$$+\frac{2}{\delta}\int\limits_{0}^{2\pi}\left|\int\limits_{\delta/2}^{\delta}\frac{1}{t^2}\int\limits_{0}^{t}[f(x+\tau)-f(x)]d\tau\,dt\right||g(x)|\,dx\Bigg)\le$$

$$\le\liminf_{\delta\to 0^+}\frac{2}{\delta}(\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)}+\frac{1}{2}\Omega(f,\frac{\delta}{2})_{p(\cdot)}+(1+r_p([0,2\pi])\Omega(f,\delta)_{p(\cdot)})\le CM.$$

Здесь $r_p([0,2\pi])=\frac{1}{\underline{p}}+\frac{1}{\bar{p}}<2$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $p(x)\in\hat{\mathcal{P}}$ *и* $f\in\mathrm{Lip}_{p(\cdot)}(1,M)$. *Тогда для* $n=1,2,\ldots$ *верна оценка*

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f)\|_{p(\cdot)}\le CMn^{-1},$$

где $\sigma_n(f)(x)=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{m=0}^{n}S_m(f)(x)$.

Доказательство. Следует из предыдущей леммы, равномерной ограниченности частичных сумм $S_n(f)(x)$ и того факта, что для произвольной $f\in L_{2\pi}^{p(x)}$ и ее сопряженной функции $\tilde{f}(x)$ имеет место неравенство $\|\tilde{f}\|_{p(\cdot)}\le c(p)\|f\|_{p(\cdot)}$, где $c(p)$ — некоторая константа, зависящая только от переменного показателя p.

Теоремы 1–3 доказываются аналогично теоремам 1–3 в [2] с помощью приведенных выше лемм.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00191-а)

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближения функций тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2011. Т. 5. С. 108–118. [*Sharapudinov I. I.* Some problems in approximation theory by trigonometric polynomials in $L_{2\pi}^{p(x)}$ // Math. Forum (Itogi nauki. The South of Russia). 2011. Vol. 5. P. 108–118.]
2. *Guven A., Israfilov D. M.* Trigonometric approximation in Generalized Lebesgue spaces Lp(x) // J. of Math. Inequalities. 2010. Vol. 4, № 2. P. 285–299.
3. *Chandra P.* Approximation by Nörlund operators// Mat. Vestnik. 1986. Vol. 38. P. 263–269.
4. *Chandra P.* A note on degree of approximation by Nörlund and Riesz operators// Mat. Vestnik. 1990. Vol. 42. P. 9–10.
5. *Diening L.* Maximal function on generalized Lebesgue spaces Lp(·)// Math. Inequal. Appl. 2004. Vol. 7. P. 245–253.
6. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$// Czechoslovak Math. J. 1991. Vol. 41, № 4. P. 592–618.
7. *DeVore R. A., Lorentz G. G.* Constructive Approximation. Vol. 303 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Berlin : Springer-Verlag, 1993.

УДК 517.984

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ С РАЗНЫМИ ПОРЯДКАМИ НА РАЗНЫХ РЕБРАХ

В. А. Юрко

Саратовский государственный университет
E-mail: YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дифференциальных операторов переменных порядков на компактных звездообразных графах. Приведена теорема единственности восстановления потенциалов по матрицам Вейля. Получено конструктивное решение обратной задачи.

Ключевые слова: звездообразные графы, дифференциальные операторы переменных порядков, обратные спектральные задачи.

Recovering Differential Operators on Star-Type Graphs with Different Orders on Different Edges

V. A. Yurko

An inverse spectral problem is studied for variable orders differential operators on compact star-type graphs. A uniqueness theorem of recovering potentials from the Weyl matrices is provided. A constructive solution of the inverse problem is obtained.

Key words: star-type graphs, variable orders differential operators, inverse spectral problems.

1. В статье исследуются обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов переменных порядков на компактных звездообразных графах. Точнее, дифференциальные уравнения имеют различные порядки на различных ребрах. Такие задачи часто встречаются в естествознании и технике (см. [1, 2]). В качестве основной спектральной характеристики мы вводим и изучаем так называемые матрицы Вейля, которые являются обобщением функции Вейля для классического оператора Штурма–Лиувилля и обобщением матрицы Вейля для дифференциальных операторов высших порядков на интервале, введенной в [3, 4]). Показано, что задание матриц Вейля однозначно определяет коэффициенты дифференциального уравнения на графе. Получена также конструктивная процедура решения обратной задачи по заданным матрицам Вейля. Для исследования этой обратной задачи мы развиваем идеи метода спектральных отображений [3, 4]. Полученные результаты являются естественными обобщениями известных результатов для дифференциальных операторов на интервале и на графах.

Рассмотрим компактный звездообразный граф T в $\mathbf{R}^\omega$ с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_p\}$, где $v_1, \dots, v_p$ — граничные вершины, v_0 — внутренняя вершина и $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1,p}$, $\bigcap\limits_{j=1}^{p} e_j = \{v_0\}$. Пусть l_j — длина ребра e_j. Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что $x_j = 0$ соответствуют граничным вершинам $v_1, \dots, v_p$. Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,p}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j. Зафиксируем n, N и m так, что $1 < N < n$ и $0 < m < p$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T:

$$\left.\begin{aligned} y_j^{(n)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{n-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad j = \overline{1,m}, \\ y_j^{(N)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{N-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \qquad j = \overline{m+1,p}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $q_{\mu j}(x_j)$ — комплекснозначные интегрируемые функции. Будем называть $q_j = \{q_{\mu j}\}$ потенциалом на ребре e_j, а $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,p}}$ — потенциалом на графе T. Рассмотрим линейные формы:

$$U_{j\nu}(y_j) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu} y_j^{(\mu)}(l_j), \quad j = \overline{1,p},$$

где $\gamma_{j\nu\mu}$ — комплексные числа, $\gamma_{j\nu} := \gamma_{j\nu\nu} \neq 0$, $\nu = \overline{0, n-1}$ при $j = \overline{1,m}$, и $\nu = \overline{0, N-1}$ при $j = \overline{m+1,p}$.

2. Зафиксируем $j = \overline{1,p}$. Пусть $\{C_{kj}(x_j, \lambda)\}$ ($k = \overline{1,n}$ при $j = \overline{1,m}$ и $k = \overline{1,N}$ при $j = \overline{m+1,p}$) — фундаментальная система решений уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях $C_{kj}^{(\mu-1)}(0, \lambda) = \delta_{k\mu}$, ($k, \mu = \overline{1,n}$ при $j = \overline{1,m}$ и $k, \mu = \overline{1,N}$ при $j = \overline{m+1,p}$). Здесь и далее $\delta_{k\mu}$ — символ Кронекера.

Зафиксируем $s = \overline{1,p}$ и k так, что $1 \le k \le n-1$ при $s = \overline{1,m}$ и $1 \le k \le N-1$ при $s = \overline{m+1,p}$. Пусть $\Psi_{sk} = \{\psi_{skj}\}_{j=\overline{1,p}}$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие следующим условиям.

Случай 1. Если $s = \overline{1,m}$, $k = \overline{1, N-1}$, то Ψ_{sk} удовлетворяет краевым условиям (2) и условиям склейки (3):

$$\left.\begin{gathered} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \qquad \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0) = 0, \qquad \xi = \overline{1, n-k}, \qquad j = \overline{1,m} \setminus s, \\ \psi_{skj}^{(\eta-1)}(0) = 0, \qquad \eta = \overline{1, N-k}, \qquad j = \overline{m+1,p}, \end{gathered}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{gathered} U_{j\nu}(\psi_{skj}) - U_{p\nu}(\psi_{skp}) = 0, \quad j = \overline{1, p-1}, \qquad \nu = \overline{0, k-1}, \\ \sum_{j=1}^{p} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \qquad \nu = \overline{k, N-1}, \quad \sum_{j=1}^{m} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \qquad \nu = \overline{N, n-1}. \end{gathered}\right\} \tag{3}$$

Случай 2. Если $s=\overline{1,m}$, $k=\overline{N,n-1}$, то Ψ_{sk} удовлетворяет краевым условиям (4) и условиям склейки (5):

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0)=\delta_{k\nu}, \qquad \nu=\overline{1,k}, \qquad \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0)=0, \qquad \xi=\overline{1,n-k}, \qquad j=\overline{1,m}\setminus s, \\ \psi_{skj}(0)=0, \quad j=\overline{m+1,p}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{c} U_{j\nu}(\psi_{skj})-U_{p\nu}(\psi_{skp})=0, \quad j=\overline{1,p-1}, \qquad \nu=\overline{0,N-2}, \\ U_{j\nu}(\psi_{skj})-U_{m\nu}(\psi_{skm})=0, \quad j=\overline{1,m-1}, \qquad \nu=\overline{N-1,k-1}, \\ \sum_{j=1}^{m} U_{j\nu}(\psi_{skj})=0, \qquad \nu=\overline{k,n-1}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Случай 3. Если $s=\overline{m+1,p}$, $k=\overline{1,N-1}$, то Ψ_{sk} удовлетворяет краевым условиям (6) и условиям склейки (7):

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{sks}^{(\nu-1)}(0)=\delta_{k\nu}, \qquad \nu=\overline{1,k}, \qquad \psi_{skj}^{(\xi-1)}(0)=0, \qquad \xi=\overline{1,n-k}, \qquad j=\overline{1,m}, \\ \psi_{skj}^{(\eta-1)}(0)=0, \quad \eta=\overline{1,N-k}, \qquad j=\overline{m+1,p}\setminus s, \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{c} U_{j\nu}(\psi_{skj})-U_{p\nu}(\psi_{skp})=0, \quad j=\overline{1,p-1}, \qquad \nu=\overline{0,k-1}, \\ \sum_{j=1}^{p} U_{j\nu}(\psi_{skj})=0, \qquad \nu=\overline{k,N-1}. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Условия склейки для Ψ_{sk} являются обобщением условий склейки Киркгофа [3]. Будем предполагать, что выполняются условия регулярности склейки (см. [5]). Введем матрицы $M_s(\lambda)$, $s=\overline{1,p}$, следующим образом.

При $s=\overline{1,m}$ положим $M_s(\lambda)=[M_{sk\mu}(\lambda)]_{k,\mu=\overline{1,n}}$, $M_{sk\mu}(\lambda):=\psi_{sks}^{(\mu-1)}(0,\lambda)$.

При $s=\overline{m+1,p}$ положим $M_s(\lambda)=[M_{sk\mu}(\lambda)]_{k,\mu=\overline{1,N}}$, $M_{sk\mu}(\lambda):=\psi_{sks}^{(\mu-1)}(0,\lambda)$.

Из определения Ψ_{sk} следует, что $M_{sk\mu}(\lambda)=\delta_{k\mu}$ при $k\ge\mu$, и $\det M_s(\lambda)\equiv 1$. Матрица $M_s(\lambda)$ называется матрицей Вейля относительно граничной вершины v_s. Обратные задачи ставятся следующим образом.

Обратная задача 1. Даны $\{M_s(\lambda)\}_{s=\overline{1,p-1}}$, построить q на T.

Обратная задача 2. Даны $\{M_s(\lambda)\}_{s=\overline{2,p}}$, построить q на T.

3. Используя фундаментальную систему решений $\{C_{kj}(x_j,\lambda)\}$, можно записать:

$$\left.\begin{array}{c} \psi_{skj}(x_j,\lambda)=\sum_{\mu=1}^{n} M_{skj\mu}(\lambda)C_{\mu j}(x_j,\lambda), \qquad j=\overline{1,p}, \qquad s=\overline{1,m}, \qquad k=\overline{1,n-1}, \\ \psi_{skj}(x_j,\lambda)=\sum_{\mu=1}^{N} M_{skj\mu}(\lambda)C_{\mu j}(x_j,\lambda), \qquad j=\overline{1,p}, \qquad s=\overline{m+1,p}, \qquad k=\overline{1,N-1}, \end{array}\right\} \tag{8}$$

где коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x_j. В частности, $M_{sks\mu}(\lambda)=M_{sk\mu}(\lambda)$. Подставляя (8) в краевые условия и условия склейки для решений Вейля Ψ_{sk}, получаем линейную алгебраическую систему относительно $M_{skj\mu}(\lambda)$. Решая эту систему по формулам Крамера, вычисляем $M_{skj\mu}(\lambda)=\Delta_{skj\mu}(\lambda)(\Delta_{sk}(\lambda))^{-1}$, где функции $\Delta_{skj\mu}(\lambda)$ и $\Delta_{sk}(\lambda)$ являются целыми по λ. Таким образом, функции $M_{skj\mu}(\lambda)$ являются мероморфными по λ и, следовательно, решения Вейля и матрицы Вейля мероморфны по λ. В частности,

$$M_{sk\mu}(\lambda)=\Delta_{sk\mu}(\lambda)(\Delta_{sk}(\lambda))^{-1}, \quad k<\mu,$$

где $\Delta_{sk\mu}(\lambda):=\Delta_{sks\mu}(\lambda)$. Функция $\Delta_{sk\mu}(\lambda)$, $k\le\mu$ ($\Delta_{skk}(\lambda):=\Delta_{sk}(\lambda)$) является характеристической функцией для краевой задачи $L_{sk\mu}$ и ее нули совпадают с собственными значениями $L_{sk\mu}$.

Рассмотрим теперь вспомогательные обратные задачи восстановления дифференциального оператора на каждом фиксированном ребре. Зафиксируем $s=\overline{1,p}$, и рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_s.

Обратная задача 3. Дана матрица Вейля M_s, построить q_s на ребре e_s.

В этой обратной задаче мы строим потенциал только на ребре e_s, но матрица Вейля M_s несет глобальную информацию со всего графа. Другими словами, эта задача не является локальной обратной задачей, относящейся только к ребру e_s.

Теорема 1. *Зафиксируем $s = \overline{1,p}$. Задание матрицы Вейля M_s однозначно определяет потенциал q_s на ребре e_s.*

Используя метод спектральных отображений, можно получить конструктивную процедуру решения обратной задачи 3. Она может быть получена так же, как и для дифференциальных операторов n-го порядка на конечном интервале (подробнее см. [4, Ch. 2]).

Введем теперь вспомогательную матрицу Вейля относительно внутренней вершины v_0 и фиксированного ребра e_j, $j = \overline{1,p}$.

Случай 1. Зафиксируем $j = \overline{1,m}$. Пусть $\varphi_{jk}(x_j,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при условиях

$$\varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \quad \varphi_{jk}^{(\xi-1)}(0,\lambda) = 0, \qquad \xi = \overline{1,n-k}.$$

Введем матрицу $m_j(\lambda) = [m_{jk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$, где $m_{jk\nu}(\lambda) := \varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)$.

Случай 2. Зафиксируем $j = \overline{m+1,p}$. Пусть $\varphi_{jk}(x_j,\lambda)$, $k = \overline{1,N}$ — решения уравнения (1) на ребре e_j при условиях

$$\varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda) = \delta_{k\nu}, \qquad \nu = \overline{1,k}, \quad \varphi_{jk}^{(\xi-1)}(0,\lambda) = 0, \qquad \xi = \overline{1,N-k}.$$

Введем матрицу $m_j(\lambda) = [m_{jk\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,N}}$, где $m_{jk\nu}(\lambda) := \varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)$.

Матрица $m_j(\lambda)$ называется матрицей Вейля относительно внутренней вершины v_0 и ребра e_j. Рассмотрим следующую обратную задачу на ребре e_j.

Обратная задача 4. Зафиксируем $j = \overline{1,p}$. Дана матрица Вейля m_j, Построить потенциал q_j на ребре e_j.

Данная обратная задача является классической, так как это задача восстановления дифференциального уравнения высшего порядка на конечном интервале по матрице Вейля. Обратная задача 4 решена в [4]. В частности, следующая теорема единственности доказана в [4].

Теорема 2. *Задание матрицы Вейля m_j однозначно определяет потенциал на ребре e_j.*

Кроме того, в [4] дан алгоритм решения обратной задачи 4, а также приведены необходимые и достаточные условия разрешимости этой обратной задачи.

Теорема 3. *1. Зафиксируем $j = \overline{1,m}$. Тогда для каждого фиксированного $s = \overline{1,m} \setminus j$,*

$$m_{j1\nu}(\lambda) = \frac{\psi_{s1j}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)}{\psi_{s1j}(l_j,\lambda)}, \quad \nu = \overline{2,n}, \tag{9}$$

$$m_{jk\nu}(\lambda) = \frac{\det[\psi_{s\mu j}(l_j,\lambda),\dots,\psi_{s\mu j}^{(k-2)}(l_j,\lambda),\psi_{s\mu j}^{(\nu-1)}(l_j,\lambda)]_{\mu=\overline{1,k}}}{\det[\psi_{s\mu j}^{(\xi-1)}(l_j,\lambda)]_{\xi,\mu=\overline{1,k}}}, \qquad 2 \le k < \nu \le n. \tag{10}$$

2. Зафиксируем $j = \overline{m+1,p}$. Тогда для каждого фиксированного $s = \overline{1,m} \setminus j$ соотношения (9)–(10) *верны с N вместо n.*

4. Теперь мы получаем решение обратной задачи 1 и устанавливаем его единственность, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Задание матриц Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{1,p-1}}$ однозначно определяет потенциал q на T. Решение обратной задачи* 1 *может быть получено по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. *Даны матрицы Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{1,p-1}}$.*

1. Находим потенциалы q_s, $s = \overline{1,p-1}$, решая обратную задачу 3 *при каждом $s = \overline{1,p-1}$.*

2. Вычисляем матрицу Вейля $m_p(\lambda)$ по (9)–(10) *при $j = p$, используя знание потенциала на ребрах $e_1,\dots,e_{p-1}$ (подробнее см.* [5]*).*

3. Строим потенциал q_p на ребре e_p, решая обратную задачу 4.

Аналогично решается обратная задача 2; здесь вычисления немного более сложные. Пусть $m > 1$.

Теорема 5. *Задание матриц Вейля $\{M_s\}_{s=\overline{2,p}}$ однозначно определяет потенциал q на T. Решение обратной задачи 2 может быть получено по следующему алгоритму.*

Алгоритм 2. *Даны матрицы Вейля* $\{M_s\}_{s=\overline{2,p}}$.

1. Находим потенциалы q_s, $s = \overline{2,p}$, *решая обратную задачу* 3 *при каждом* $s = \overline{2,p}$.

2. Строим матрицу Вейля $m_1(\lambda)$ *по* (9)–(10) *при* $j = 1$ (*подробнее см.* [5]).

3. Находим потенциал q_1 *на ребре* e_1, *решая обратную задачу* 4.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Национального научного совета Тайваня (*проекты* 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

Библиографический список

1. *Покорный Ю. В., Белоглазова Т. В., Дикарева Е. В., Перловская Т. В.* Функция Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений различных порядков // Мат. заметки. 2003. Т. 74, вып. 1. С. 146–149. [*Pokorny Yu. V., Beloglazova T. V., Dikareva E. V., Perlovskaya T. V.* Green's function for a locally interacting system of ordinary equations of various orders // Math. Notes. 2003. Vol. 74, № 1. P. 146–149.]

2. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004. [*Pokorny Yu. V., Penkin O. M., Pryadiev V. L., Borovskikh A. V., Lazarev K. P., Shabrov S. A.* Differential equations on geometrical graphs. Moscow : Fizmatlit, 2004.]

3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. [*Yurko V. A.* Introduction to the theory of inverse spectral problems. Moscow : Fizmatlit, 2007.]

4. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.

5. *Yurko V. A.* Spectral analysis for differential operators on star-type graphs with different orders on different edges. Schriftenreiche des Fachbereichs Mathematik, SM–DU–747. Duisburg : Universität Duisburg-Essen, 2012. 10 p.