F_c(f)\|_{p'} \le C(p)\|f\|_p. \tag{7}$$

По поводу корректности этого определения и неравенства (7) см. [3, гл. 4, теорема 74]. Аналогично вводится синус-преобразование Фурье $F_s(f)(t)$ и для него также верно неравенство (7).

Лемма 1. (см. [6, гл. 1, теорема (9.16)]). *Пусть $f(x) \ge 0$ на $\mathbb{R}_+$, $r > 1$, $s < r - 1$. Если $f^r(x)x^s \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и $\Phi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, то $\{x^{-1}\Phi(x)\}^r x^s \in L^1(\mathbb{R}_+)$ и*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \{x^{-1}\Phi(x)\}^r x^s\,dx \le C(r,s)\int_{\mathbb{R}_+} f^r(x)x^s\,dx. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть $0 < \alpha \le 1$. Тогда оператор $\mathcal{H}_\alpha(f)$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 \le p < 1/(1-\alpha)$, а оператор $\mathcal{B}_\alpha$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $p > 1/\alpha$. При $p > 1/\alpha$ и любых $b > 0$ верно неравенство*

$$\int_0^b |B_\alpha(f)(x)|^p\,dx \le C(p)\int_0^b |f(x)|^p\,dx. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = t^{\alpha-1}|f(t)|$. Тогда по неравенству Гельдера при $p > 1/\alpha$ получаем $\int_0^a \varphi(t)\,dt \le C_1\|f\|_p a^{\alpha-1/p} < \infty$. Это означает, что функция $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$ имеет смысл. Применим (8) для $s = (1-\alpha)p$ (неравенство $s < p - 1$ равносильно $\alpha > 1/p$):

$$\int_0^\infty \left| x^{-\alpha}\int_0^x \varphi(t)\,dt\right|^p dx \le \int_0^\infty x^s(x^{-1}\Phi(x))^p\,dx \le C_2\int_0^\infty x^s\varphi^p(x)dx = C_2\|f\|_p^p.$$

Заменим теперь $f(t)$ на $f_1(t) = f(t)X_{(0,b)}(t)$, где X_E — индикатор множества E. Тогда

$$\int_0^b |\mathcal{B}_\alpha(f)(x)|^p\,dx = \int_0^b |\mathcal{B}_\alpha(f_1)(x)|^p\,dx \le C_2\|f_1\|_p^p = C_2\int_0^b |f(x)|^p\,dx,$$

что дает (9). Наконец, если $\mathcal{B}_\alpha$ непрерывен в $L^p(\mathbb{R}_+)$, то сопряженный к нему оператор $\mathcal{H}_\alpha$ непрерывен в сопряженном пространстве $L^r(\mathbb{R}_+)$, где $1/p+1/r=1$, т. е. для всех $r\in[1,1/(1-\alpha))$. Лемма доказана.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $1/2<\alpha\le 1$, $f\in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1/\alpha<p\le 2$. Тогда $\mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Аналогичный результат справедлив для синус-преобразования Фурье.*

Доказательство. По определению $F_c(f)\in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, $1/p+1/p'=1$. Так как $\alpha>1/p\ge 1/p'$, по лемме 2 $\mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t)$ существует как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, определенная в каждой точке $t>0$. Пусть теперь $f_a = fX_{(0,a)}$, $a>0$. Имеем при всех $t>0$

$$\lim_{a\to\infty}\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) = \mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t). \tag{10}$$

В самом деле, по неравенству Гельдера при фиксированном $t>0$

$$|\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) - \mathcal{B}_\alpha(F_c(f))(t)| \le C_1 t^{-\alpha}\|F_c(f_a)-F_c(f)\|_{p'}t^{\alpha-1/p'},$$

и норма в последнем выражении стремится к нулю при $a\to+\infty$. Далее

$$\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) = t^{-\alpha}\int_0^t\int_0^a f(u)\cos xu\,du\,x^{\alpha-1}\,dx = t^{-\alpha}\int_0^a\int_0^t x^{\alpha-1}\cos xu\,dx\,f(u)\,du.$$

Сделаем замену $y=xu/t$, $t>0$, во внутреннем интеграле:

$$\mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) = \int_0^a\int_0^u y^{\alpha-1}\cos yt\,dy\,u^{-\alpha}f(u)\,du. \tag{11}$$

Так как $2<1/(1-\alpha)\le\infty$, то условие $p<1/(1-\alpha)$ выполнено и по лемме 2 $F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t)$ существует как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, определенная п. в. Имеем:

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t) = \int_0^a x^{\alpha-1}\int_x^a u^{-\alpha}f(u)\,du\cos xt\,dx = \int_0^a\int_0^u x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\,u^{-\alpha}f(u)du,$$

откуда

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t) = \mathcal{B}_\alpha(F_c(f_a))(t) \tag{12}$$

п. в. на $\mathbb{R}_+$. Здесь использован тот факт, что $\int_x^\infty f_a(t)\,dt=0$ при $x>a$, и теорема Фубини. Осталось показать, что

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t) = (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t). \tag{13}$$

По теореме Ф. Рисса существует $a_i\to\infty$ такая, что $F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t) = \lim\limits_{i\to\infty}F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_{a_i}))(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Тогда из (10), (12), (13) и последнего замечания получим утверждение теоремы 1 для косинус-преобразования Фурье. Для доказательства (13) сначала запишем

$$\int_0^a \mathcal{H}_\alpha(f)(x)\cos xt\,dx = \left(\int_0^a\int_x^a + \int_0^a\int_a^\infty\right)x^{\alpha-1}\cos xtu^{-\alpha}f(u)\,du\,dx =$$
$$= \int_0^a\left(\int_0^u x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\right)u^{-\alpha}f(u)\,du + \int_0^a x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\cdot\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)\,du. \tag{14}$$

По неравенству Гельдера $\left|\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)\,du\right| \le \left(\int_a^\infty |f(u)|^p\,du\right)^{1/p}\left(\int_a^\infty u^{-\alpha p'}\,du\right)^{1/p'}$. Первый сомножитель правой части есть $o(1)$ при $a\to\infty$, а второй — $O(a^{(1-\alpha p')/p'})$. В итоге согласно (7) (норма слева берется по t) находим, что

$$\left\|\int_0^a x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)du\right\|_{p'} = o(a^{1/p'-\alpha})\|x^{\alpha-1}X_{(0,a)}\|_p = o(1),\ a\to\infty. \tag{15}$$

Таким образом, в силу (14), (11), (12) и (15)

$$F_c(\mathcal{H}_\alpha(f))(t) = (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}\int_0^a \mathcal{H}_\alpha(f)(x)\cos xt\,dx =$$
$$= (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}\int_0^a\int_0^u x^{\alpha-1}\cos xt\,dx u^{-\alpha}f(u)\,du +$$
$$+(L^{p'}) - \lim_{a\to\infty}\int_0^a x^{\alpha-1}\cos xt\,dx\cdot\int_a^\infty u^{-\alpha}f(u)du = (L^{p'}) - \lim_{a\to\infty} F_c(\mathcal{H}_\alpha(f_a))(t).$$

Тем самым равенство (13) и утверждение теоремы 1 для косинус-преобразования Фурье доказаны. Утверждение теоремы 1 для синус-преобразования Фурье доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $1/2 < \alpha \le 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1/\alpha < p \le 2$. Тогда $\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = F_c(\mathcal{B}_\alpha(f))(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$. Аналогичный результат справедлив для синус-преобразований Фурье.*

Доказательство. По условию $F_c(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$ и неравенство $p' < 1/(1-\alpha)$ равносильно $p > 1/\alpha$, поэтому $\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t)$ определена как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$. Изучим ее подробно. Зафиксируем $b > t > 0$ и по теореме Фубини получим:

$$\int_t^b F_c(f_a)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_0^a\left(\int_t^b u^{-\alpha}\cos xu\,du\right)f(x)\,dx.$$

Согласно неравенству Гельдера аналогично доказательству (10) находим, что

$$\lim_{a\to\infty}\int_t^b F_c(f_a)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_t^b F_c(f)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\int_t^b u^{-\alpha}\cos xu\,du\,dx. \tag{16}$$

Пусть $h_{\alpha,t,b}(x) = \int_t^b u^{-\alpha}\cos xu\,du$. По второй теореме о среднем имеем ($z \in [t,b]$):

$$|h_{\alpha,t,b}(x)| \le t^{-\alpha}\left|\int_t^z \cos xu\,du\right| + b^{-\alpha}\left|\int_z^b \cos xu\,du\right| \le 4t^{-\alpha}x^{-1}, \qquad t, x > 0. \tag{17}$$

В то же время при $tx \le 1$, $bx \ge 1$, $\alpha < 1$, в силу (17) находим, что

$$|h_{\alpha,t,b}(x)| \le \int_t^{1/x} u^{-\alpha}\,du + \left|\int_{1/x}^b u^{-\alpha}\cos xu\,du\right| \le C_1(\alpha)x^{\alpha-1}. \tag{18}$$

При $\alpha = 1$ получается логарифмическая оценка. Мы не разбираем этот случай подробно, так как это сделано в [5]. Пусть $h_{\alpha,t,}(x) := \lim\limits_{b\to\infty} h_{\alpha,t,b}(x) = \int_t^{\to\infty} u^{-\alpha}\cos xu\,du$, где стрелка в верхнем индексе означает, что интеграл несобственный, как в смысле Лебега, так и Римана. Ясно, что в (17) и (18) (при $tx \le 1$) можно заменить $h_{\alpha,t,b}(x)$ на $h_{\alpha,t}(x)$. Докажем теперь, что

$$\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = t^{\alpha-1}\int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,t}(x)\,dx, \qquad t > 0. \tag{19}$$

Так как $u^{-q} \in L^1(t,\infty)$ при $t > 0$ и $q > 1$, то по неравенству Гельдера $F_c(f)(u)u^{-\alpha} \in L^1(t,\infty)$ при $\alpha > 1/p$. Отсюда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеет место равенство

$$\lim_{b\to\infty}\int_t^b F_c(f)(u)u^{-\alpha}\,du = \int_t^\infty F_c(f)(u)u^{-\alpha}\,du, \qquad t > 0. \tag{20}$$

С другой стороны, в силу оценок (17), (18) и неравенства Гельдера имеем:

$$\left|\int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,t}(x)dx - \int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,t,b}(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}_+} f(x)h_{\alpha,b}(x)dx\right| \le$$
$$\le \int_0^{1/b}|f(x)|C_1x^{\alpha-1}\,dx + \int_{1/b}^\infty 4b^{-\alpha}|f(x)|x^{-1}\,dx \le$$

$$\leq C_2 \left(\left(\int_0^{1/b} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} b^{1/p-\alpha} + b^{-\alpha} \left(\int_{1/b}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} (1/b)^{(1-p')/p'} \right) \leq C_3 b^{1/p-\alpha}. \qquad (21)$$

Поскольку $\alpha > 1/p$, левая часть (21) также стремится к нулю при $b \to \infty$. Благодаря (21) и неравенству (см. (17))

$$\left| \int_{\mathbb{R}_+} f(x) h_{\alpha,t,b}(x) dx - \int_0^a f(x) h_{\alpha,t,b}(x) dx \right| \leq 4t^{-\alpha} \left(\int_a^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_a^{\infty} x^{-p'} \, dx \right)^{1/p'}$$

правая часть (19) равна $t^{\alpha-1} \lim\limits_{b\to\infty} \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a f(x) \int_t^b u^{-\alpha} \cos xu \, du \, dx$. Однако в силу (20) и (16) левая часть (19) равна

$$t^{\alpha-1} \lim_{b\to\infty} \int_t^b F_c(f)(u) u^{-\alpha} \, du = t^{\alpha-1} \lim_{b\to\infty} \lim_{a\to\infty} \int_t^b \int_0^a f(x) u^{-\alpha} \cos xu \, du \, dx.$$

По теореме Фубини (19) доказано. С помощью замены переменной находим, что

$$h_{\alpha,t}(x) = \int_t^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos xu \, du = x^{\alpha-1} \int_{xt}^{\to\infty} v^{-\alpha} \cos v \, dv = (x/t)^{\alpha-1} \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du.$$

Подставляя в (19), получаем:

$$\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx. \qquad (22)$$

Теперь вернемся к $\mathcal{B}_\alpha$. По условию $\mathcal{B}_\alpha(f) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и $F_c(\mathcal{B}_\alpha(f))$ существует как функция из $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, причем $F_c(\mathcal{B}_\alpha(f)) = (L^{p'}) - \lim\limits_{a\to\infty} F_c((\mathcal{B}_\alpha(f))_a)$. Запишем

$$F_c((\mathcal{B}_\alpha(f))_a)(t) = \int_0^a u^{-\alpha} \int_0^u x^{\alpha-1} f(x) \, dx \cos ut \, du = \int_0^a \int_x^a u^{-\alpha} \cos ut \, du \, x^{\alpha-1} f(x) \, dx.$$

Используя (17) и неравенство Гельдера, получаем:

$$\left| \int_0^a x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx - \int_0^a x^{\alpha-1} f(x) \int_x^a u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx \right| \leq$$
$$\leq |h_{\alpha,a}(t)| \left(\int_0^a |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} C_4 a^{\alpha-1/p} \leq C_5 t^{-1} \|f\|_p a^{-1/p}, \qquad (23)$$

т. е. левая часть (23) стремится к нулю при $a \to \infty$ и фиксированном $t > 0$.

В то же время в силу (17) и неравенства Гельдера имеем:

$$\left| \int_0^a x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx - \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx \right| =$$
$$= \left| \int_a^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) \int_x^{\to\infty} u^{-\alpha} \cos ut \, du \, dx \right| =$$
$$= \left| \int_a^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) h_{\alpha,x}(t) \, dx \right| \leq C_6 t^{-1} \left(\int_a^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^{\infty} (x^{\alpha-1} x^{-\alpha})^{p'} \, dx \right)^{1/p'} \qquad (24)$$

и левая часть (24) есть $o(a^{-1/p})$. Из (22), (23) и (24) следует, что $\mathcal{H}_\alpha(F_c(f))(t) = \lim\limits_{a\to\infty} F_c((\mathcal{B}_\alpha(f))_a)(t)$ п. в. на $\mathbb{R}_+$, что завершает доказательство теоремы 2 в случае косинус-преобразования Фурье. Утверждение теоремы 2 для синус-преобразования Фурье доказывается аналогично.

Учитывая (6), из теорем 1 и 2 легко выводится

Теорема 3. *Пусть* $1/2 < \alpha \leq 1$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1/\alpha < p \leq 2$. *Тогда* $(\mathcal{H}_\alpha(f))\hat{}(t) = \mathcal{B}_\alpha(\hat{f})(t)$ *п. в. на* $\mathbb{R}$ *и* $(\mathcal{B}_\alpha(f))\hat{}(t) = \mathcal{H}_\alpha(\hat{f})(t)$ п. в. на $\mathbb{R}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00270).

Библиографический список

1. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М. : Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с. [*Hardy G., Littlewood J., Polya G.* Inequalities. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1934. 328 p.]
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М. : Наука, 1978. 400 с. [*Krein S. G., Petunin Jг. I., Semenov E. M.* Interpolation of linear operators. Providence : Amer. Math. Soc., 1982. 375 p.]
3. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.; Л. : Гостехиздат, 1948. 480 с. [*Titchmarsh E.* Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford : Clarendon Press, 1948. 404 p.]
4. *Голубов Б. И.* Об одной теореме Беллмана о коэффициентах Фурье // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 11. С. 31–40. [*Golubov B. I.* On a Bellman theorem on Fourier coefficients // Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics. 1995. Vol. 83, № 2. P. 321–330.]
5. *Moricz F.* The harmonic Cesaro and Copson operators on the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le 2$ // Studia Math. 2002. Vol. 149, № 3. P. 267–279.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с. [*Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. 1. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1959. 320 p.]

УДК 517.982.22, 517.982.252+256, 519.615, 519.853.3

МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА ДЛЯ СИЛЬНО ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

М. О. Голубев

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный
E-mail: maksimkane@mail.ru

В работе рассматривается стандартный метод проекции градиента в случае, когда множество является R-сильно выпуклым, а функция выпукла, дифференцируема и имеет липшицев градиент. Доказано, что при некоторых естественных дополнительных условиях метод сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Ключевые слова: гильбертово пространство, метод проекции градиента, метрическая проекция, R-сильно выпуклое множество.

Gradient Projection Algorithm for Strongly Convex Set

M. O. Golubev

In our work we will discuss standard gradient projection algorithm, where a set is strongly convex of radius R and a function is convex, differentiable and its gradient satisfies Lipschitz condition. We proved that under some natural additional conditions algorithm converges with the rate of a geometric progression.

Key words: Hilbert space, gradient projection algorithm, metric projection, strongly convex set of radius R.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{H}$ — гильбертово пространство над вещественным полем скаляров, (p, x) — скалярное произведение векторов $p, x \in \mathbb{H}$. Обозначим через $B_R(x) = \{y \in \mathbb{H} : \|y - x\| \le R\}$ замкнутый шар радиуса $R \ge 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{H}$. Расстояние от точки $x \in \mathbb{H}$ до множества $A \subset \mathbb{H}$ будем обозначать $\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$. Метрической проекцией точки $x \in \mathbb{H}$ на множество $A \subset \mathbb{H}$ называется множество $P_A(x) = \{a \in A : \|x - a\| = \varrho(x, A)\}$. Опорная функция ко множеству A определяется следующей формулой: $s(p, A) = \sup\limits_{x \in A}(p, x)$ для всех $p \in \mathbb{H}$. Нормальным конусом к выпуклому замкнутому множеству A в точке $a \in A$ называется множество $N(A; a) = \{p \in \mathbb{H} : (p, a) \ge s(p, A)\}$. Диаметром множества A называется число $\operatorname{diam} A = \sup\limits_{x, y \in A} \|x - y\|$. Границу множества A обозначим через ∂A.

Определение 1 [1, определение 3.1.1; 2, 3]. Непустое множество $A \subset \mathbb{H}$ называется *R-сильно выпуклым*, если оно может быть представлено в виде пересечения замкнутых шаров радиуса $R > 0$, т. е. $A = \bigcap\limits_{x \in X} B_R(x)$ для некоторого подмножества $X \subset \mathbb{H}$.

Рассмотрим задачу минимизации:

$$f(x) \to \min, \qquad x \in A \subset \mathbb{H}. \tag{1}$$

В данной работе мы обсудим стандартный метод проекции градиента:

$$x_{k+1} = P_A(x_k - \alpha_k f'(x_k)), \qquad x_1 \in \partial A, \qquad \alpha_k > 0. \tag{2}$$

Метод проекции градиента детально изложен в работах [4–7]. Известные случаи сходимости метода проекции градиента со скоростью геометрической прогрессии имеют место для замкнутого и выпуклого множества A и сильно выпуклой с константой $\theta > 0$ функции f, градиент f' которой удовлетворяет

© Голубев М. О., 2013