References

1. Lopatin A. S. Simulated Annealing. *Stokhasticheskaia optimizatsiia v informatike : mezhvuz. sb.* [Stochastic Optimization in Informatics]. St. Petersburg, 2005, iss. 1, pp. 133–149 (in Russian).
2. Savin A. N, Timofeeva N. E. Using Optimization Algorithm Based on Simulated Annealing on Parallel and Distributed Computing Systems. *Izv. Sarat. Univ., N.S., Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 110–116 (in Russian).
3. Kirkpatrick S. A., Gelatt C. D., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing. *Science, N.S.*, 1983, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680.

УДК 519.711, 519.712, 517.51

ОБ ОШИБКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕРЕВЬЯМИ СЦЕНАРИЕВ ЕДИНИЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Е. А. Захарова[1], С. П. Сидоров[2]

[1]Аспирант кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, zakharova_e@yahoo.com

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, sidorovsp@info.sgu.ru

Обозначим через Λ_n множество всех деревьев сценариев глубины 1 с числом сценариев n на $[0,1]$. Пусть $X = (0 \le \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$ и обозначим $\Lambda_n(X)$ множество всех деревьев сценариев глубиной 1 с n сценариями $X = (0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$. Пусть G есть вероятностное распределение, определенное на $[0,1]$, и H – некоторый класс измеримых на $[0,1]$ функций. Положим $d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G}\in\Lambda_n(X)} d_H(G,\tilde{G})$ и $d_H(G) = \inf_{\tilde{G}\in\Lambda_n} d_H(G,\tilde{G})$, где $d_H(G,\tilde{G}) := \sup_{h\in H}\left|\int h\,dG - \int h\,d\tilde{G}\right|$. Цель работы состоит в нахождении величин $d_H(G,X)$ и $d_H(G)$ для случая, когда множество H есть подмножество всех алгебраических многочленов степени не выше n. Таким образом, мы рассматриваем задачу приближения меры G деревом сценариев в смысле равенства первых n моментов.

Ключевые слова: деревья сценариев, метод моментов.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах портфельного инвестирования и управления риском используются методы стохастического программирования, при этом для генерации многомерных случайных величин, соответствующих реальным процессам (поведение на рынке ценных бумаг, управление коммунальными услугами, цены на топливо или электричество, доставка товаров и т.д.), используется определенный набор сценариев и соответствующих им вероятностей [1, 2]. В большинстве случаев количество таких сценариев слишком велико и их необходимо аппроксимировать некоторым набором с меньшим количеством сценариев, при этом возникает определенная погрешность. При использовании деревьев сценариев задается начальное количество сценариев и соответствующих им вероятностей выполнения этих сценариев. Данная проблема получила наибольшее развитие в начале 2000 годов [3]. Вслед за финансовым кризисом 1998 года появилась необходимость точнее просчитывать риски, в том числе и для сценариев с малой вероятностью, но увеличение количества допустимых сценариев влечет за собой усложнение моделей и трудности в ее компьютерном моделировании. Использование же деревьев сценариев дает возможность упростить модель.

В работе [4] особая важность придается алгоритмам генерации случайных чисел, рассматриваются случаи генерации достаточного количества случайных чисел, соответствующим параметрическим и непараметрическим стохастическим моделям. В статье [5] описывается метод, основанный на использовании нелинейного программирования. Главной идеей этого метода является сокращение разницы между статистическими свойствами случайных величин, что дает больший контроль над распределением.

В настоящей работе оценивается ошибка приближения произвольного непрерывного распределения деревьями сценариев единичной глубины, имеющих равные моменты фиксированных порядков.

Пусть G и $\tilde{G}$ есть два вероятностных распределения, определенных на $[0,1]$. Пусть H — некоторый класс измеримых на $[0,1]$ функций.

Определим $d_H(G,\tilde{G})$ следующим образом:

$$d_H(G,\tilde{G}) = \sup_{h\in H}\left|\int h\,dG - \int h\,d\tilde{G}\right|. \tag{1}$$

Обозначим через Λ_n множество всех деревьев сценариев глубины 1 с числом сценариев n на [0,1], т. е. дискретных вероятностных распределений, вероятностная масса которых сосредоточена не более чем в n точках отрезка $[0,1]$.

Пусть $X = (0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$ есть некоторая система из n точек, принадлежащих отрезку [0,1]. $\Lambda_n(X)$ есть множество таких деревьев сценариев глубиной 1 с n сценариями $X = (0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$, т. е. дискретных вероятностных распределений, вероятностная масса которых сосредоточена в системе точек X.

Цель работы состоит в нахождении величин

$$d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} d_H(G, \tilde{G}), \tag{2}$$

$$d_H(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n} d_H(G, \tilde{G}). \tag{3}$$

Величина $d_{H,X}(G)$ ($d_H(G)$) есть неустранимая ошибка приближения вероятностного распределения из класса $\Lambda_n(X)$ (соответственно Λ_n) в смысле расстояния (1).

В данной работе рассматривается случай, когда множество H есть множество $\mathscr{P}_n$ всех алгебраических многочленов степени не выше n со старшим коэффициентом, равным 1.

Таким образом, мы рассматриваем задачи (2) и (3) как задачи приближения меры G деревом сценариев единичной глубины с n сценариями из [0,1] в смысле равенства первых n моментов.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $X = (0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$ есть некоторая система из n точек, принадлежащих отрезку [0,1].

Теорема. 1. Пусть дано вероятностное распределение G на [0,1] и пусть $X = (0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$, тогда

$$d_{\mathscr{P}_n,X}(G) = \left| \int_0^1 \prod (t - x_i)\, dG(t) \right|. \tag{4}$$

2. Каково бы ни было вероятностное распределение G, справедливо равенство

$$d_{\mathscr{P}_n}(G) = 0.$$

Доказательство. Для произвольного вероятностного распределения G, определенного на $[0,1]$, и некоторого класса H измеримых на $[0,1]$ функций имеем:

$$d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} d_H(G, \tilde{G}) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} \sup_{f \in H} \left| \int f dG - \int f\, d\tilde{G} \right|.$$

Из [6, с. 42] следует, что

$$\inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} \sup_{f \in H} \left| \int f dG - \int f\, d\tilde{G} \right| = \sup_{f \in H, If = 0} \left| \int f\, dG \right|,$$

где $If := (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ для $f \in C[0,1]$.

В свою очередь, для $H = \mathscr{P}_n$ имеем

$$\sup_{f \in H, If = 0} \left| \int f dG \right| = \left| \int_0^1 \prod_{i=1}^{n} (t - x_i)\ dG(t) \right|,$$

и (4) установлено.

Согласно (4)

$$d_{\mathscr{P}_n,X}(G) = \left| \int_0^1 \prod_{i=1}^{n} (t - x_i)\, dG(t) \right|,$$

тогда

$$d_{\mathscr{P}_n}(G) = \inf_X \left| \int_0^1 \prod_{i=1}^{n} (t - x_i)\, dG(t) \right|.$$

Необходимо показать, что для всех вероятностных распределений найдется такая система точек X_0, что $d_{\mathscr{P}_n,X_0}(G) = 0$.

Рассмотрим случай $n = 1$. Нам известно, что $\int_0^1 dG(t) = 1$, тогда нам необходимо найти такое значение x_1, что

$$-\int_0^{x_1} (t - x_1)\, dG(t) = \int_{x_1}^1 (t - x_1)\, dG(t).$$

Имеем:
$$\int_0^1 (t-x_1)\,dG(t) = \int_0^{x_1} (t-x_1)\,dG(t) + \int_{x_1}^1 (t-x_1)\,dG(t) = 0.$$
Тогда
$$-\int_0^{x_1} t\,dG(t) - \int_{x_1}^1 t\,dG(t) + x_1\int_0^{x_1} dG(t) + x_1\int_{x_1}^1 dG(t) = 0.$$
Значит,
$$\int_0^{x_1} t\,dG(t) + \int_{x_1}^1 t\,dG(t) = x_1\int_0^1 dG(t)$$
и
$$\int_0^{x_1} t\,dG(t) + \int_{x_1}^1 t\,dG(t) = x_1,$$
откуда
$$\int_0^1 t\,dG(t) = x_1.$$
А значит, мы нашли такое значение x_1, что $d_{\mathscr{P}_n}(G) = 0$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Нам необходимо доказать, что найдется такое значение x_1, что
$$\int_0^1 (t-x_1)(t-x_2)\,dG(t) = 0.$$
Фиксируем значение x_2, тогда
$$\int_0^{x_1} (t-x_1)(t-x_2)\,dG(t) + \int_{x_1}^1 (t-x_1)(t-x_2)\,dG(t) = 0,$$
или
$$\int_0^{x_1} t(t-x_2)\,dG(t) - \int_0^{x_1} x_1(t-x_2)\,dG(t) + \int_{x_1}^1 t(t-x_2)\,dG(t) - \int_{x_1}^1 x_1(t-x_2)\,dG(t) = 0.$$
Откуда получаем:
$$\int_0^1 t(t-x_2)\,dG(t) = x_1\int_0^1 (t-x_2)\,dG(t).$$
Так как значение x_2 мы выбираем самостоятельно, то мы всегда можем подобрать его так, что $\int_0^1 (t-x_2)\,dG(t) \neq 0$, а значит,
$$x_1 = \frac{\int_0^1 t(t-x_2)\,dG(t)}{\int_0^1 (t-x_2)\,dG(t)}.$$
Таким образом, мы нашли такое значение x_1, что $d_{\mathscr{P}_n}(G) = 0$.

Покажем теперь, что утверждение верно для общего случая, т. е. найдется такое значение x_1, что
$$\int_0^1 \prod_{i=1}^n (t-x_i)\,dG(t) = 0.$$
Зафиксируем все точки x_i, кроме одной x_1, тогда
$$\int_0^1 (t-x_1)\prod_{i=2}^n (t-x_i)\,dG(t) = 0.$$
Отсюда
$$\int_0^1 t\prod_{i=2}^n (t-x_i)\,dG(t) = x_1\int_0^1 t\prod_{i=2}^n (t-x_i)\,dG(t).$$
А значит,
$$x_1 = \frac{\int_0^1 t\prod_{i=2}^n (t-x_i)\,dG(t)}{\int_0^1 t\prod_{i=2}^n (t-x_i)\,dG(t)},$$
так как мы самостоятельно фиксируем значения x_i и можем выбрать те значения, при которых $\int_0^1 t\prod_{i=2}^n (t-x_i)\,dG(t) \neq 0$. Таким образом, мы нашли такое значение x_1, при котором $\int_0^1 \prod_{i=1}^n (t-x_i)\,dG(t) \neq 0$.

Теорема доказана.

Отметим, что аналогичные результаты имеют место и для случая, когда мера G задана на всей числовой прямой.

3. ПРИМЕРЫ

1. Рассмотрим случай равномерного распределения на [0,1], т. е. $G(t) = t$. Тогда

$$d_{\mathscr{P}_n}(G) = \inf_X \left| \int_0^1 \prod_{i=0}^n (t - x_i)\ dG(t) \right| = \inf_X \left| \int_0^1 \prod_{i=0}^n (t - x_i)\, dt \right|.$$

Обозначим $\int_0^1 \prod_{i=0}^n (t - x_i)\, dt = A$, тогда

$$d_{\mathscr{P}_n}(t) = \inf_X |A|.$$

Рассмотрим уравнение $A = 0$ при $i = 2$:

$$\int_0^1 (t - x_1)(t - x_2)\, dt = 0.$$

Значит, $\frac{2}{3} - x_1 - x_2 + 2x_1x_2 = 0$. Пусть $x_1 = 1 - x_2$, тогда $2x_2^2 - 2x_2 + \frac{1}{3} = 0$, $D = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$, $x_1 = 1 - \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{2}$.

2. Рассмотрим случай нормального распределения $N(0,1)$ с функцией плотности $p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp(-t^2/2)$. Тогда дерево сценариев глубины 1 с четырьмя сценариями x_1, x_2, x_3, x_4, имеющее равные с данным распределением моменты 1, 2, 3 и 4 порядков, удовлетворяет уравнению

$$\int_{\mathbb{R}} (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3)(t - x_4) \exp(-t^2/2)\, dt = 0.$$

Считая $-x_1 = x_4 > 0$ и фиксируя $-1 < x_2 < 0 < x_3 < 1$, получим:

$$\int_{\mathbb{R}} (t - x_2)(t - x_3)(t^2 - x_4^2) \exp(-t^2/2)\, dt = 0,$$

откуда $-x_1 = x_4 = \sqrt{\frac{3 + x_2x_3}{1 + x_2x_3}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Hochreiter R., Pflug G. Ch.* Financial scenario generation for stochastic multi-stage decision processes as facility location problems // Annals of Operations Research. 2007. Vol. 152, № 1. P. 257–272.

2. *Heitsch H., Römisch W.* Scenario tree modeling for multistage stochastic programs // Math. Program. 2009. Vol. 118, № 2. P. 371–406.

3. *Rockafellar R., Uryasev S.* Optimization of Conditional Value-at-Risk // The Journal of Risk. 2000. Vol. 2, № 3. P. 21–41.

4. *Dupacova J., Consigli G., Wallace S. W.* Generating Scenarios for Multistage Stochastic Programs // Annals of Operations Research. 2000. Vol. 100. P. 25–53.

5. *Hoyland K., Wallace S.W.* Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems // Management Science. 2001. Vol. 47. P. 295–307.

6. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. М. : Мир, 1983. 382 с.

On the Error of Approximation by Means of Scenario Trees with Depth 1

E. A. Zakharova, S. P. Sidorov

Saratov State University, Russia, 410012, Saratov, Astrahanskaya st., 83, zakharova_e@yahoo.com, sidorovsp@info.sgu.ru

Let Λ_n denote the set of scenario trees with depth 1 and n scenarios. Let $X = (0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$ and let $\Lambda_n(X)$ denote the set of all scenario trees of depth 1 with the scenarios $X = (0 \le x_1 < \ldots < x_n \le 1)$. Let G be a probability distribution defined on $[0,1]$ and H be a subset of measurable functions defined on $[0,1]$. Let $d_{H,X}(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n(X)} d_H(G, \tilde{G})$ and $d_H(G) = \inf_{\tilde{G} \in \Lambda_n} d_H(G, \tilde{G})$, where $d_H(G, \tilde{G}) := \sup_{h \in H} \left| \int h\, dG - \int h\, d\tilde{G} \right|$. The main goal of the paper is to estimate $d_H(G, X)$ and $d_H(G)$ in the case when the set H is a subset of all algebraical polynomials of degree $\le n$. Thus, the paper is examined the error of approximation of a continuous distribution G by means of scenario trees with depth 1 and matching the first n moments.

Key words: scenario trees, method of moments.

References

1. Hochreiter R., Pflug G. Ch. Financial scenario generation for stochastic multi-stage decision processes as facility location problems. *Annals of Operations Research*, 2007, vol. 152, no. 1, pp. 257–272.
2. Heitsch H., Römisch W. Scenario tree modeling for multistage stochastic programs. *Math. Program.*, 2009, vol. 118, no. 2, pp. 371–406.
3. Rockafellar R., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk*, 2000, vol. 2, no. 3, pp. 21–41.
4. Dupacova J., Consigli G., Wallace S. W. Generating Scenarios for Multistage Stochastic Programs. *Annals of Operations Research*, 2000, vol. 100, pp. 25–53.
5. Hoyland K., Wallace S. W. Generating Scenario Trees for Multistage Decision Problems. *Management Science*, 2001, vol. 47, pp. 295–307.
6. Traub J. F., Woźniakowski H. *A general theory of optimal algorithms*. New York, Academic Press, 1980. 341p.

УДК 519.17

МИНИМАЛЬНЫЕ РЕБЕРНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ПАЛЬМ

Д. Д. Комаров

Аaспирант, ассистент кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KomarovDD@gmail.com

Минимальные реберные расширения графов можно рассматривать как модель оптимальной реберной отказоустойчивой реализацией некоторой системы. Задача нахождения минимальных реберных расширений произвольного графа является NP-полной, поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное реберное расширение аналитически. Эта работа посвящена реберным 1-расширениям графов специального класса — класса пальм. В этой работе приводится вид реберного 1-расширения для некоторых пальм и доказывается его минимальность.

Ключевые слова: минимальные расширения графов.

Харари и Хейз в своей работе [1] рассматривают граф как модель некоторой технической системы в контексте отказоустойчивости. Вершины графа — ее элементы, а ребра — связи между элементами системы. Отказ связи системы рассматривается как удаление соответствующего этой связи ребра. При такой интерпретации минимальное реберное k-расширение графа, моделирующего некоторую систему Σ, является моделью оптимальной реберной k-отказоустойчивой реализации системы Σ. Задача нахождения минимального реберного расширения произвольного графа является NP-полной [2], поэтому представляет интерес нахождение классов графов, для которых возможно построить минимальное реберное расширение аналитически. В данной работе исследуется класс графов, являющийся особым подклассом деревьев, — класс пальм. Исследования будут ограничены рассмотрением минимальных реберных 1-расширений двулистных пальм(далее, говоря минимальное расширение, автор будет иметь в виду минимальное реберное 1-расширение). Дадим основные определения, которые будут использованы в работе.

Графом (неориентированным) называется пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное множество (множество вершин), а α — симметричное и антирефлексивное бинарное отношение на V'(множество ребер). Определения в основном даются по работе [3].

Про ребро $\{u, v\}$ графа G говорят, что оно *инцидентно* вершинам u и v.

Если ребро $\{u, v\}$ принадлежит бинарному отношению α графа G, то говорят, что вершина u *смежна с вершиной* v.

Степенью вершины u графа G называется число инцидентных ей рёбер.

Подграфом графа $G = (V, \alpha)$ называется пара $G' = (V', \alpha')$, где $V' \subseteq V$ и $\alpha' = (V' \times V') \cap \alpha$.

Вложением графа $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ в граф $G_2 = (V_2, \alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f : V_1 \to V_2$, что для любых $u, v \in V_1$ выполняется следующее условие: $(u, v) \in \alpha_1 \Rightarrow (f(u), f(v)) \in \alpha_2$.

Назовем граф $G_3 = (V_3, \alpha_3)$ *реберным k-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вложим в каждый подграф графа G_3, получающийся удалением любых его k ребер.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) граф G^* является реберным k-расширением G;

2) $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).